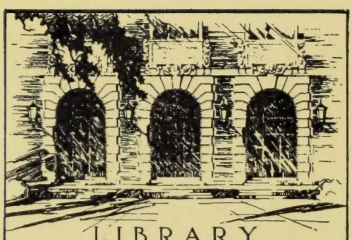


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

500
C33r
v.23

OAK ST HDSF

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/rozpravyceskeaka2319cesk

Obsah XXIII. ročníku.

Číslo

J. V. Želízko, Nové naleziště diluviální fauny u Volyně. (Se 2 obr. v textu a 1 tab.) 1

MUDr. *Josef Roček,* Příspěvek k poznání tvorby praecipitinů v těle zvířecím. (S tabulkou.) 2

Dr. *Jindřich Svoboda,* Výpočet radiantu roje meteoritů z elementů dráhy komety a důkaz souvislosti Aquarid a Orionid s kometou Halleyovou. (Se 4 obr. v textu.) 3

F. Slavík, O nových fosforečnanech z Greifensteinu v Sasku. (Se 7 obrazci v textu.) 4

MUDr. *Viktor Guttmann,* Amoeba v cystě dentální. (S 2 tabulemi.) 5

Dr. *B. Macků,* O udržení konstantních obrátek strojů. (S 2 obrazci v textu.) 6

Dr. *B. Macků,* Energetické poměry netlumených oscillací ve dvou spřažených kruzích. (S obr. v textu.) 7

Zdenko Frankenberger, O předhistorických psech z okolí Podbaby u Prahy. (S 2 obrazci v textu.) 8

V. Švambera, Šumavská jezera. II. Velké Javorské jezero. (S 1 mapou a 1 tab.) 9

Radim Kettner, O lakkolithových intrusích porfyrů mezi Mníškem a Vltavou. (S geologickou mapou, přílohou profilů a 3 obr. v textu.) 10

Prof. Dr. *Otakar V. Srdínko,* Funkcionální architektura sklovité chrupavky žeberní u člověka. (Se 4 tabulkami.) 11

Dr. *Václav Simandl,* O zobecněném cylindroidu 12

Prof. Dr. *Otakar V. Srdínko,* Štěpitelnost sklovité chrupavky a její vztah k funkcionální struktuře. (Se 3 tabulkami.) 13

Dr. *František Rádl,* O kaskádní transformaci differenciálních rovnic lineárních. (Pokračování k R. Č. A. XXII. č. 32, 41.) 14

Dr. *Václav Simandl,* Příspěvek ku theorii lineárních systémů lineárních komplexů 15

V. Švambera, Šumavská jezera. III. Prášilské jezero. (S 3 obr. a mapkou.) 16

J. Sobotka, Některé potenční vlastnosti ploch druhého stupně. 17

Dr. *K. Żorawski*, O jistých vlastnostech polár 18
Dr. *Vladimír J. Novák*, O formách kvádrových pískovců v Čechách. (Se 4 tab.) 19
V. Švambera, Šumavská jezera. IV. Laka. (S 1 tabulkou a mapkou.) 20
Dr. *Jindřich Svoboda*, O tvaru meteorického roje komety Halleyovy. (S 9 vyobrazeními v textu.) 21
Prof. *E. Votoček* a doc. Dr. *V. Veselý*, O štěpení racemických cukrů opticky činným amylmerkaptanem a o některých nových merkaptalech. 22
Dr. *L. Kaplanová*, Krystalografie betainu a některých jeho sloučenin. (Se 6 obrazy v textu.) 23
Vládní rada prof. *Vinc. Jarolímek*, O imaginárné prostorové křivce kubické. (S 5 obr. v textu.) 24
Dr. *Josef Kloboučck*, Souvislost úplného systému ∞^5 lineárních komplexů přímkových se všemi přímkovými plochami druhého stupně, které procházejí čtyřmi pevnými body nebo se dotýkají čtyř pevných rovin. 25
Dr. *Sig Thor*, Příspěvky k seznání vodulí fauny kavkazské dle sbírky p. Jul. Komárka. (S 11 obr. v textu.) 26
Julius Komárek, Příspěvky k zoogeografii Kavkazu a rusko-perského pomezí. (S 8 obrázky v textu.) 27
Vladimír Václav Heinrich, O měření hvězdných azimutů v digressi. (Pozorování na velikém Repsoldově altazimutu hvězdárny Strassburgské.) 28
Fr. Velísek, Dělení roviny v infinitesimální rhomby kružnicemi stálých poloměrů. 29
Prof. Dr. *L. Syllaba* a prof. Dr. *K. Weigner*, Anatomický podklad poklepového ztemnění slezinného. (S 34 obrazy textovými.) 30
Jan Obenberger, Holarktické Anthaxie. (Coleoptera-Buprestidae.) Část specielní. I. Revise kratomeroidních Anthaxií. (S 10 obrazci v textu.) 31
Dr. *Václav Posejpal*, Příspěvek ku studiu resonančního spektra par iodových a poznámka k fluorescenční absorpci. (Se 3 obr. v textu.) 32
M. Lerch, Příspěvky k vlastnostem sférických čar šroubových. (S dvěma obrazy na zvláštní tabulce.) 33
Dr. *Karel Schäferna*, O novém kavkazském druhu rodu Dikerogammarus. (Se 2 tabulkami.) 34
Dr. *Jindřich Svoboda*, Odvození pohyblivého radiantu Lyrid z tvaru meteorického roje. (S 1 obrazcem v textu.) 35
J. Sobotka, O zvláštním způsobu určení kuželů a několik příslušných úloh cyklografických. (Se 3 obrazci v textu.) 36
Prof. Dr. *Cyril Krauz*, O novém způsobu titrace kyanovodíku a jeho solí. Část I. 37
Dr. *Václav Simandl*, O sborcených hyperboloidech v souvislosti s lineárními komplexy. 38

Číslo
B. Bydžovský, Příspěvek k theorii elliptické křivky normální. 39
Dr. *Bohuslav Hostinský*, Příspěvek ku geometrii kulových ploch. 40
J. Sobotka, Konstrukce oskulačních rovin některých křivek a několik deskriptivně geometrických applikací. (S 15 obr. v textu.) 41
Vládní rada professor *Vincenc Jarolímek*, Ke konstrukci normál bodem mimo kuželosečku. (S 2 obrázky do textu vloženými.) .. 42
Dr. *František Bayer*, Revise našich ještěrů křídových. 43
Ant. Vimmer, Několik poznámek k morfologii larev Dipter. (S 3 tabul.) 44
Dr. *Václav Dědina*, Příspěvek k poznání morfologického vývoje české tabule křídové. (S 6 obr. v textu.) 45
Dr. *Jaroslav Peklo*, Studie o inaktivaci fotosynthetické assimilace chlorofyllu. Část III. O mutabilitě chlorell. 46
J. Sobotka, Prostorová obdoba Steinerovy paraboly. (Se 6 obr. v textu.) 47

500
C33n
v.23

Nové naleziště diluviální fauny u Volyně.

Podává

J. V. ŽELÍZKO.

Předloženo dne 28. listopadu 1913.

Úvod.

V lednu 1913, tedy čtyři léta po uveřejnění mého pojednání o diluviální fauně zechovické,[1]) obdržel jsem od ředitelství *„Jihočeských dolů na vápenec a nerosty"* ve Volyni zprávu o novém výskytu diluviální zvířeny, nalezené při lámání vápence na tak zvaném *Děkanském vrchu*, severně od Volyně.

Laskavostí správce uvedeného podniku, pana M. Boháče, byly mně také zaslány některé, v nové lokalitě nalezené kosti, zuby a jiné zbytky, pocházející z divokého koně a soba. Později, při čistění kostí, nalezl jsem v hlíně, jíž byla dutina jedné koňské kosti vyplněna, ještě femur nějakého diluviálního hlodavce.

Většina kostí byla nápadně na koncích ohlodána, což svědčilo, že nálezy pocházejí asi z podobného úkrytu dravců, jako u Zechovic. Abych mohl zajímavé naleziště na *Děkanském vrchu* shlédnouti, a jej později zevrubněji prozkoumati, zajel jsem o Velikonocích téhož roku do Volyně. Neutěšené, deštivé léto a naprostý nedostatek k výkopům spolehlivých dělníků zavinily, že mi nebylo možno, během uplynulých prázdnin práci ukončiti, což ale mělo pro mne zase jinou výhodu, jak hned dále povím.

Koncem července podařilo se mi totiž, dík zvláštní náhodě, objeviti v odkrytém profilu diluviálního nánosu hnízdo, obsahující množství hlodavčích pozůstatků, kůstek, čelistek a zoubků, takže mohl jsem se nerušeně jeho vykořisťování věnovati, což vyžadovalo mnoho dní trpělivé a na nejvýš opatrné práce. Odkrytí a prozkoumání ostatní diluviální pokrývky v rozměru mnoha čtverečných metrů, ponechal jsem pak na dobu pozdější.

[1]) *Diluviální fauna od Volyně v jižních Čechách* (Rozpravy České Akademie. R. XVIII. Č. 9. 1909).

Že ale jsou již dosavadní výsledky velmi zajímavé a cenné, svědčí níže podaná zpráva.

Konám jen milou povinnost, pakli zde s vděčností vzpomínám pánů: E. Lederera, býv. ředitele *„Jihočeských dolů na vápenec a nerosty"* a M. Boháče, správce tohoto podniku, kteří výzkumy mé všemožně podporovali.

Rovněž i panu K. J. Maškovi, řediteli c. k. vyšší reálky v Telči, srdečně děkuji za přátelskou výpomoc při určování sporného materiálu jakož i panu J. Kniesovi, nadučiteli v Sloupu, za určení některých arvicolid.

Naleziště a jeho geologické poměry.

Děkanský vrch, zvaný tak v obecné mluvě proto, že náležel dříve i s okolními pozemky k volyňskému děkanství, nachází se u samé Volyně, hned nad zimní hospodářskou školou.

Je to spíše nepříliš vysoký pahorek, s příkrým svahem k severu, který byl ještě před třiceti léty úplně holý. Teprve zásluhou dřívějšího nájemce, zesnulého pana F. Boháče, byl pak zalesněn.

Děkanský vrch pozůstává převážně z prahorního vápence, prostoupeného různými žilnými horninami, jehož podloží tvoří rula (viz profil obr. 1.).

V době diluviální táhla se po celé skoro délce vršku od východu k západu vápencová stěna, která byla během dlouhých dob sesouvající se prstí a kamením zpola zasypána, čímž takto nanesený materiál utvořil podél stěny násep s dosti příkrým sklonem k severu.

V nedávné době zakoupen byl *Děkanský vrch* správou *„Jihočeských dolů na vápenec a nerosty"*, která jej dala po novém roce 1913 v samém středu vymýtiti, k vůli založení většího vápencového lomu. Aby pak mohl býti odstřelovaný kámen pohodlně odklízen, učiněn nánosovým příkrovem od jihu k severu asi dva metry široký průkop, který poskytl dva pěkné profily, jak vidno z tuto přiložených obrázků (obr. 1. a 2.).

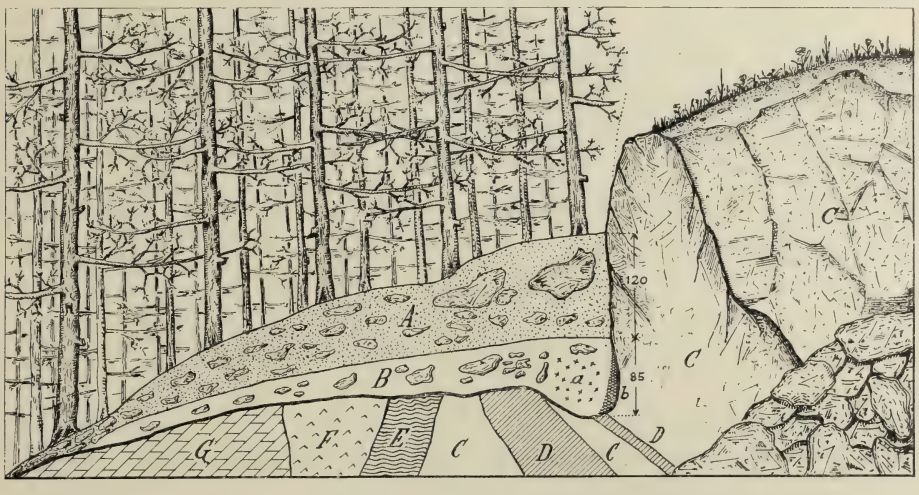
Na profilu prvním vidíme, že diluviální nános spočívá dílem na vápenci, prostoupeném žilnými horninami, dílem leží též na rule. Tento nános, pozůstávající z hnědé, plastické hlíny, promísené většími i menšími kusy vápence a jiných hornin, jakož i kostmi větších ssavců, je nestejné mocnosti, která v úžlabině u skalní stěny asi 85 *cm* měří.

Délka uloženin, k severu se vykliňujících, obnáší od skalní stěny až do konce 7 metrů. Sklon jich, podmíněný sklonem pevného podkladu, jest 10—15°. Diluviální nános ztrácí se na severním konci ve směsi drobného alluviálního štěrku.

V úžlabině při samé skalní stěně, nachází se partie jemné, písčité, lésovité hlíny barvy temněhnědé (profil obr. 1*b*), která přechází ve hlínu barvy poněkud světlejší, jež je promíšena bělavými úlomky vápence a která tvoří za sucha velmi kompaktní shluky. Hlína tato střídá se pak s jinými temnějšími partiemi, obsahujícími vedle úlomků vápence též

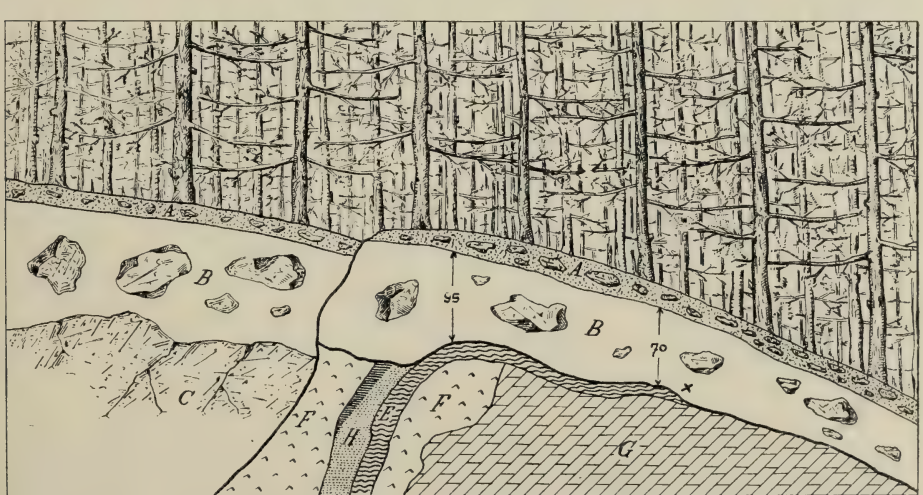
různé písčité součástky (profil obr. 1*a*, s křížky kolkolem). Dotčená hlína důležitá je tím, že obsahovala množství hlodavčích a jiných zbytků.[2])

S. J.



Obr. 1. *Průřez vrstev na Děkanském vrchu u Volyně od severu k jihu.*
A alluvium, *B* diluviální hlína se zbytky větších ssavců, promísená kusy vápence a jiných hornin, *a* hnízdo obsahující hlodavčí a j. zbytky, *b* partie jemné lésovité hlíny, *C*, pravápenec, *G* rula, *D*, *E*, *F* žilné horniny.

J. S.



Obr. 2. *Průřez vrstev na Děkanském vrchu u Volyně od jihu k severu.*
A alluvium, *B* diluviální hlína se zbytky koně a soba, promísená kusy vápence a j. hornin, × nalezistě měkkýšů, *C* pravápenec, *G* ruda, *E*, *F*, *H* žilné horniny.

[2]) Podrobný rozbor diluviální hlíny z *Děkanského vrchu*, provedený panem drem B. Heinitzem ve výzkumné stanici lesnické v Písku, bude uveřejněn po ukončení mého výzkumu.

Alluviální uloženiny, nabývající u skalní stěny 120 *cm* mocnosti, skládají se z temné, hnědé hlíny, barvy tabákové, promíšené množstvím drobného štěrku z vápence a ruly. V profilu 2. jeví se již poněkud jinak poměry uložení diluviálního a alluviálního nánosu.

Diluviální nános, mající i zde podobný podklad jako v profilu předešlém, je poměrně mocnější, kdežto alluviální pokrývka je celkem nepatrná. Hlína tohoto profilu poskytla pozůstatky koně a soba a dva pěkně zachovalé měkkýše *Helix* (*Isognostoma*) *personata* a *Patula* (*Discus*) *rotundata* (na obr. 2. dotyčné místo křížkem vyznačeno).

Prokopání uvedeného profilu k západu slibuje v budoucnosti slušný vědecký výtěžek.

Diluviální fauna.

Diluviální zvířena na *Děkanském vrchu* nenacházela se podobně jako u blízkých Zechovic v žádné trhlině, nýbrž v nánosu se shora buďto splaveném nebo sesutém.

Strmá vápencová stěna, táhnoucí se středem vrchu, skytala mezi balvany bezpečné skrýše k dočasnému pobytu dravců, kteří sem svoji kořist zanášeli. Zejména úžlabina při stěně (obr. 1*a*) byla asi vhodným hodovištěm sněžní sovy, soudě dle množství zbytků malých hlodavců, jež byly nashromážděny toliko na jednom místě. Následkem častých deštů v létě 1913 nasákla hlína vodou, takže se mnohé z kostí a čelistí hlodavčích úplně rozmočily. Jakmile byla jednou hlína tyto zbytky obsahující vodou nasycena, nepomohlo k záchraně čelistek ani pozdější vysušování je chovajícího materiálu, ježto se vše pak na vzduchu rozpadalo.

Hnízdo s hlodavčími zbytky obsahovalo vedle několika měkkýšů též četné zbytky koňských a sobích kostí. Kosti těchto zvířat, vyskytnuvší se zvláště hojně při zakládání vápencového lomu, jsou ponejvíce světlohnědé, místy šedé s černými skvrnami. Jsou často přeráženy a na koncích nějakou velkou šelmou ohlodány. Rovněž i čelistky hlodavčí vyznačují se světlehnědou barvou. Jen několik čelistek a kůstek je úplně černých.

Podél vápencové stěny takto nashromážděné zbytky byly později sesouvající se zemí, štěrkem a balvany z vyšší polohy vrchu zaneseny, podobně asi jako u Zechovic.

Dosud nalezené pozůstatky patří charakteristickým druhům zvířeny *glaciální* čili *tundrové* a *stepní*. Zástupci této obojí zvířeny vyskytují se na *Děkanském vrchu společně*.

V této nové lokalitě nalezená dodnes zvířena náleží následujícím druhům:

Mammalia. — Ssavci.

Mustelidae. — Kunovití.

Putorius (Ictis) Erminaeus Ow. (Hranostaj).

Nalezena pravá dolní čelistka bez klů, které byly ale nalezeny zvlášť. Souhlasí úplně co do velikosti i podoby s Woldřichovým exemplářem uvedeného druhu ze *Sudslavic,*[3]) jakož i Nehringovým ze *Schweizerbildu*[4].)

Ze Zechovic máme pouze dva atlasy.

Sciuridae. — Veverovití.

Spermophilus rufescens Keys & Blas.

(Sysel orenburský.)

Jedna dobře zachovalá stolička.

U *Zechovic* nalezena pravá dolní čelistka. Jinak v Čechách dosti hojný.

Arvicolidae. — Hraboši.

Myodes torquatus Pall.

(Lumík velký.)

Z tohoto nejvýznačnějšího zástupce arktické zvířeny nalezeny tři levé a tři pravé poloviny dolních čelistí a jeden fragment z hořejší čelisti s několika zoubky.

Fossilní lumík velký znám je dosud v Čechách od *Sudslavic, Trmic* a *Zechovic,* odkudž pochází přední části lebky, a několik čelistek.

Arvicola agrestis Blas.

(Hraboš polní.)

Čtyři poloviny dolních čelistí.

Vyskytl se u *Zechovic.* Fossilní uvádí se též od *Sudslavic* a z *Kotlářky.*

---

[3]) *Diluviale Fauna von Zuzlawitz bei Winterberg im Böhmerwalde* (Sitzungsb. d. k. Akademie der Wiss. I. Abth., Bd. LXXXIV., II. Theil, Taf. II. Fig. 7.). Vídeň 1881.

[4]) *Die kleineren Wirbelthiere vom Schweizerbild* bei *Schaffhausen* (Denkschr. d. Schweiz. Naturfor. Ges. Bd. XXXV., Taf. II., Fig. 13.). Basel 1895.

Arvicola arvalis Sélys.

(Hraboš obecný.)

Čtrnáct polovin dolních čelistí.
V Čechách nalezen na několika místech, mezi jinými i u *Zechovic*.

Arvicola amphibius Desm.

(Hraboš vodní.)

Úlomky dolních čelistek, kly a kůstky (femury).
Vyskytl se hojně u *Zechovic* a v jiných českých lokalitách.

Arvicola gregalis Desm.

(Hraboš sibiřský.)

Dvacet šest úplných i fragmentárních polovin dolních čelistí.
Také u *Zechovic* vyskytl se dosti hojně, Mimo to uvádí se též od *Sudslavic* a z *Bulovky*.

Arvicola ratliceps Keys. & Blas.

(Hraboš severní.)

Pravá a levá polovice dolní čelisti.
U *Zechovic* dosti hojný. Jinak je uváděn v literatuře toliko od *Sudslavic*.

Arvicola subterraneus Sélys.

(Hraboš podzemní.)

Sedm polovin dolních čelistí.
Uvádí se od *Sudslavic* a z *Podbaby*. Rovněž i u *Zechovic* nalezli jsme několik čelistek.

Leporina. — Zajícovití.

Lepus variabilis Pall.

(Zajíc sněžný.)

Úlomek metacarpu, hořejší kloub z tibie, metatarsus a jiné kůstky.
U *Zechovic* vyskytly se jeho zbytky dosti hojně. Z Čech uváděn také od *Sudslavic* a z *Bulovky*.

Lagomys pusillus Pall.

(Pišťucha zakrslá.)

Jedna pravá a jedna levá polovina dolní čelisti a úlomek hořejší čelisti s několika zoubky.

Tento význačný typ zvířete výhradně stepního znám je také od *Zechovic, Sudslavic* a z *Bulovky.*

Perisodactyla. — Kopytnatci lichoprstí.

Equus ferus Pallas (= *Equus Prževalskii Polj.*)

(Kůň.)

Názvem tímto označena v novější době menší robustní forma diluviálního koně, identická s *Equus caballus* (*fossilis*) *var. minor Woldř.*

Zástupce uvedeného druhu zastal slavný ruský cestovatel N. M. Prževalskij v solné poušti džungarské v střední Asii, severně od východního Thien-šanu.

Dr. Otto Antonius ve Vídni chystá právě o fossilních koních k tisku větší publikaci, v níž bude o uvedeném druhu obšírně pojednáno.

Na *Děkanském vrchu* nalezené koňské zbytky náležejí několika starším i mladším individuím, jak vidno na př. z četných horních i dolních stoliček, jichž jsme dosud nalezli přes šedesát. Kromě toho nalezeny zadní části lebky dvou individuí, obě polovice dolní čelisti se všemi stoličkami a jeden fragment se třemi stoličkami. Z hořejší čelisti pochází úlomek se třemi a jiný se čtyřmi nápadně otřelými stoličkami Konečně nalezeny dva fragmenty ze dvou hořejších čelistí, jeden se třemi a jiný se čtyřmi řezáky, vedle několika řezáků po různu nalezených.

Rovněž i jiné kosti byly velice hojné, na př. zbytky pánví, metatarsů, tibií, dále metacarpy, phalangy, astragaly, ulny atd.

Krátce, diluviální kůň zastoupen je na *Děkanském vrchu* ze všech zvířat nejčetněji. Dosud zde nalezené pozůstatky stály by již samy za vědecké zpracování.

Artiodactyla ruminantia. — Sudoprstci přežívaví.

Bison priscus Rütm.

(Zubr.)

Nalezena distální část tibie nad kloubem ohryzené.

Zubr považován mnohými autory za zástupce pastvinné anebo lesní zvířeny. Že ale jej možno spíše za zvíře stepní považovati, o tom svědčí náhled Nehringův[5]), který i my sdílíme.

---

[5]) *Ueber Tundren und Steppen der Jetzt- und Vorzeit.* Str. 139 a 206. Berlin 1890.

U *Zechovic* zubr dosud zjištěn nebyl, jinak ale vyskytl se jinde v Čechách dosti hojně.

Rangifer tarandus Jard.

(Sob.)

Zajímavá je pěkně zachovalá větévka z parohu, pak dolní část parohu s lebeční kostí. Ostatní zbytky jsou většinou dravci rozkousány a na koncích ožrány. Nalezen byl humerus, radius, metatarsus, II. phalang a jiné.

U *Zechovic* vyskytly se ze soba také úlomky čelistí se zuby, za to ale parohy nebyly nalezeny.

Aves. — Ptáci.

Rasores. — Kurovití.

Lagopus albus Vieill.

(Kur rousný, sněhule severní.)

Tři kůstky; mezi nimi radius a ulna. Uvedený pták vyskytl se také u *Zechovic* a *Sudslavic*.

Mollusca. — Měkkýši.

Pan Zd. Frankenberger v Praze určil laskavě tyto druhy:
Helix (*Isognostoma*) *personata Lam.* Dva exempláře.
Helix (*Chilotrema*) *lapicida L.* Jeden exemplář.
Patula (*Discus*) *rotundata Mül.* Dva exempláře.
Clausilia (*Curmitzia*) *dubia Drap.* Jeden exemplář.
Clausilia (*Pirostoma*) *ventricosa.* Jeden exemplář.
Clausilia sp. Pouhý vrchol, blíže těžko určitelný.

Tyto druhy, až na *Clausilia dubia* (holocaení), jsou také u *Zechovic* zastoupeny. *Patula rotundata* byla u *Zechovic* teprve v poslední době zjištěna spolu s *Helix pomatia* L., takže jest úhrnný počet měkkýšů z této lokality 13 druhů.

Z níže přiloženého přehledu dosud na *Děkanském vrchu* u Volyně nalezených diluviálních obratlovců zřejmo, že je zvířena *glaciální* charakterisována šesti a zvířena *stepní* devíti druhy. Zvířena *pastevní* a *lesní*, která je u *Zechovic* a *Sudslavic* pěkně zastoupena, na *Děkanském vrchu prozatím* konstatována nebyla.

Přes to, že se v nové lokalitě volyňské vyskytují druhy, které vesměs také v *Zechovicích*, resp. i v *Sudslavicích* přicházejí, jsou za to mnohé z nich dokumentovány jinými osteologicky významnými zbytky.

Přehled diluviálních obratlovců z Děkanského vrchu u Volyně.

	Druh	Typ glaciální	Typ stepní
1	Putorius (Ictis) Erminaeus Ow. — Hranostaj	+	—
2	Spermophilus rufescens Keys. & Blas. — Sysel orenburský	—	+
3	Myodes torquatus Pall. — Lumík velký	+	—
4	Arvicola agrestis Blas. — Hraboš polní	—	+
5	Arvicola arvalis Sélys. — Hraboš obecný	—	+
6	Arvicola amphibius Desm. — Hraboš vodní	—	+
7	Arvicola gregalis Desm. — Hraboš sibiřský	+	—
8	Arvicola ratticeps Keys. & Blas. — Hraboš severní	—	+
9	Arvicola subterraneus Sélys. — Hraboš podzemní	—	+
10	Lepus variabilis. — Zajíc sněžný	+	—
11	Lagomys pusillus Pal. — Pišťucha zakrslá	—	+
12	Equus ferus Pall. — Kůň	—	+
13	Bison priscus Rütm. — Zubr	—	+
14	Rangifer tarandus Jard. — Sob	+	—
15	Lagopus albus Vieill. — Kur rousný	+	—
	Úhrnem	6	9

Erosivní údolí Volyňky mezi Bízkovým a Stulíkovým mlýnem. V levo nahoře zimní hospodářská škola, u ní na pravo Děkanský vrch, naleziště diluviální fauny. V pozadí horské, převážně rulové pásmo. — (Pohled od východu.)

Děkanský vrch r. 1913. Uprostřed vápencový lom s diluviální faunou. (Pohled od severu.)

Příspěvek k poznání tvorby praecipitinů v těle zvířecím.

Podává

MUDr. **JOSEF ROČEK,**

assistent c. k. hygienického a bakteriologického ústavu.

(S tabulkou.)

(Předloženo dne 16. ledna 1914.)

Při vyrobě antilátek, při nichž se používá co antigenu některého sera krevního — zejména hovězího nebo koňského — postupuje se dle návodu Uhlenhuthova a Weidanzova obyčejně tím způsobem, že se většímu počtu králíků vstříkne v krátkých intervalech časových několik značných dávek sera krevního. Při větším počtu králíků se podaří, že přece některý z nich přestojí mohutnou a tím i životu nebezpečnou reakci takto vyvolanou. Zvíře toto po uplynutí normální doby k proběhnutí reakce potřebné hodí se k získání velmi působivého, na praecipitiny bohatého sera, které ještě i ve velikých stupních zředění dává s příslušným antigenem reakci praecipitační.

Při pokusech immunisačních, které byly předmětem této práce, bylo použito cesty jiné, tím charakterisované, že jednak s novou dávkou immunisační se vždy vyčkalo, až zejména místní příznaky anafylaktické na místě vpichu úplně vymizely, po případě až serum zvířete nedávalo již žádné reakce praecipitační, jednak že při takovém dalším opětovaném vstřikování byla postupně volena dávka serová vždy menší.

Použitím této methodiky dospělo se k některým zajímavým pozorováním, jež osvětlují uvedené pokusy.

Prvé dva pokusy vyrobiti praecipitiny byly provedeny se serem hovězím a koňským přesně dle návodu Uhlenhuthova a Weidanzova, toliko s tím rozdílem, že místo většího počtu zvířat byl k immunisaci vzat vždy králík jediný. Příslušné serum applikováno intravenosně v množství 3 *ccm* každých 5 dní. Králík praeparovaný serem koňským zhynul za zjevů anafylaktických při třetí injekci, králík immunisovaný serem hovězím neměl po třetí injekci náležitě působivého sera a zhynul po injekci čtvrté.

Immunisační pochod opakován znovu opět se serem hovězím a koňským. Tentokráte však byla prováděna pečlivá každodenní kontrola vážením zvířete a pozorováním jeho celkového stavu.

Serum hovězí.

Králík šedý č. 5

1. III. 1910.

Váha zvířete 2450 *g*.

Vstříknuty *intravenosně 2 ccm* sera hovězího. Serum k injekcím používané bylo vždy získáno čerstvé ze zvířat v jatkách poražených. Krev z přeťatých cév krčních vystřikující byla po odtoku první části zachycena do sterilního válce skleněného. Serum, které se průběhem 24 hodin vytlačilo, bylo vždy při vyšetření bakteriologickém sterilní.

7. III.

Váha 2605 *g*.

Vstříknuty *3 ccm sera* intravenosně.

14. III.

Váha 2650 *g*.

Vstříknuty *4 ccm sera* instravenosně.

Druhého dne po této injekci zvíře nežere, jeví celkově stav chorobný a jeho váha klesla na 2430 *g*. Průběhem 3 dnů podstatné zlepšení, načež opět náhlé poklesnutí váhy tělesné až na 2200 *g*.

22. III.

Váha 2400 *g*.

Odejmuty z veny ušní 2 *ccm* krve venepunkcí.

Se získaným serem vykonána zkouška praecipitační. Výsledek této zanesen v tabulce I.

Tabulka I. Serum ze dne 22. III.

Serum hovězí zředěno:	Množství k reakci použité:	Serum praecipitinové:	Výsledek reakce:
1 : 100	1 *ccm*	0,1 *ccm*	Intensivní zákal okamžitě.
1 : 500	1 *ccm*	0,1 *ccm*	
1 : 1000	1 *ccm*	0,1 *ccm*	
1 : 5000	1 *ccm*	0,1 *ccm*	Zákal po 3 min.
1 : 10.000	1 *ccm*	0,1 *ccm*	Negativní.

Pokud se provádění reakce týče, používali jsme originalního zařízení dle Uhlenhutha a Weidanze. Antigen zřeďován dle systemu 1, 5, 10 a použit

vždy v množství 1 *ccm*. Zkoušený praecipitin přidáván přesnými pipetami na 0,001 dělenými s celkovým obsahem 0,1 *ccm* v množství 0,1 *ccm*. Zkumavky vloženy do thermostatu o 37° C, v němž po chvilkách kontrolovány. Po uplynutí jedné hodiny vyjmuty a ponechány dále při temperatuře pokoje.

Výsledek reakce jsme vždy kvalifikovali:

1. Dobou potřebnou k prvému objevení se reakce.

2. Rozsahem reakce, to jest největším zředěním antigenu, v němž ještě reakce jest positivní (bez ohledu na dobu).

3. Intensitou reakce, te jest mohutností vytvořeného zákalu.

Ad 2. a 3.: Výsledky tyto odečítány po 2 hodinách od nastavení reakce (1 hodina v thermostatu 37° C, 1 hodina při temperatuře pokoje).

Ke kvalifikaci této vedla pozorování, že nepřibývá ani neubývá vždy těchto faktorů reakce praecipitinové paralellně a že tedy k řádnému celkovému ocenění reakce je potřebí zvláště vytknouti všechny 3 veličiny.

Na základě výsledků sděleného v tabulce I. přikročili jsme k dalším injekcím. Téhož dne (22. III.) vstříknuty zvířeti intravenosně 4 *ccm* sera hovězího a 30. III. 3 *ccm* subkutánně, načež po následujících 6 dnech odejmuto opět malé množství krve z veny ušní k reakci praecipitinové.

Výsledek této zkoušky nelišil se v podstatě od předcházející. Tvořil se totiž okamžitý zákal opět pouze do zředění hovězího sera 1 : 1000, ve zředění 1 : 5000 nástával po 2 minutách, ve zředění 1 : 10.000 byla opět reakce negativní.

Po poslední injekci objevila se v místě vpichu infiltrace v podobě ohraničeného zatvrdnutí, jaké často jsme vídali při immunisaci králíků ricinem neb abrinem a jež empiricky uvyšli jsme považovati za lokální příznaky anafylaktické a znamení, že s injekcemi nutno vysaditi.

Tak učinili jsme i v tomto případě.

Od této doby tělesný stav zvířete se postupně lepšil, až asi po měsíci váha jeho dostoupila 2700 *g* a konečně také zmíněná infiltrace kolem místa vpichu úplně vymizela. Zároveň však praecipitační mohutnost jeho sera klesla na nulu, o čemž svědčí reakce praecipitinová se serem ze dne 27. V., která jest v každém ohledu negativní.

Tohoto dne vstříknuty opět zvířeti 3 *ccm* sera hovězího intravenosně.

Po následujících 5 dnech — tedy dne 1. VI. — odejmuta zkouška krevní z veny ušní. Tu objevil se překvapující effekt immunisační, jehož titr možno oceniti jako 20 kráte vyšší, než vubec kdy před tím u tohoto zvířete bylo dosaženo, když vezmeme ku srovnání reakci momentálně se dostavující. Při porovnání rozsahu reakce vubec, bez ohledu na čas k dostavení se zákalu potřebný, byl effekt immunisační nyní 64 krát větší.

Ve stejné mohutnosti praecipitační udržuje se i zkouška krevní po následujících 6 dnech odejmutá, jejíž hodnoty jsou patrny z tabulky II.

Tabulka II. Serum ze dne 6. VI.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce:
1 : 100	Okamžitě velmi intensivní zákal.
1 : 500	
1 : 1000	
1 : 5000	
1 : 10.000	
1 : 20 000	
1 : 40.000	Intensivní zákal za 3 min.
1 : 80.000	Zákal za 6 minut.
1 : 160.000	
1 : 320.000	Lehky zákal za 13 minut.
1 : 640.000	Negativní.

Po příznivém výsledku této reakce praecipitační odejmuli jsme zvířeti z veny ušní značné kvantum krve (as 30 *ccm*), z níž získané serum uchováno v zásobě ve sterilních fiolkách z hnědého skla bez přísady antiseptika. Udrželo se v dostatečné působivosti po dobu téměř dvou let.

Při této příležitosti zkontrolovali jsem účinek tak značné ztráty krevní na praecipitační titr, odejmuvše za dvě hodiny po té opět malé množství krve k reakci praecipitační. Nenalezli jsme však podstatné úchylky ni co do doby reakční, ni co do rozsahu.

Od této doby udržováno zvíře pokud možno v příznivých podmínkách životních, což jevilo se pravidelným přibýváním na váze, která na konec dostoupila až 3150 *g*.

V různých intervalech časových odnímali jsme zkoušky krevní a stopovali jsme krok za krokem ubývání praecipitačního effektu reakcí kvantitativně prováděnou.

Již za dva dny po ztrátě krevní pozorováno sužení rozsahu reakce, které potrvalo v nezměněné formě plných 14 dní, jak patrno na zkouškách ze dne 9. VI. (tab. III.) a 24. VI.

Tabulka III. Krev odejmutá dne 9. VI.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce:
1 : 100	Okamžitě silný zákal.
1 : 500	
1 : 1000	
1 : 5000	
1 : 10.000	
1 : 20.000	
1 : 40.000	Reakce i po delší době negativní.
atd.	

Reakce praecipitinová se zkouškou krevní ze dne 24. VI. liší se nanejvýše tím, že ve zředění 1 : 20.000 jest zákal poněkud méně intensivní než býval, přece však dostavuje se okamžitě.

V následujícím týdnu nastal však náhlý pokles praecipitační hodnoty, jak patrno z tabulky IV., v níž zaznamenán výsledek reakce se serem odejmutým zvířeti dne 2. VIII.

Tabulka IV. Serum ze dne 2 VII.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce:
1 : 100	Nepatrný zákal po 3 min.
1 : 500	
1 : 1000	
1 : 5000	
1 : 10.000	Slabý zákal teprve po 25 minutách.
1 : 20.000	
1 : 40.000	Negativní.

Objevila se tu tedy proti předešlé reakci značná prolongace časová' zároveň pak klesla značně i intensita jednotlivých zákalů, za to rozsah reakce zůstal celkem zachován. Vezmeme-li za základ pozorování a vzájemného srovnávání positivní reakci momentálně se dostavující, jest již nyní effekt praecipitační roven nule.

Úplné vymizení reakce nastalo pak za následujících 9 dní. V žádném zředění hovězího sera neobjevila se stopa zákalu, i když doba pozorovací byla prodloužena na několik hodin.

V této době podnikli jsme opět zákrok immunisační. Tentokráte bylo použito dávky poloviční té, která dne 27. V. způsobila tak znamenitý effekt immunisační. Injikovali jsme dne 18. VII. pouze 1,5 *ccm* sera hovězího. Králík injekci zcela dobře snesl a byl i dále normálního vzhledu.

Za 5 dní po této druhé reimmunisaci odejmuta opět krev ke zkoušce praecipitinové, kterou se zjistilo, že titr reakce momentálně se dostavující dosáhl opět téže výše jako po injekci 3 *ccm*, jenom rozsah se již na původní výši nevyšinul.

Fakta jsou patrna z tabulky V.

Tabulka V. Serum ze dne 23. VIII.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce:
1 : 100	Okamžitý velmi intensivní zákal.
1 : 500	
1 : 1000	
1 : 5000	
1 : 10.000	
1 : 20.000	
1 : 40.000	Zákal po 4 minutách
1 : 80.000	Negativní.

Ještě dne 1. VIII. odejmutá zkouška krevní drží se i co do doby i co do rozsahu na stejné výši.

V následujících 5 dnech nastalo značné zlenění reakce aspoň v nejvyšších zředěních a i malé zmenšení rozsahu reakce, jak patrno ze zkoušky krevní dne 6. VIII., jejíž výsledek zanesen v tabulce VI.

Tabulka VI. Serum ze dne 6. VIII.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce:
1 : 100 1 : 500 1 : 1000 1 : 5000	Okamžitý zákal
1 : 10.000	Zákal za 2 minuty.
1 : 20.000	Zákal po 4 minutách.
1 : 40.000	Negativní.

Ještě u větší míře jeví se toto zlenění u zkoušek krevních ze dne 11. VIII. a 18. VIII. při poměrně malém omezení rozsahu reakce.

Od této doby pak nastává pokles v obou směrech, přece však doznívání reakce se prodloužilo na více než 2 měsíce.

Krátký přehled podává tabulka VII. a VIII.

Tabulka VII. Serum ze dne 11. VIII. a 18. VIII:

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce dne: 11. VIII.	18. VIII.
1 : 100 1 : 500 1 : 1000	Slabý zákal za ½ min.	Za 1 min. slabý zákal.
1 : 5000	Zákal za 1 min.	Za 2½ min.
1 : 10.000	Stopa za 4 min.	Stopa za 7 min.
1 : 20.000	Negativní.	Negativní.

Tabulka VIII:

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce dne: 30. VIII.	15. IX.	26. IX.	30. IX.	10. X.
1 : 100	Zákal za 2 min.	Velmi slabý zákal za 10 min.	Stopa za 15 min.	Za 15 min.	Za 20 min.
1 : 500	za 4 min.	neg.	neg.	neg.	neg.
1 : 1000	neg.	neg.	neg.	neg.	neg.

Ještě dne 20. X. objevil se nepatrný zákal po delší době v koncentraci 1 : 100.

Konečně zkouška krevní ze dne 30. X. jest negativní.

V této době přistoupili jsme opět k reimmunisaci, tedy třetí, a snížili jsme opět dávku reimmunisační na polovici dávky předchozí.

7. XI. vstříknuto zvířeti 0,75 *ccm* sera hovězího intravenosně. Po následujících 7 dnech odejmuta zkouška krevní.

I po této malé dávce objevil se značný vzestup titru praecipitačního. Rozsah reakce byl jen o málo menší než při předešlé reimmunisaci na dávku dvojnásobnou, avšak rychlost reakční ve větších zředěních zůstala již značně menší. Výsledek uveden v tabulce IX.

Tabulka IX. Serum ze dne 14. XI.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce:
1 : 100 1 : 500 1 : 1000	Okamžitý mohutný zákal.
1 : 5000	Zákal za $2^1/_4$ minuty.
1 : 10.000	Zákal za $2^1/_2$ minuty.
1 : 20.000	Stopa za 30 minut.

Po této čtvrté immunisační etapě nedošlo již k dalšímu zkoumání pohyby titru sera praecipitačního, poněvadž krátce po odejmutí poslední zkoušky krevní stiženo bylo zvíře paraplegií zadních končetin, jíž následovala smrt.

Chronologický i věcný přehled všech těchto pokusů provedených na jednom zvířeti během 8 měsíců je podán v textu následujícím a také v grafickém znázornění, které jest připojeno.

Immunisace:

Injekce 1. Dne 1. III. 2 *ccm* sera intravenosně.
Injekce 2. Dne 7. III. 3 *ccm* sera intravenosně.
Injekce 3. Dne 14. III. 4 *ccm* sera intravenosně.
Zkouška sera. Dne 22. III. Výsledek v tabulce I.
Injekce 4. Dne 22. III. 4 *ccm* sera intravenosně.
Injekce 5. Dne 30. III. 3 *ccm* sera subkutánně.
Infiltrace v místě vpichu. Pokusy přerušeny.
Zkouška krevní. Dne 27. V. negativní.

Reimmunisace I.

Injekce. Dne 27. V. 3 *ccm* sera intravenosně.
Zkouška krevní. Dne 1. VI.
Zkouška krevní. Dne 6. VI. Tabulka II.
Odejmuto 30 *ccm* krve z veny ušní. Dne 7. VI.
Zkouška krevní. Dne 9. VI. Tabulka III.

Zkouška krevní. Dne 24. IV.
Zkouška krevní. Dne 2. VII. Tabulka IV.
Zkouška krevní. Dne 11. VII. Negativní.

Reimmunisace II.

Injekce. Dne 18. VII. 1,5 *ccm* sera intravenosně.
Zkouška krevní. Dne 23. VII. Tabulka V.
Zkouška krevní. Dne 1. VIII.
Zkouška krevní. Dne 6. VIII. Tabulka VI.
Zkouška krevní. Dne 11. VIII. } Tabulka VII.
Zkouška krevní. Dne 18. VIII. }
Zkouška krevní. Dne 30. VIII., 15. IX., 26. IX., 30. IX., 10. X. Tabulka VIII.
Zkouška krevní 20. X.
Zkouška krevní 30. X. Negativní.

Reimmunisace III.

Injekce. Dne 7. XI. Intravenosně 0,75 *ccm* sera.
Zkouška krevní. Dne 14. XI. Tabulka IX.

Pokud se grafického znázornění týče, tu při konstrukci jedné křivky (tečkované) vzata za základ reakce momentálně se dostavující, u druhé křivky pak rozsah reakce vůbec.

Z této druhé křivky patrný jest rozdíl ve způsobu ubývání praecipitační mohutnosti sera po druhé a třetí immunisaci. Kdežto po druhé immunisaci nastalo v krátké době sížení reakce, které potrvalo nezměněno 24 dní, načež v následujících 9 dnech klesla rapidně praecipitační aktivita sera na nulu, po immunisaci třetí ubývalo pozvolna rozsahu reakce plných 89 dní.

Pokusy se serem hovězím opakovali jsme ještě jednou tentokráte pararelně na 4 králících. Zamýšleli jsme kontrolovati podrobně vzestup i sestup titru praecipitačního v několika následných immunisacích. Leč individualita zvířat, jež při všech pokusech immunisačních hraje velikou roli, tentokráte našemu pokusu nepříznivá, zmařila u dvou zvířat reimmunisaci vůbec, u druhých dvou pak nepřinesla reimmunisace žádoucího vzestupu praecipitační mohutnosti sera.

Objevil se tu však jiný zajímavý fakt, totiž vztah mezi reaktivností zvířete a velikostí nebezpečí hrozící anafylaxie, jak patrno z uvedených protokolů.

Králík č. 7., 8., 9., 10.

Prvá injekce dne 12. VIII. 1910.
Vstříknuto všem zvířatům intravenosně po 2 *ccm* sera hovězího.
Zkouška krevní odejmuta dne 19. VIII.

Výsledek immunisační po prvé injekci byl zejména u dvou zvířat velmi uspokojivý (8 a 9), u druhých dvou byla reakce praecipitační nepatrná. Tabulka X.

Tabulka X. Serum ze dne 19. VIII.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce u zvířete č. 7.	č. 8.	č. 9.	č. 10.
1 : 100	Stopa po 1 minutě.	Intens. zákal po ½ min.	Po ½ min.	Stopa po 2 min.
1 : 500	negativní.	Po 1 min.	Po 1 min	Negativní.
1 : 1000			Po 10 min.	
1 : 5000		Stopa po 3 min.	Negativní.	
1 : 10.000		Negativní.		

Druhá injekce dne 19. VIII.

Vstřiknuto všem zvířatům po 3 *ccm* sera intravenosně.

Zkouška krevní odejmuta dne 26. VIII.

Z této zkoušky krevní jest patrno, že druhá intravenosní injekce přinesla zlepšení u dvou zvířat s malou immunitou (7 a 8), za to značné zhoršení intensity i doby reakce u druhých dvou po prvé injekci pěkně reagujících (8 a 9). U těchto nutno pravděpodobně přičísti zhoršení reakce praecipitační stavu anafylaktickému, který u obou zvířat po následující injekci propukl a končil v krátké době exitem. Výsledek této zkoušky krevní zaznamenán v tabulce XI.

Tabulka XI. Serum ze dne 26. VIII.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce u zvířete č. 7.	č. 8.	č. 9.	č. 10.
1 : 100	Zákal okamžitě	Stopa po ½ min.	Stopa po 1 min.	Okamžitý zákal.
1 : 500				
1 : 1000	Za 1 min	Po 2 min.	Po 5 min.	Zákal po 1½ min.
1 : 5000	Za 3 min.	Po 3 min.	Po 10 min.	Po 4 min.
1 : 10.000	Negativní.	Negativní.	Negativní.	Negativní.

Intensita reakce u králíků č. 8 a 9 jest velmi malá, zákal sotva viditelný jako jemná opalescence.

Třetí injekce dne 26. VIII.

Vstřiknuto všem intravenosně po 4 *ccm* sera. Po této třetí injekci zhynul králík č. 8 a 9 v několika dnech za příznaků anafylaktických. Oběma zbylým odejmuta dne 3. IX. zkouška krevní.

V této zkoušce objevilo se podstatné zlepšení u obou zejména rychlosti reakční. Objevila se i reakce okamžitá u králíka č. 7. do zředění hovězího sera 1 : 500, u králíka č. 10 do zředění 1 : 1000.

Čtvrtá injekce. Dne 4. IX.

Oběma zbylým zvířatům injikováno subkutánně po 4 *ccm* sera hovězího.

Zkouška krevní dne 10. IX. Výsledek této zanesen v tabulce XII.

Tabulka XII. Serum ze dne 10. IX.

Zředění sera hovězího:	Výsledek reakce u zvířete č. 7.	č. 10.
1 : 100	Okamžitý intens. zákal.	Okamžitý intens. zákal.
1 : 500		
1 : 1000	Za $^1/_4$ minuty.	
1 : 5000	Za $^1/_2$ minuty.	Zákal za $^1/_2$ min.
1 : 10.000	Negativní.	Negativní.

Jak patrno, zůstal rozsah reakce u obou těchto zvířat omezen zředěním 1 : 10.000 jako negativním.

Tím ukončena první etapa immunisační. Vyčkávali jsme opět, až reakce praecipitační vymizí, což nastalo as po uplynutí $1^1/_2$ měsíce od poslední injekce.

Přistoupili jsme tedy k reimmunisaci, tentokráte hned s dávkou menší, než nejmenší k immunisaci použitá.

Injekce dne 20. XI.

Vstříknuto oběma zvířatům po 1,5 *ccm* sera hovězího intravenosně.

Po této injekci objevil se sice malý vzestup titru praecipitačního, avšak pouze do koncentrace sera hovězího 1 : 100, nedosáhl tedy ani z daleka výše immunity původní. Za to obě zvířata stala se zřejmě nemocnými a v krátké době po injekci zhynula.

Pokusy se serem koňským.

Zmínil jsem se nahoře, že pokus immunisační byl prováděn současně se serem hovězím i koňským.

I u tohoto antigenu měla immunisace a vzestup titru praecipitačního podobný pruběh, jenom že tu podařilo se docíliti pouze dvou etap immunisačních, po nichž zvíře za zjevů anafylatických zhynulo.

Králík černobílý č. 6.

Váha 3100 *g*.

Čtyři intravenosní injekce v množství:

2 *ccm*, 3 *ccm*, 4 *ccm*, 4 *ccm*, dne 19. II., 24. II., 1. III., a 7. III.

Zkouška krevní dne 12. III.

Výsledek její zanesen v tabulce XIII.

Tabulka XIII. Serum ze dne 12. III.

Zředění sera koňského:	Výsledek reakce:
1 : 100	Zákal okamžitě.
1 : 500	Zákal za ½ minuty.
1 : 1000	Za ½ minuty.
1 : 5000	Za 3 minuty.
1 : 10.000	Za 7 minut.
1 : 20.000	Negativní.

Vzhledem na nebezpečí anafylaxie applikovány další 2 injekce *subkutánně* a *intraperitonealně* v množství 2,5 a 3 *ccm* dne 14. III. a 22. III., jichž účinkem stoupl titr okamžité reakce praecipitinové až na zředění sera koňského 1 : 1000. Za to rozsah reakce zůstal ohraničen zředěním 1 : 10.000.

Nastavšími komplikacemi v podobě nekrosy ohraničené na místo vpichu ve stěně břišní, k níž se připojil později rozsáhlý proces hnisavý, působený dvěma varietami micrococcus pyogenes (aureus i albus) a b. pyocyaneem, přerušeny byly pokusy a zvíře přiměřeně ošetřené ponecháno po dobu 6 měsíců v klidu, to jest tak dlouho, až veškeré příznaky chorobné — čítaje v to i zatvrdliny inguinalních uzlin — vymizely.

Po této době odejmuta dne 4. X. zkoužka krevní a vykonána reakce praecipitinová. Měla přirozeně výsledek negativní.

Přikročeno tedy k *reimmunisaci.*

Injekce dne 7. X. Vstříknuto intravenosně 3 *ccm* sera koňského. Zkouška krevní odejmuta dne 14. X.

Při této opět zjištěn zajímavý fakt mohutného tvoření se praecipitinu tím zajímavější, čím delší doba uplynula od předcházejícího stavu nepříliš vysoké immunity, a čím větší převraty za dobu latence tělo zvířete prodělalo (rozsáhlé hnisavé processy.)

Tabulka XIV. Serum ze dne 14. X.

Zředění sera koňského:	Výsledek reakce:
1 : 100	Okamžitá reakce. V krátké době stává se velmi mohutnou. Sediment hrubých vločků.
1 : 500	
1 : 1000	
1 : 5000	Zákal za ½ minuty.
1 : 10.000	Zákal za 1 min.
1 : 20.000	Zákal za 2 min.
1 : 40.000	Zákal za 20 min.
1 : 80.000	Negativní.

I toto serum získáno venepunkcí ve větším množství a uchováno ve fiolkách zatavené, dlouho působivé.

Nyní vyčkávali jsme opět vymizení reakce praecipitinové, což nastalo přibližně po uplynutí jednoho měsíce, tak že dne 18. XII, mohli jsme přistoupiti k nové reimmunisaci.

Toho dne vstříknuta poloviční dávka než při reimmunisaci předcházející, totiž 1,5 *ccm* sera koňského intravenosně, avšak zvíře v krátké době po injekci zhynulo.

Uvědomíme-li si v krátkosti význačná pozorování, která při pokusech předchozích byla učiněna, přicházíme k následujícím výsledkům:

Nejzajímavější jeví se pozorování, že při reimmunisaci může se dostaviti mohutná tvorba praecipitinů i po dávce nepatrné, a že při reimmunisaci menší dávka sera může přivoditi mohutnější tvorbu praecipitinů, než větší dávka sera k první immunisaci použitá.

Pozorování posléze uvedené budící dojem, jako by tvoření se praecipitinu postupovalo neodvisle od velikosti dávky sera k reimmunisaci použité, nedá se upraviti v obyčejný rámec zkušeností biologických, ve smyslu kterých bychom očekávali, že menší dávka sera při reimmunisaci použitá nepovede ku větší tvorbě praecipitinové, nýbrž naopak ku menší. (Rovněž se uvedený výsledek nedá uvésti v analogii s nějakým jiným známým pochodem biologickým.)

Poněvadž však na úchylky od obyčejných zkušeností biologických dlužno teprve v druhé řadě pomýšleti, jsme vedeni tedy k závěru, že účinek závislý na velikosti dávky mohl by býti zakryt vlivem nějakého nově přistouplého faktora.

Za takových okolností stává se blízkým závěr hledati tento nově přistouplý faktor v oněch změnách následkem immunisace nastalých, které dle Pirqueta allergií se označují.

Po stránce praktické staví pozorování vytknutá do popředí možnost užíti reimmunisace — vsunutím potřebných mezer časových mezi zákroky immunisační za sebou následující – ku získání ser s vysokým titrem praecipitačním.

Lze tak usuzovati z té příčiny, že jednak — jak z pozorování svrchu vytknutých vyplývá — je možno dosíci i pomocí poměrně malých dávek sera vysokých titrů praecipitačních, jednak z té okolnosti, která zejména novějšími zkušenostmi při vstřikování tuberkulinu byla zjištěna že náležitým odstupňováním dávek lze úspěšně čeliti jevům anafylaktickým.

Byly to právě jevy anafylaktické, které vedly Uhlenhutha a Weidanze k té formě methody na získání ser s vysokým titrem praecipitačním, jak těmito autory bylo navrženo.

Že v případě, o který se jedná, by náležitému odstupňování dávek příslušela tím větší důležitost, vyplývá zejména z toho pozorování v předchozích pokusech učiněného, že totiž zvířata nápadnou reaktivností na vstříknutí reagující podléhala nápadně brzo anafylaxii.

Jest ovšem věcí dalších pokusů, zda k účelu zjednání ser s vysokým titrem praecipitačním cesta právě naznačená, t. j. menší dávky serové a reimmunisace se vsunutím potřebných mezer časových jest způsobilá, aby se dospělo k výsledkům prakticky upotřebitelným.

Další zajímavé pozorování týká se sestupu titru praecipitačního, kterýžto sestup na křivce k pojednání připojené jasně jest znázorněn. Lze viděti v tomto grafickém znázornění, že v pokusu dotyčném byl sestup titru immunisačního po immunisaci prudký, po reimmunisaci nenáhlý.

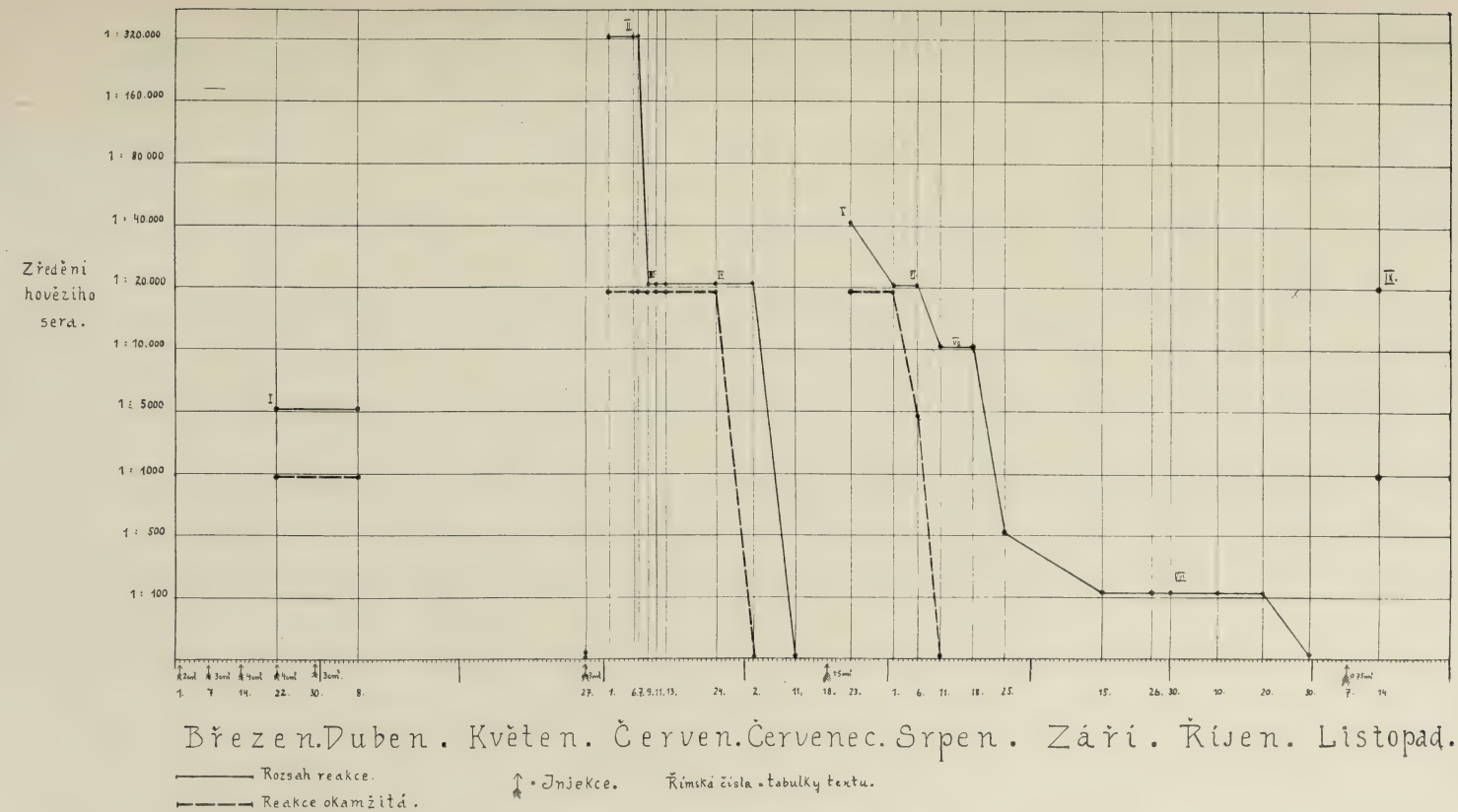
Tento různý sestup titru praecipitačního mluví opět pro to, že se jedná o reakci za změněných poměrů biologických. Závěr, že také v tomto případě se jedná o jevy stojící v souvislosti s allergií Pirquetovou, jest opět velmi blízký.

Jestliže výklad, že jisté zvláštní svrchu vytknuté jevy v pokusech námi vykonaných se uplatňující spadají v rámec allergie Pirquetovy, jest správný — jinaký pravděpodobný výklad za daných poměrů jest sotva možný — pak by se tu jednalo o nové, dosud neznámé projevy allergie.

Vedle těchto hlavních pozorování jeví se účelným poukázati konečně k několika vedlejším.

Sem spadá jednak, že latentní stav immunity praecipitinové není zmařen rozsáhlými processy infekčními (hnisavými), jednak že značná ztráta krevní nemá vlivu na praecipitační aktivitu sera a konečně, že dobrou pomůckou immunisační techniky jest kontrola váhy zvířete a pozorování lokální reakce při subkutánní applikaci.

Jest mi milou povinností vzdáti dík prof. M. U. Dr. Gustavu Kabrhelovi, přednostovi c. k. hygienického ústavu, za thema k této práci a mnohé rady, jež mi laskavě v průběhu jejím udílel.


Zředění hověziho séra.
1 : 320.000
1 : 160.000
1 : 80.000
1 : 40.000
1 : 20.000
1 : 10.000
1 : 5000
1 : 1000
1 : 500
1 : 100
I
II
III
IV
V
VI
VII
IX
2cm³
3cm³
4cm³
4cm³
4cm³
3cm³
1cm³
15cm³
0·35cm³
1. 7. 14. 22. 30. 8.
27. 1. 6. 7. 9. 11. 13. 24. 2. 11. 18. 23. 1. 6. 11. 18. 25. 15. 26. 30. 10. 20. 30. 7. 14.
Březen. Duben. Květen. Červen. Červenec. Srpen. Září. Říjen. Listopad.
Rozsah reakce.
Reakce okamžitá.
Injekce.
Římská čísla = tabulky textu.

Výpočet radiantu roje meteoritů z elementů dráhy komety a důkaz souvislosti Aquarid a Orionid s kometou Halleyovou.

Podává

Dr. Jindřich Svoboda.

(Se 4 obr. v textu.)

Předloženo 17. ledna 1914.

ÚVOD.

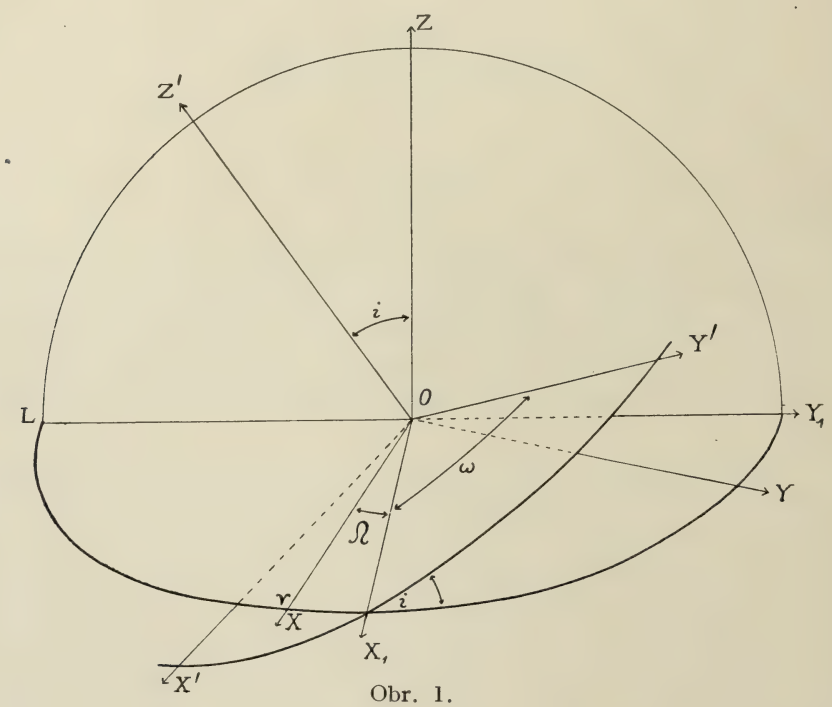
V dosavadních methodách k důkazu souvislosti roje meteorického s kometou postupovalo se tím způsobem, že počítaly se elementy dráhy jednotlivých meteoritů na základě pozorování a výsledky se porovnávaly s elementy komet. Methody tyto osvědčují se však jen v těch případech, kdy dráha komety protíná dráhu zemskou, nebo se jí přibližuje nedaleko od uzlu.

V methodě dole uvedené postupuje se způsobem zcela odlišným. Vychází se z elementů známé komety a hledá se směr jejího pohybu vzhledem k Zemi v místech, kde je dráha komety dráze zemské nejbližší. Představíme-li si totiž, že meteority tvoří souvislý proud obklopující dráhu komety po celé její délce, můžeme předpokládati, že směr meteoritů v kolmém řezu ku dráze komety bude se směrem komety přibližně stejný. Zvolíme-li tedy na dráze zemské v místech, kde je dráze komety nejblíže, řadu bodů — na př. posice Země v intervallech dvou dnů — a vedeme-li těmito body normálné roviny ku dráze komety, můžeme vzíti za směr meteoritů, které Zemi v těch místech potkávají, směry komety v bodech, ve kterých protínají příslušné normálné roviny dráhu komety. Směry opačně vzaté dávají nám souřadnice radiantu skutečného. Znajíce skutečnou rychlost meteoritů, kterou počítáme pro těleso pohy-

bující se ve dráze komety ve vzdálenosti Země, a rychlost Země, odvodíme lehce souřadnice radiantu zdánlivého. Najdeme-li v tabulkách rojů meteorických pro dobu, kdy je dráha komety Zemi nejblíže, roj, jehož radiant má souřadnice s vypočtenými přibližně stejné, můžeme s největší pravděpodobností souditi na souvislost tohoto roje s uvažovanou kometou. Předností této methody jest, že lze najednou užíti všech výsledků pozorování za dlouhou dobu vykonaných (souřadnice radiantu zdánlivého) a že lze odvoditi souvislost komety s rojem meteorickým i v případě, kdy dráha komety jest nejblíže dráze Země ve větší vzdálenosti od uzlu.

* * *

Základní systém souřadný $O\,X\,Y\,Z$ (Obr. 1.) volíme tak, že rovina $O\,X\,Y$ splývá s rovinou ekliptiky, osa $O\,X$ směřuje k bodu jarnímu a osa $O\,Y$ k 90^0 délky. Druhý systém souřadný $O\,X'\,Y'\,Z'$ má rovinu $OX'Y'$ v rovině dráhy komety, a osa $O\,Y'$ směřuje k perihelu. Konečně volíme ještě v rovině ekliptiky pomocný systém osový $OX_1\,Y_1\,(Z)$, jehož osa $O\,X$



Obr. 1.

směřuje k uzlu výstupnému. Střed Slunce leží ve společném počátku těchto systémů. Rovina $O\,Z\,Z'$, v níž leží také osa $O\,Y_1$ protíná rovinu $O\,X\,Y$ v přímce $O\,L$, která jest tedy zpětným prodloužením osy $O\,Y_1$.

Je-li $\odot$ geocentrická délka Slunce, jest heliocentrická délka Země $180 + \odot$; r budiž příslušný radius vektor. Pak souřadnice Země v systému $O\,X\,Y\,Z$ jsou

$$\begin{aligned} x &= -r\cos\odot \\ y &= -r\sin\odot \end{aligned} \qquad (1)$$

Souřadnice Země v systému $O\,X_1\,Y_1$ jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad x\cos\Omega + y\sin\Omega \\ y_1 &= -x\sin\Omega + y\cos\Omega, \end{aligned} \qquad (2)$$

kdež Ω jest délka uzlu výstupného komety. Z těchto souřadnic snadno odvodíme souřadnice Země v systému $O\,X'\,Y'\,Z'$:

$$\begin{aligned} x' &= x_1\sin\omega - y_1\cos\omega\cos i \\ y' &= x_1\cos\omega + y_1\sin\omega\cos i \\ z' &= \quad -y_1\sin i, \end{aligned} \qquad (3)$$

kde značí ω vzdálenost perihelu komety od uzlu výstupného a i sklon dráhy komety k ekliptice.

Bod na dráze zemské kometě nejbližší obdržíme takto. Nejprve geometrickou konstrukcí najdeme jeho přibližnou polohu. Kolem této přibližné polohy zvolíme si řadu bodů, nejlépe posice Země v intervallech dvou dnů, a počítáme pro každý bod nejkratší vzdálenost od dráhy komety.

Buďtež v systému souřadnému $O\,X'\,Y'\,Z'$ souřadnice bodu na dráze komety x'_0, y'_0, pak čtverec vzdálenosti od bodu x', y', z' na dráze zemské jest

$$l^2 = (x_0' - x')^2 + (y_0' - y')^2 + z'^2 \qquad (4)$$

Pro minimum (resp. maximum) obdržíme

$$x_0' - x' + (y_0' - y')\frac{dy_0'}{dx_0'} = 0 \qquad (5)$$

s podmínkou, že souřadnice x_0', y_0' hoví rovnici dráhy komety

a) ellipsy

$$\frac{(y_0' + \varepsilon)^2}{a^2} + \frac{x_0'^2}{b^2} = 1 \quad (6),$$

kde a jest velká, b malá poloosa, a ε lineární excentricita dráhy.

b) paraboly

$$x_0'^2 = -2p\,y_0' + p^2 \quad (6'),$$

kde p jest parametr dráhy.

Z rovnic (5) a (6) resp. (5′) a (6′) obdržíme pro minimum (resp. maximum) podmínku

$$x_0'^4 + A x_0'^3 + B x_0'^2 + C x_0' + D = 0 \quad (7),$$

kde

$$A = \frac{2\,b^2\,x'}{\varepsilon^2}$$

$$B = \frac{b^4\,x'^2 + a^2\,b^2\,\eta'^2 - b^2\,\varepsilon^4}{\varepsilon^4}$$

$$C = -\frac{2\,b^4\,x'}{\varepsilon^2} = -A\,b^2$$

$$D = -\frac{b^6\,x'^2}{\varepsilon^4}$$

$$\eta' = y' + \varepsilon$$

Rovnice (7) dává čtyři hodnoty x_0', z nichž jen dvě hoví podmínce minima

$$a\,b^3\,\eta'\sqrt{b^2 - x_0'} - \varepsilon^2\,(b^2 - x_0'^2)^2 > 0 \quad (8),$$

kterou obdržíme z druhé derivace (4) a z rovnice (6). Znaménko odmocniny v (8) volíme totéž, jaké má η', neboť první člen musí být kladný. Tím již jest dáno také znaménko odmocniny v rovnici (9) pro výpočet příslušných y_0':

$$y_0' = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x_0'^2} - \varepsilon \quad (9)$$

$$x_0'^3 + A\,x_0' + B = 0 \quad (7'),$$

kde

$$A = p^2 + 2\,py'$$

$$B = -2\,p^2 x'$$

Rovnice (7') dává tři hodnoty x_0', z nichž jen dvě hoví podmínce minima

$$3\,x_0'^2 + A > 0 \quad (8'),$$

kterou obdržíme z druhé derivace (4) a z rovnice (6'). K těmto dvěma hodnotám obdržíme příslušné y_0' z rovnice

$$y_0' = \frac{p^2 - x_0'^2}{2\,p} \quad (9').$$

Z dvojic x_0', y_0' vezmeme tu, pro kterou jest výraz

$$(x_0' - x')^2 + (y_0' - y_0')^2$$

menší.

Ve skutečnosti provádí se toto zdánlivě obtížné hledání x_0' a y_0' tak, že kořeny rovnice (7) resp. (7') najdou se přibližně graficky a počítá se pak jen ta hodnota x_0', která se hodnotě x' nejvíce blíží. Tímtéž způsobem řídíme se při vypočítávání příslušné hodnoty y_0', takže k výrazům (8) a (8') hleděti nepotřebujeme.

Když jsme byli zároveň provedli výpočet dvojic x_0', y_0' příslušných ku souřadnicím Země x', y' v časech $t_1, t_2, t_3 \ldots$., obdržíme dosazením do výrazu (4) nejkratší vzdálenosti $l_1, l_2, l_3 \ldots$. Snadno pak určíme, pro které t jest hodnota l nejmenší. Za základ dalšího výpočtu mohou se položiti příslušné ku t hodnoty x', y' a x_0', y_0', které se snadno interpolací obdrží. Poněvadž však radiant bývá činný po několik dnů, jest lépe

prováděti parallelně výpočet dále, při čemž se ovšem omezíme na časy hodnotě t nejbližší.

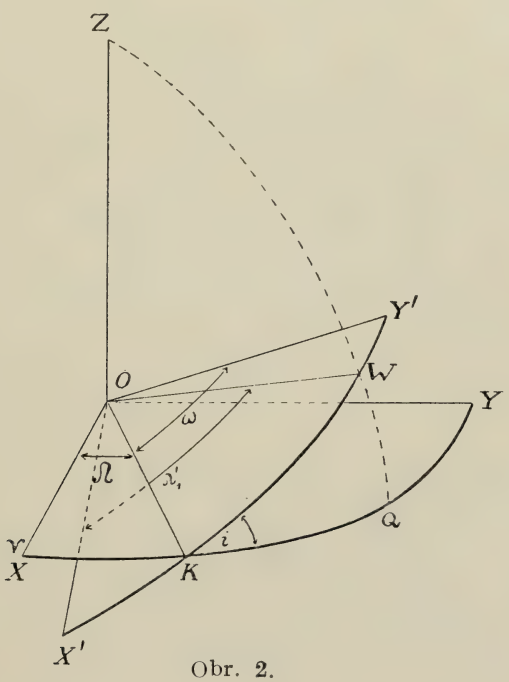
Tímto způsobem obdrželi jsme řadu bodů na dráze komety x_0', y_0', které leží v normálných rovinách vedených ku dráze komety z bodů dráhy zemské x', y'. Z důvodu, na který v úvodu bylo poukázáno, možno vzíti za směr meteoritů, které potkávají Zemi v posici x', y', směr komety v bodě x_0', y_0', t. j. směr tangenty ku dráze komety v tom bodě

Směrové cos. této tangenty jsou

$$\lambda = -\frac{b^2 (y_0' + \varepsilon)}{a \sqrt{b^4 + \varepsilon^2 x_0'^2}}, \qquad \lambda = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + x_0'^2}},$$

$$\mu = \frac{a x_0'}{\sqrt{b^4 + \varepsilon^2 x_0'^2}} \qquad \mu = \frac{x_0'}{\sqrt{p^2 + x_0'^2}}$$

$$\nu = 0. \qquad \nu = 0$$



Obr. 2.

Nazveme-li σ úhel, který svírá směr meteoritů s osou $O X'$, pak jest

$$\cos \sigma = \lambda \text{ a } \sin \sigma = \mu;$$

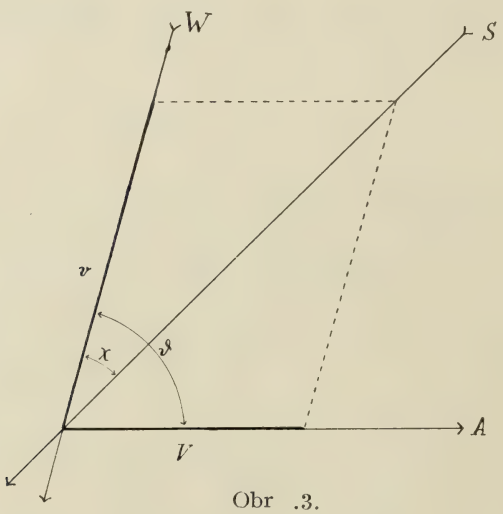
jsou tedy souřadnice pravého radiantu W (obr. 2.) v systému $O X' Y' Z'$

$$\lambda_1' = 180^0 + \sigma, \beta_1' = 0.$$

Ekliptikální souřadnice λ_1, β_1 pravého radiantu v systému $O\,X\,Y\,Z$ obdržíme z trojúhelníka $K\,Q\,W$, kdež $K\,W = \lambda_1 + \omega - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + (\sigma + \omega)$, $K\,Q = \lambda_1 - \Omega$ a $Q\,W = \beta_1$:

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega) &= \cos(\sigma + \omega)\cos i \\ \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Omega) &= -\sin(\sigma + \omega) \\ \sin\beta_1 &= \cos(\sigma + \omega)\sin i \end{aligned}$$

Vlivem pohybu zemského vidí pozorovatel na Zemi přicházeti meteority jiným směrem, který jest dán souřadnicemi t. zv. radiantu zdánlivého.



Obr .3.

Úchylku od pravého směru (obr. 3.) nazveme χ a výplněk úhlu, který svírá pravý směr se směrem pohybu Země, označíme ϑ. Prodloužený směr pohybu zemského protne sféru v apexu A (obr. 4.) a opačně vzaté směry, pravý a zdánlivý, v radiantu pravém W a zdánlivém S. Poněvadž všecky tři směry vedeny z jednoho bodu leží v jedné rovině, leží body A, S, W na největším kruhu, který svírá s ekliptikou úhel ψ.

Pokládáme-li dráhu Země za kruhovou, odvodíme snadno, že délka apexu $L = 270^0 + \odot$. Při přesnějším výpočtu nutno užíti vzorce pro elliptickou dráhu Země (Bauschinger: Die Bahnbestimmung, *p. 584*).

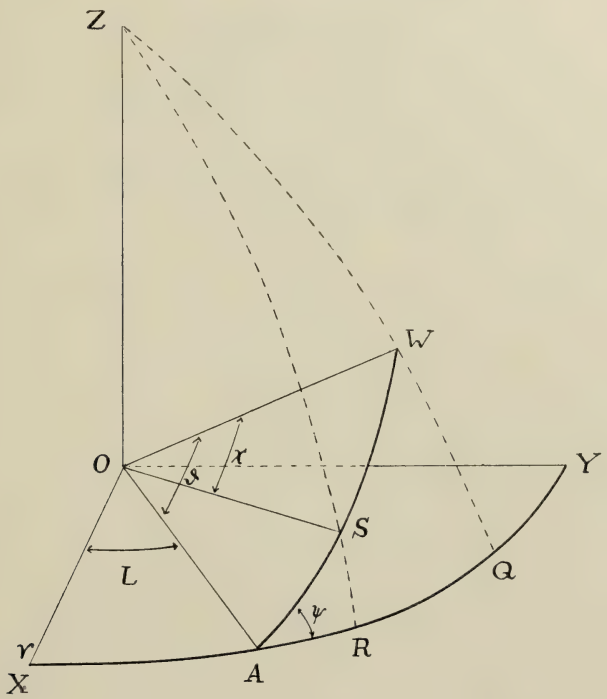
$$L = 270^0 + \odot + \frac{e}{\sin 1'} \sin(\odot - \tilde{\omega}),$$

kdež e jest výstřednost dráhy zemské a $\tilde{\omega}$ délka perihelu Země.

Z trojúhelníka $A\,Q\,W$ (obr. 4.), kde $A\,W = \vartheta$, $A\,Q = \lambda_1 - L$ a $Q\,W = \beta_1$, obdržíme

$$\begin{aligned} \sin\vartheta \sin\psi &= \sin\beta_1 \\ \sin\vartheta \cos\psi &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L) \\ \cos\vartheta &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L). \end{aligned}$$

Volíme-li ϑ v mezích 0^0 až 180^0, můžeme pokládati sin ϑ vždy za kladný; úhel ψ probíhá pak ovšem v mezích 0^0 až 360^0.



Obr. 4.

Z obr. 3. obdržíme ještě potřebný úhel χ

$$tg\,\chi = \frac{\sin\vartheta}{\frac{v}{V} + \cos\vartheta},$$

kdež v jest skutečná rychlost meteoritů a V rychlost Země v bodě x', y'.

Pro poměr jejich obdržíme

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}{\frac{2}{r} - 1}} \qquad \frac{v}{V} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r}}{\frac{2}{r} - 1}}$$

Ekliptikální souřadnice radiantu zdánlivého λ, β obdržíme řešením trojúhelníku $A\,R\,S$ (obr. 4.), kdež $A\,S = \vartheta - \chi$, $A\,R = \lambda - L$ a $R\,S = \beta$:

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin(\lambda - L) &= \sin(\vartheta - \chi)\cos\psi \\ \cos\beta \cos(\lambda - L) &= \cos(\vartheta - \chi) \\ \sin\beta &= \sin(\vartheta - \chi)\sin\psi. \end{aligned}$$

Poněvadž souřadnice radiantů jsou udávány v souřadnicích aequatoreálních, převedeme známým způsobem vypočtené souřadnice ekliptikální na aequatoreální.

Schema výpočtu.

Z geometrické konstrukce dráhy Země a komety obdrží se pro nejmenší vzdálenost dráhy Země a komety přibližně čas t.

Další výpočet provádíme parallelně pro časy t_1, t_2, t_3 . . . ., které volíme tak, aby čas t padl asi doprostřed.

Délka Slunce $\odot$ =
Radius vektor r =

$$\begin{aligned} x &= -r\cos\odot \\ y &= -r\sin\odot . \end{aligned}$$

Délka uzlu výstupného Ω =
Vzdálenost perihelu od uzlu ω =
Sklon dráhy k ekliptice i =

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\Omega + y\sin\Omega \\ y_1 &= -x\sin\Omega + y\cos\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x_1\sin\omega - y_1\cos\omega\cos i \\ y' &= x_1\cos\omega + y_1\sin\omega\cos i \\ z' &= -y_1\sin i \end{aligned}$$

a) ellipsa:

Velká poloosa a =
Malá poloosa b =
Výstřednost lin. $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$

$$\eta' = y' + \varepsilon$$

$$A = \frac{2\,b^2\,x'}{\varepsilon^2}$$

$$B = \frac{b^4 x'^2 - b^2\varepsilon^4 + a^2 b^2 \eta'^2}{\varepsilon^4}$$

$$C = -\frac{2\,b^4\,x'}{\varepsilon^2} = -A\,b^2$$

$$D = -\frac{b^6 x'^2}{\varepsilon^4}$$

b) parabola

Vzdálenost perihelu q =
Parameter $p = 2\,q$

$$A = p^2 + 2\,p\,y'$$
$$B = -2\,p^2\,x'$$

$$x_0'^4 + A\,x_0'^3 + Bx_0'^2 + Cx_0' + D = \emptyset$$
$$a\,b^3\,\eta'\sqrt{b^2 - x_0'^2} - \varepsilon^2\,(b^2 - x_0'^2) > \emptyset$$
$$y_0' = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x_0'^2} - \varepsilon$$

$$x_0'^3 + A\,x_0' + B = \emptyset$$
$$3\,x_0'^2 + A > \emptyset$$
$$y_0' = \frac{p^2 - x_0'^2}{2\,p}$$

$$l^2 = (x_0' - x')^2 + (y_0' - y')^2 + z'^2$$

Pro časy t_1, t_2, t_3 .... obdržíme l_1, l_2, l_3, ... V dalším výpočtu ponecháme jen časy nejbližší času minimálního l.

$$\lambda = -\frac{b^2\,(y_0' + \varepsilon)}{a\sqrt{b^4 + \varepsilon^2\,x_0'^2}}, \quad \mu = \frac{a\,x_0'}{\sqrt{b^4 + \varepsilon^2\,x_0'^2}},$$
$$\nu = \emptyset$$

$$\lambda = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + x_0'^2}}, \quad \mu = \frac{x_0'}{\sqrt{p^2 + x_0'^2}},$$
$$\nu = \emptyset$$

$$\cos\sigma = \lambda$$
$$\sin\sigma = \mu$$
$$\lambda_1' = 180^0 + \sigma, \quad \beta_1' = \emptyset.$$

$$\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega) = \cos(\sigma + \omega)\cos i$$
$$\cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Omega) = -\sin(\sigma + \omega)$$
$$\sin\beta_1 = \cos(\sigma + \omega)\sin i.$$

$$L = 270^0 + \odot + \frac{e}{\sin 1'}\sin(\odot - \tilde{\omega})$$

$$\frac{e}{\sin 1'} = 57\cdot 6' \quad \tilde{\omega} = 101^0\,13'\cdot 2 + 1'\cdot 028\ (t - 1900)$$

$$\sin\vartheta\sin\psi = \sin\beta_1$$
$$\sin\vartheta\cos\psi = \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L)$$
$$\cos\vartheta = \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L)$$

ϑ v mezích 0^0 — 180^0

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}{\frac{2}{r} - 1}} \qquad \frac{v}{V} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r}}{\frac{2}{r} - 1}} = \sqrt{\frac{2}{2 - r}}$$

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\vartheta}{\frac{v}{V} + \cos\vartheta}$$

$$\begin{aligned}
\cos\beta \sin(\lambda - L) &= \sin(\vartheta - \chi)\cos\psi \\
\cos\beta \cos(\lambda - L) &= \cos(\vartheta - \chi) \\
\sin\beta &= \sin(\vartheta - \chi)\sin\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin m \sin M &= \sin\beta \\
\sin m \cos M &= \cos\beta \sin\lambda \\
\cos m &= \cos\beta \cos\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\delta \sin\alpha &= \sin m \cos(M + e) \\
\cos\delta \cos\alpha &= \cos m \\
\sin\delta &= \sin m \sin(M + e)
\end{aligned}$$

* * *

Výpočet radiantu roje meteorického souvisícího s kometou Halleyovou.

Elementy dráhy komety Halleyovy (A. N. 4406. a Annuaire Astronomique 1913. p. 161.)

$$\left.\begin{aligned}
\omega &= 111^0\,42' \\
\Omega &= 57^0\,16 \\
i &= 162^0\,13
\end{aligned}\right\} \; 1910{\cdot}0$$

$$\begin{aligned}
q &= 0{\cdot}5872 \\
a &= 17{\cdot}9456 \\
\varepsilon &= 17{\cdot}3587
\end{aligned}$$

Konstrukcí dráhy komety bylo nalezeno, že dráha komety je nejblíže dráze zemské kolem 4. května a 18. října.

Výpočet radiantu květnového.

Z Berl. Jahrb. 1910.

Květen	1.	3.	5.	7.	9.
$\odot$ =	$40^0\,11'$	$42^0\,8'$	$44^0\,4'$	$46^0\,0'$	$47^0\,56'$
$\log r$ =	0·00339	0·00361	0·00382	0·00403	0·00424
$\log x$ =	$9_n{\cdot}88647$	$9_n{\cdot}87377$	$9_n{\cdot}86027$	$9_n{\cdot}84580$	$9_n{\cdot}83031$
$\log y$ =	$9_n{\cdot}81311$	$9_n{\cdot}83023$	$9_n{\cdot}84611$	$9_n{\cdot}86096$	$9_n{\cdot}87486$
x_1 =	−0·96337	−0·97336	−0·98219	−0·98987	−0·99645
y_1 =	+0·29607	+0·26326	+0·23039	+0·19721	+0·16377
x' =	−0·99934	−0·99707	−0·99372	−0·98916	−0·98351
y' =	+0·09426	+0·12697	+0·15932	+0·19153	+0·22354
z' =	−0·09043	−0·08040	−0·07037	−0·06023	−0·05002

Květen	1.	3.	5.	7.	9.
A =	—0·1374	—0·1371	—0·1367	—0·1360	—0·1353
B =	+1·6685	+1·7522	+1·8348	+1·9185	+2·0011
C =	+2·8474	+2·8409	+2·8314	+2·8184	+2·8023
D =	—0·0978	—0·0974	—0·0967	—0·0958	—0·0948
x_0' =	—1·0273	—1·0095	—0·9916	—0·9730	—0·9545
y_0' =	0·123	0·139	0·156	0·172	0·188
l^2 =	0·0255	0·00677	0·00497	0·00470	0·00464

Interpolací obdržíme pro 11. květen $l^2 = 0{\cdot}0609$

l =	0·16	0·083	0·070	0·068	0·068

a pro 11. květen 0·78

Země je nejblíže dráze komety mezi 5. a 9. květnem. Dle „Companion to the observatory" jest mezi 1. a 6. květnem činný radiant v souhvězdí Vodnáře: *Aquaridy* ($AR = 338^0$, $\delta = -2^0$). Vypočítáme tedy souřadnice radiantu pro 5. a 7. květen.

Květen	5.	7.
$\log \lambda$ =	$9_n{\cdot}87548$	9_n87919
$\log \mu$ =	$9_n{\cdot}81995$	$9_n{\cdot}81504$
σ =	$221^0\,21'$	$220^0\,47'$
Souřadnice radiantu pravého		
λ_1 =	$355^0\,22'$	$355^0\,57'$
β_1 =	$15^0\,48'$	$15^0\,43'$
Souřadnice apexu		
L =	$313^0\,17'$	$315^0\,13'$
Z toho vypočítáme		
ϑ =	$44^0\,26'$	$43^0\,10'$
ψ =	$22^0\,53'$	$23^0\,20'$
Pro poměr rychlosti obdržíme		
$\frac{v}{V}$ =	1·4004	1·4007

Úchylka zdánlivého směru od pravého

χ =	$18^0\,19'$	$17^0\,48'$

Souřadnice ekliptikální zdánlivého radiantu jsou

λ =	$337^0\,35'$	$338^0\,45'$
β =	$9^0\,51'$	$9^0\,46'$,

z nichž obdržíme *aequatoreální souřadnice zdánlivého radiantu*

α =	$335^0\,37'$	$336^0\,43'$
δ =	$0^0\,26'$	$0^0\,47'$

Porovnáme-li naše výsledky se souřadnicemi *Aquarid* ($\alpha = 338, \delta - 2^0$), vidíme, že souhlas jest až nápadný, takže *souvislost Aquarid s kometou Halleyovou* můžeme pokládati za *více* než pravděpodobnou.

Na možnost souvislosti roje meteorického s kometou Halleyovou, zdá se, první upozornil O. C. Wendel, který však málo šťastně vypočetl radiant meteoritů pro 12. květen (1910) (Popular Astronomy 16. p. 518.) a později ještě nešťastněji pro 18. květen (1910) (Popular Astronomy 18. p. 518.). Domněnku o souvislosti Aquarid s kometou Halleyovou vyslovil asi první Denning, který v r. 1910 upozorňoval na tento roj meteoritů a vyzýval k pečlivému pozorování ve dnech 1. — 6. května 1910 (Nature 80. a 83. p. 320.). Z pozorování vykonaných 4., 5., 11. a 13. května 1910 odvodil Ch. P. Olivier (Publ. Astronomical Society of the Pacific, 22., 141.: „The Aquarid Meteors") *) parabolické elementy Aquarid a ukázal na úzkou souvislost tohoto roje s Halleyovou kometou. Rovněž v pozdější své práci „175 parabolic orbits and other results deduced from over 6200 meteors",) *) vydané v „Transactions of the American Philosophical Society", probírá vedle jiného též otázku souvislosti Aquarid s kometou Halleyovou. Konečně sem patří též práce (z r. 1912) C. Hoffmeistera: „Über den Zusammenhang der Mai-Aquariden mit dem Halleyschen Kometen" (Astron. Nachrichten, 191. p. 251.), který z radiantu Aquarid ($\alpha = 337^0{\cdot}5$, $\delta - 3^0$; maximum 6. května), odvozeného z pozorování spolupracovníků Bureau Central Météorique, vykonaných v r. 1910 a 1911, vypočítává elementy dráhy tohoto roje a na základě podobnosti jejich s elementy dráhy komety Halleyovy ukazuje na velmi pravděpodobnou souvislost Aquarid s kometou.

Výpočet radiantu říjnového.

Říjen	17.	19.	21.	23.
$\odot$ =	$203^0\,12'$	$205^0\,11'$	$207^0\,10'$	$209^0\,10'$
$\log r$ =	9·99838	9·99813	9·99789	9·99766
$\log x$ =	9·96176	9·95476	9·94712	9·93878
$\log y$ =	9·59381	9·62705	9·65741	9·68550
x_1 =	+0·82530	+0·84365	+0·86096	+0·87739
y_1 =	—0·55808	—0·52888	—0·49908	—0·46849
x' =	+0·96331	+0·97007	+0·97566	+0·98016
y' =	+0·18862	+0·15600	+0·12323	+0·09009
z' =	+0·17045	+0·16153	+0·15243	+0·14309

*) O obsahu prací Olivierových bylo mi možno dosud informovati se jen v „Astr. Jahresbericht."

Říjen	17.	19.	21.	23.
$A =$	0·1325	0·1334	0·1342	0·1348
$B =$	1·9108	1·8293	1·7434	1·6575
$C =$	—2·7447	—2·7640	—2·7799	—2·7927
$D =$	—0·0909	—0·0922	—0·0932	—0·0941
$x_0' =$	+0·9595	+0·9792	+0·9991	+1·0186
$y_0' =$	+0·183	+0·166	+0·149	+0·131
$l^2 =$	0·02913	0·02626	0·02445	0·02362
$l =$	0·1707	0·1620	0·1564	0·1537

a interpolací pro 25. říjen $l = 0.1545$.

Země je tedy nejblíže dráze komety asi 24. října. V době mezi 18. a 30. říjnem jsou činny následující radianty: 18. — 20. říjen *Orionidy* (α 92°, δ + 15°), 23. říjen (α 100°, δ + 13°) a 29. říjen (α 109°, δ + 23°).*)

Vypočítáme souřadnice radiantu pro 19., 21. a 23. říjen. (Souřadnice radiantu pro 29. říjen vypočítáme pak interpolací).

Říjen	19.	21.	23.
$\log \lambda =$	9_n·87786	9_n·87397	9_n·87003
$\log \mu =$	9·81670	9·82198	9·82677
$\sigma =$	139°1′	138° 25′	137° 51′
Souřadnice pravého radiantu			
$\lambda_1 =$	75° 42′	76° 16′	76° 49′
$\beta_1 =$	—5° 47′	—5° 58′	—6° 8′
Souřadnice apexu			
$L =$	116° 6′	118° 5′	120° 5′
Z toho vypočítáme			
$\vartheta =$	40° 45′	42° 10′	43° 37′
$\psi =$	171°7′	171° 6′	171° 6′
Pro poměr rychlostí obdržíme			
$\frac{v}{V} =$	1·3915	1·3911	1·3908
Úchylka zdánlivého směru od pravého			
$\chi =$	16° 54′	17° 28′	18° 4′
Ekliptikální souřadnice zdánlivého radiantu jsou			
$\lambda =$	92° 30′	93° 39′	94° 48′
$\beta =$	—3° 35′	—3° 42′	—3° 50′,

z nichž *obdržíme aequatoreální souřadnice zdánlivého radiantu*

$\alpha =$	*92° 39′*	*93° 52′*	*95° 5′*
$\delta =$	*19° 51′*	*19′ 41′*	*19° 33′*.

*) Companion to the observatory 1911. p. 6.

Vypočtené souřadnice radiantu pro 19. říjen blíží se až nápadně souřadnicím Orionid (Říjen 18. — 20. $\alpha = 92^0$, $\delta = +15^0$) *), takže *o souvislosti tohoto roje meteorického s kometou Halleyovou nelze pochybovati* — Velmi dobře souhlasí vypočtené souřadnice také se souřadnicemi radiantu Orionid odvozenými z pozorování konaných v r. 1909 v Kasanu (Rusko) [$\alpha = 88^0 \pm 2{\cdot}9^0$ (stř. ch.), $\delta = +21^0 \pm 1{\cdot}7^0$ (stř. ch.)]**) —. Zdá se, že také radianty z 23. a 29. října pocházejí od meteoritů komety Halleyovy, neboť interpolací obdržíme pro 29. říjen $\alpha = 98.7^0$, $\delta = 19.3^0$.

Při prohlížení příslušné literatury nenalezl jsem nikde zmínky o souvislosti Orionid s kometou Halleyovou, takže myslím, že v mé práci jest to poprvé dokázáno. Příčinou toho, že tato souvislost nebyla dříve konstatována, jest pravděpodobně značná vzdálenost místa, kde meteory Zemi potkávají, od uzlu (30°), což, jak v úvodu již bylo podotknuto, není při této methodě na závadu.

Zdá se, že jest to také první případ, kdy Země na své dráze kolem Slunce potkává týž roj dvakráte. Okolnost, že při prvním setkání jedná se o meteority, které běží nad rovinou dráhy komety a při druhém setkání o meteority pod rovinou dráhy komety, jest velmi důležité, neboť naskytuje se nám příležitost vniknouti hlouběji do stavby tohoto ohromného roje meteorického, který proudí podél dráhy komety Halleyovy. Výsledky v tomto směru nalezené podám v práci další.

---

*) l. c.

**) Astronom. Nachr. 4418.

O nových fosforečnanech z Greifensteinu v Sasku.

Podává F. SLAVÍK.

Předloženo ve schůzi 16. ledna 1914.

(Se 7 obrazci v textu.)

I.

Na severním, saském svahu Krušných hor přesahují souvrství svorová z Čech od Jáchymova a Výprt k Mittweidě, odkud pak se táhne pruh svoru rovnoběžně se hlavním hřbetem hor Krušných přes Geyer a Ehrenfriedensdorf do krajiny mezi Saskou Kamenicí a Freibergem. Západně a jihozápadně od Ehrenfriedersdorfu proráží svor žula, jejíž výchozy tvoří dva větší ostrůvky, Greifenstein západně od Ehrenfriedersdorfu a Ziegelberg severozápadně od Geyeru, i menší Geyersberg jihovýchodně od tohoto města; není pochyby, že všecky tyto tři výskyty souvisí pod zemí a jsou částí jediného batholithu, jak dokazují shody v petrografické povaze různých odrůd žulových ze všech tří míst i v poměrech úložných, které dřívějším dolováním na cín byly dosti dokonale odkryty.

Žulový batholith ehrenfriedersdorfský byl předmětem pozornosti již starších badatelů, počínaje A. G. Wernerem; r. 1865 popsal jej po stránce makroskopicky petrografické, geologické a montanistické velmi důkladně A. W. Stelzner[1]) a dokázal, že žula jest mladší nežli svor, kterým diskordantně prostupuje; později doplnil jej mapující geolog saského zemského ústavu geologického F. Schalch[2]) ve vysvětlivkách k listu „Geyer" saské specialní mapy geologické, dodav k popisu Stelzne-

[1]) A. W. Stelzner, Die Granite von Geyer und Ehrenfriedersdorf sowie die Zinnerzlagerstätten von Geyer, Beiträge zur geognostischen Kenntnis des Erzgebirges. Heft I., Freiberg 1865.

[2]) F. Schalch, Erläuterungen zur geologischen Specialkarte des Königreichs Sachsen, Blatt 127. Section Geyer, 1878, zvl. str. 44—61. Druhé vydání, jež revidoval E. Weise, vyšlo r. 1900.

rovu podrobnosti o ohraničení a úložných poměrech ostrůvků žulových a podrobiv různé odrůdy žulové i výzkumu mikroskopickému, jenž vedl k vytčení strukturně i mineralogicky odlišných, ale ponenáhlu v sebe přecházejících variet žuly greifensteinské; podal též chemickou analysu žuly z lomů pod Greifensteinem, níže uvedenou k charakteristice matečné horniny nerostů, o nichž zde jest řeč.

Důležitý pokrok v poznání těchto zajímavých intrusí žulových učinil v letech osmdesátých minulého století F. von Sandberger: poznal slídu temnou, jež jest nepříliš hojnou součástkou žul ehrenfriedersdorfských i geyerských, jakožto protolithionit s podílem kysličníku lithnatého a zdůraznil souvislost všech žul ve Smrčinách, východních i západních horách Krušných i v pohoří Karlovarském, které mají společnými znaky lithnatou povahu slídy i častou příměs turmalinu, topasu, kassiteritu a jiných známých nerostů pneumatolytické družiny lokalit cínovcových a greisenovitou neb topasovcovou přeměnu žuly.[3])

Pneumatolytického rázu jest i kontaktní metamorfosa žulou proražených hornin vrstevnatých, v jejíchž produktech zjistil P. O. Böhmig[4]) hojně turmalinu, topasu i fluoritu. Cínovcová naleziště sama vyskytují se právě v okolí Ehrenfriedersdorfu a Geyeru v typické svojí podobě a ve stejně těsné souvislosti se žulami jako na ostatních lokalitách hor Krušných a sousedních, jsou stejně provázena greisenovou přeměnou pneumatolytickou a obsahují tytéž význačné minerály. Z bývalých dolů na cínovec u obou měst pochází největší část nálezů,[5]) které do nedávna přicházely do sbírek mineralogických; zvláště byly známy ehrenfriedersdorfské pěkně krystalované apatity, fluority, topasy a j., z fosforečnanů byl — mimo apatit — v Geyeru konstatován i triplit podobný slavkovskému a z Ehrenfriedersdorfu (z dolu Morgenröte) popsal r. 1828. W. Haidinger poprvé vzácný herderit, jenž později byl seznán jako fluorofosforečnan berylnato-vápenatý.

Nerosty, které jsou předmětem této studie, pocházejí z nalezišť v žule, *mimo* žilníky cínovcové. Žula greifensteinská podle výzkumů Stelznerových, Schalchových a v. Sandbergerových jest vyznačena malým podílem slídy a přítomností lithia v ní, strukturou stejnoměrně středně zrnitou přecházející do porfyrovité a hrubozrnně pegmati-

---

[3]) F. v. Sandberger, Ueber Lithionitgranite mit besonderer Rücksicht auf jene des Fichtelgebirges, Erzgebirges und des nördlichen Böhmens, Sitzungsberichte d. bayr. Akademie, München 1888, mat.-phys. Kl. *3*, 423—492, zvl. 470 sq. Srovn dále W. Salomon a His, Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 1888, str. 570 a E. Weise ve druhém vydání Schalchových vysvětlivek (l. c. 2) str. 35.

[4]) P. O. Böhmig, Beiträge zur Kenntnis der Gesteine des Greifensteins, Tschermaks Mineralog. u. petrogr. Mitteil. 1899 (XVIII.), 289—303.

[5]) Nálezy minerálů těch sestavil A. Frenzel ve svém „Mineralogisches Lexicon für das Königreich Sachsen" r. 1874; paragenesi jich uvádí velmi podrobně A. Breithaupt, Die Paragenesis der Mineralien, Freiberg 1849, str. 141—143 a doplňuje A. W. Stelzner l. c. str. 55.

tické, s častými druzovitými dutinkami, zvláště v posledním případě; živce jsou dílem červené orthoklasy, dílem bělavé plagioklasy. Chemické složení celkové, jak je stanovil F. Schalch, charakterisuje se zvláště značným množstvím alkalií, specialně kysličníku sodnatého, tak že Rosenbusch[6]) řadí výskyt greifensteinský mezi žuly alkalické do oddělení „Alkaligranititů". Reprodukuje zde čísla analysy Schalchovy poznamenávám, že podle pozdějšího výzkumu Sandbergerova jest dodati ještě kysličník lithnatý, Schalchem od druhých alkalií neoddělený a vůbec přehlédnutý:

SiO_2	75·96%
Al_2O_3	15·01
Fe_2O_3	sledy
MgO	0·33
CaO	2·70
Na_2O	4·49
K_2O	1·53
H_2O	sledy
SO_3	sledy
F	sledy
	100·02%

Z úkazů druhotné přeměny rázovitým způsobem mění vzhled žuly greifensteinské vznik epidotu ze živců, jenž celé hornině dodává barvy žlutozelené anebo se šíří po puklinách povlékaje je tenkými korami, a vznik černých druhotných sloučenin manganových, jimiž jednotlivé partie horniny jsou velmi význačně skvrnité.

Velmi typickým zjevem jest deskovitý rozpad žuly v silné lavice, od středu massivu v mírné klenbě k periferii spadající; jím jest podmíněn originální obraz, jejž poskytují skály na vrcholu Greifensteinu.

Nedaleko vrcholu zapadlé obvaly starých prací hornických svědčí, že i v greifensteinské partii žulové se dolovalo na cínovec, ač daleko ne v těch rozměrech jako u Geyeru a u samého Ehrenfriedersdorfu.

Jako na všech podobných nalezištích Krušných a sousedních hor, i zde se setkáváme s úkazem, že minerály cínovcových žil se opakují též jako akcesorické součásti i v samé žule, která jest nositelkou žil. Stelzner ve spise citovaném[7]) uvádí ze žuly topas, turmalin, fluorit, apatit, nakrit, druhotný wad a podle starších zpráv i kassiterit; Schalch dodává ojedinělý nález ilmenitu v pegmatitické partii.

Teprve v nejnovější době rozhojnily se nálezy nerostů v žule greifensteinské, v níž jest založeno několik velkých lomů. První zprávu o novém

[6]) H. Rosenbusch, Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine. IV. Aufl. 1907, str. 74.

[7]) l. c. str. 14—16.

výskytu minerálu, do té doby jen z málo nalezišť známého, podal F. Kolbeck[8]), popsav *childrenit* inž. C. v. Fircksem nalezený. Po něm až dosud toliko R. Görgey[9]) zcela stručně registruje podle zprávy Kolbeckovy a podle akvisic dvorního musea vídeňského mimo dříve již známé nerosty, pak childrenit a arsenopyrit, též „krásné exempláře krystalovaného *herderitu*, krátké hnědé sloupce *nového minerálu blízkého fillowitu*, dále krásné krystaly *epistilbitu*, sloučené ve vějířovité skupiny".

V posledních letech druzové minerály greifensteinské žuly se sbíraly v hojném počtu a rozšířily se po sbírkách mineralogických; že jsem mohl podniknouti detailnější výzkum jich, děkuji laskavosti p. dvorního rady K. Vrby, jenž mi svěřil ke zpracování veškerý materiál, akvirovaný pro Museum království českého a pro mineralogický ústav české university, téměř veskrze od p. dipl. inž. W. Mauchera v Mnichově, který se znalostí a porozuměním zachoval velikou část nálezů, a přátelské ochotě horlivého sběratele a znalce nerostných výskytů saského Rudohoří, p. lékárníka Waltera Roschera v Ehrenfriedersdorfě. K nemenší vděčnosti jsem zavázán za ochotné provedení chemických analys pp. dvornímu radovi K. Preisovi a kolegům Dr. E. Skarnitzlovi a Dr. A. Jílkovi.

II.

Ježekit, nový minerál.

Za *epistilbit* byl pokládán podle zevního vzhledu a sloupcovitě-tabulkovitého, na koncích domatického vývoje monosymmetrických krystalů nerost ve druzových dutinkách greifensteinské žuly vykrystalovaný, čirý, dosti silně skelně lesklý, vzniku zřejmě pozdějšího než ony minerály, které ze žuly samé přesahují do jejích druzovitých dutin, ale staršího nežli zemité a pod. produkty rozkladu. Jeho naprostou různost od epistilbitu jsem však zjistil již na prvém materiálu, kterého bylo velmi poskrovnu, podle určené hustoty značně vyšší než u epistilbitu a kteréhokoliv jemu příbuzného zeolithu, podle krystalových úhlů zcela odlišných i podstatného obsahu fluoru, jejž jsem konstatoval jednoduchou zkouškou v zatavené rource se solí fosforečnou. Později získaný hojnější materiál umožnil soustavný rozbor kvalitativný, jejž se souhlasnými výsledky provedli pp. prof. Dr. Jar. Milbauer a Dr. E. Skarnitzl, i výzkum krystalografických a fysikálních vlastností domnělého epistilbitu. Kvantitativní pak rozbor, laskavě vykonaný p. Drem Skarnitzlem, stanovil chemický vzorec nového minerálu, který buď pojmenován *ježekitem* na počest milého kolegy a přítele doc. Dra Boh. Ježka.

---

[8]) F. Kolbeck, Mitteilungen aus dem Mineralogischen Institut der Bergakademie Freiberg, II. Das erste deutsche Childrenitvorkommen aus dem Granite des Greifensteins bei Ehrenfriedersdorf im sächsischen Erzgebirge. Centralblatt für Mineralogie str. 1908, 333—335.

[9]) R. Görgey, Schöne und bedeutende Mineralfunde, Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie 2. Band str. 149, 1912.

Ježekit jest kromě agregatů stébelnatě zrnitých v podkladu svých druz zpravidla vykrystalován ve sloupcovitých a zároveň orthopinakodiálně sploštělých jedincích, jakostí svých ploch nepříliš příznivých výzkumu goniometrickému; přece však bylo možno měřením sedmi lepších krystalků dospěti těchto výsledků:

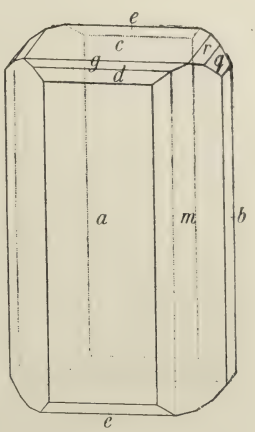
Soustava *jednoklonná.*

Elementy:

$$a : b : c = 0{\cdot}8959 : 1 : 1{\cdot}0241$$
$$\beta = 105^0\,31\frac{1}{2}'.$$

Řada krystalová jest nepříliš obsáhlá, majíc pouze devět tvarů:

c (001). *a* (100). *b* (010). *m* (110). *q* (011). *r* (012). *e* ($\bar{1}$01). *d* (102). *g* (104). (Obr. 1.)



Obr. 1.

Tvar *g* (104) byl nalezen toliko na jediném krystalu a se značnou diferencí mezi měřeným a vypočteným úhlem ku ploše spodové, měl by tedy býti ještě potvrzen; ostatní tvary byly konstatovány na všech zkoumaných krystalech.

Jakost ploch téměř veskrze jest nevalná, toliko plochy základního prismatu *m* (110) častěji, plochy *c* (001) *a* (100) i *q* (011) ojediněle jeví poněkud lepší reflexy, ostatně bylo vykonáno měření jen na velmi slabé signály nebo na třpyt. Nemálo přispívá k nepříznivé jakosti ploch i svislé rýhování ploch pásma vertikálního, vždy zcela zřetelně vyvinuté.

Přehled měřených a vypočtených úhlů ježekitu jest:

			Měřeno:	Vypočteno:	Hran:
a (100)	: *m* (110)	=	* 40° 48′		8
	: *c* (001)		* 74 28½		12
c (001)	: *q* (011)		* 44 37		3
	: *r* (012)		26 10	26° 15½′	5
	: *b* (010)		88 16	90 0	1
	: *m* (110)		79 3	78 19	1
	: *e* ($\bar{1}$01)		57 37	57 47	5
	: *d* (102)		25 52	25 32	6
	: *g* (104)		15 52	14 21	1
m (110)	: *m*′ (1$\bar{1}$0)		81 20	81 36	5
	: *r* (012)		62 26	61 55	1
b (010)	: *a* (100)		89 33	90 0	3
	: *m* (110)		49 2	49 12	5

Z uvedených elementů plynou pro tvary ježekitu posiční úhly:

	φ	ρ
c (001)	90° 0′	15° 31½′
a (100)	90 0	90 0
b (010)	0 0	90 0
m (110)	49 12	90 0
q (011)	15 10½	46 42
r (012)	28 29	30 13¼
e ($\bar{1}$01)	90 0	42 15½
d (102)	90 0	41 3½
g (104)	90 0	29 52½

Mimo uvedené již rýhování svislé na plochách pásma vertikálního alteruje přesnost měření též leckdy se vyskytující rýhování na ploše spodové, jdoucí rovnoběžně ke klinodiagonále, i zaoblení plochy spodové směrem ke klinodomatům, nepatrné rozměry klinopinakoidu a ploch orthodomatických i obvyklý hypoparallelní srůst jedinců krystalových.

Habitus krystalů jest celkem na všech exemplářích téměř stejný, jak jej znázorňuje obr. 1. Jen někdy bývají krystalky ježekitu ještě více protáhlé podle vertikály, až skoro jehličkovité.

Méně dokonalá a hustěji seskupená krystalová individua hromadí se v agregáty a krystalické kůry o povrchu hroznovitě ledvinitém a slohu stébelnatém.

Krystalky ježekitu bývají úplně čiré, jindy bílé nebo na povrchu slabě nažloutlé i nahnědlé. Lesk skelný bývá dosti intensivní.

Tvrdost = 4½.

Hustota = 2·940 (určena suspensí).

Štěpnost je dokonalá podle orthopinakoidu (100), nedokonalá podle plochy spodové (001).

Vlastnosti optické.

V mikroskopu ve světle rovnoběžném štěpné lupénky podle orthopinakoidu zhášejí rovnoběžně ke hranám s plochou spodovou i hranolem, a směr parallelní s vertikálou jest vždy směrem menší lámavosti světelné nežli směr orthodiagonalní.

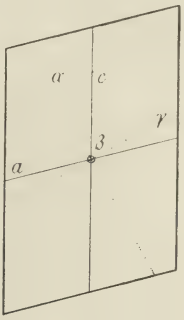
Na štěpném lupénku podle plochy spodové je zhášení taktéž rovnoběžné k orthodiagonále i klinodiagonále, směr prvý je vůči druhému negativní (slaběji lomný).

Na řezu klinopinakoidalním svírá jeden směr zhášení s vertikálou úhel 29° v tupém úhlu meziosním, druhý 13½° s klinodiagonálou v úhlu ostrém. Křemenným klínem ukáže se prvý směr býti opticky negativním vůči druhému.

Ve světle konvergentním se pozoruje na orthopinakoidu šikmý výchoz jedné osy optické ve směru podélném, na basi šikmý výchoz bissektrice.

Z toho plyne optická orientace ježekitu (obr. 2.):

$b = \beta$
$c : \alpha = 29^0$ v tupém $\sphericalangle \beta$
$a : \gamma = 13\frac{1}{2}^0$ v ostrém $\sphericalangle \beta$



Obr. 2.

Rovina os optických (010).

Všecky tři exponenty lomu jsou zřetelně vyšší než v kanadském balsámu. Immersní methodou přibližně určeno:

$\alpha = 1{\cdot}55$
$\beta = 1{\cdot}56$
$\gamma = 1{\cdot}59$

Vlastnosti chemické.

Zjistiv, jak uvedeno, v prvém nepatrném množství ježekitu přítomnost fluoru, natria a lithia na základě zbarvení plamene a zkoušky se solí fosforečnou v uzavřené baňce, odevzdal jsem z později došlého materiálu větší partii vybrané čisté hmoty pp. prof. Dr. Jar. Milbauerovi a Dr. E. Skarnitzlovi s prosbou o soustavný výzkum chemický. Kvalitativní analysa vedla u obou pánů k výsledkům souhlasným, kvantitativní vykonal p. Dr. Skarnitzl, jemuž za jeho laskavou ochotu vzdávám srdečné díky. Resultáty jeho zkoušek jsou tyto:

Ježekit před dmuchavkou se rozpaluje a jasně svítí, pokropen byv roztokem dusičnanu kobaltnatého barví se při novém žíhání modře, plamen zbarvuje intensivně žlutě a modrým sklem lze pozorovati též purpurové zbarvení; obsahuje tedy ježekit prvky *Al, Na, Li.*

Ve studené kyselině sírové a v lučavce královské nerost se rozpouští jen neúplně, zbytek nerozpustný má barvu čistě bílou a je krystalický. V horké kyselině sírové se rozpouští úplně; na dně nádoby se usazují při rozpouštění bublinky plynného *FH.*

Celkem zjistil kvalitativní rozbor přítomnost aluminia, kalcia, natria, lithia, fluoru, hydroxylu a fosforu; ve stopách konstatováno též železo.

Zkouška na berylium dala výsledek záporný, rovněž při spektroskopickém výzkumu nezjištěn ani draslík ani mimo *Na* a *Li* jiný kov alkalický.

Při rozboru kvantitativním stanoven byl

hliník jako orthofosforečnan,
vápník jako kysličník,
sodík a *lithium* vyloučeny ve formě chloridů a odděleny methodou amylalkoholovou;
kysličník fosforečný sražen jako fosfomolybdenan ammonatý a převeden v pyrofosforečnan hořečnatý;

fluor stanoven a vážen podle methody F r e s e n i o v y[10]) jakožto fluorokřemík;

hydroxyl určen výpočtem ze ztráty na váze při žíhání.

Čísla kvantitativní analysy jsou:

I.	0·6204 *g*	minerálu poskytlo	0·1625 *g*	$AlPO_4$	= 0·1360 *g* Al_2O_3
	0·6204 *g*	,, ,,			0·0837 *g* CaO
	0·6204 *g*	,, ,,	0·2946 *g*	$NaCl$	= 0·1161 *g* Na
	0·6204 *g*	,, ,,	0·0836 *g*	Li_2SO_4	= 0·0053 *g* Li
II.	0·6734 *g*	,, ,,	0·3200 *g*	$Mg_2P_2O_7$	= 0·2040 *g* P_2O_5
III.	0·5863 *g*	,, ,,	0·2620 *g*	SiF_4	= 0·0477 *g* F
IV.	0·3245 *g*	,, pozbylo na váze žíháním			0·0500 *g*

Z těchto výsledků plyne složení ježekitu:

		Molekulární kvocienty		
P_2O_5	30·30%	0·2134		přibližně = 1·01
Al_2O_3	21·92	0·2096		,, = 1·00
Fe_2O_3	sledy	—		—
CaO	13·50	0·2403		,, = 1·15
Na	18·71	0·8117	0·8239	,, = 3·93
Li	0·86	0·0122		
F	8·15	0·4278		,, = 2·04
OH	7·26	0·4268		,, = 2·01
	úhrnem 100·70%			

Chemické složení ježekitu jest tudíž:

$$P_2O_5 \,.\, Al_2O_3 \,.\, CaO \,.\, 2\,NaF \,.\, 2\,NaOH,$$

což by se mohlo psáti též v podobě *basického fosforečnanu hlinito-vápenato-sodnatého* s částí sodíku zastoupenou lithiem a *s polovinou hydroxylu zastoupenou fluorem*:

$$[PO_4]_2\,F_2\,[OH]_2\,Al\,[Al\,.\,OH]\,CaNa_4\,.$$

Rozpočtouce teoretický vzorec ten obdržíme čísla velice blízká nalezenému složení ježekitu:

	Nalezeno:	Vypočteno:
P_2O_5	30·30%	30·60%
Al_2O_3	21·92	22·01
CaO	13·50	12·07
NaF	17·94[11])	18·09
$NaOH$	17·04[11])	17·23
	100·92%	100·00%

[10]) Viz: F r e s e n i u s, Quantitative Analyse I., VI. Abdr. (1910), str. 431.

[11]) t. j. (*Na, Li*) *F* resp. (*Na, Li*) *OH*.

Ježekit a morinit.

Al. Lacroix[12]) popsal r. 1891 ze známého naleziště amblygonitu (montebrasitu) u Montebras v depart. Creuze nový minerál, jejž nazval morinitem a později (1908) znovu podrobněji zkoumal spolu s A. Carnotem[13]); analysa krystalinních mass růžové barvy, na nichž byly jen velmi pořídku narostlé jehličkovité krystaly o souměrnosti monosymmetrické, poskytla Carnotovi těchto čísel (po odpočtení přimíšené SiO_2 a hygroskopické vody):

P_2O_5	33·50%
Al_2O_3	17·80
CaF_2	27·00
Na_2O	5·20
H_2O	17·90
	101·40%.

Složení to vede ku vzorci:

$$3\,AlPO_4 \,.\, HNaPO_4 \,.\, 3\,CaF_2 \,.\, 8\,H_2O = HNa_2[AlF]_3[CaF]_3P_4O_{16} \,.\, 8\,H_2O.$$

Od ježekitu se liší toto složení velmi nápadně vyšším podílem vody, fluoru — 13·20, j. 8·15 —, pak mnohem menším množstvím kysličníku sodnatého. Za to drobné jehličky narostlé na krystalinických aggregátech morinitu shodují se s ježekitem do podrobností:

	Jehličky na *morinitu*	*Ježekit*
Tvar krystalový	monoklinický	monoklinický
Habitus	vertikálně protáhlý a sploštělý podle (100)	stejný
Povrchová jakost ploch	silně rýhovány v pásmu vertikálním směrem podélným	zcela stejně
Kombinace	(100) (010) (110) (001)	tytéž plochy + klinodomata a orthodomata
Štěpnost	(100)	(100) a (001)
Tvrdost	4	$4^1/_2$
Hustota	2·94	2·94
Zhášení na (010)	$c : \alpha = 30^0$ v tupém $\sphericalangle \beta$	$c : \alpha = 29^0$ v tupém $\sphericalangle \beta$
Rovina os optických	(010)	(010)
Indexy lomu	prům. 1·55—1·56	$\alpha = 1{\cdot}55$ $\beta = 1{\cdot}56$ $\gamma = 1{\cdot}59$

[12]) Bulletin de la Société française de Minéralogie XIV. 187.

[13]) Sur la composition de la morinite, tamtéž XXXI. 149—152. Minéralogie de la France (1910), tome IV. p. 539—540.

Pan prof. Dr. Al. Lacroix v Paříži poskytl mně laskavě několik úlomků ze vzácného materiálu morinitového z původního (a dosud jediného) naleziště. Jsou to štěpné massy barvy růžové až malinové, s dokonalou štěpností jedním směrem; tvrdost = $4\frac{1}{2}$, hustota = 2·95.

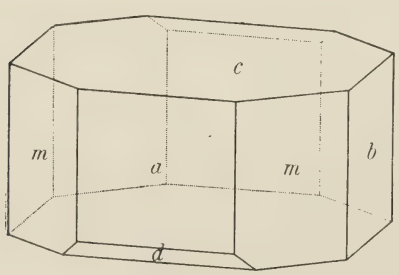
V čistě vybraném podílu stanovil p. Dr. Skarnitzl množství vody 18·41%, tedy na $\frac{1}{2}$% shodně s Carnotovým rozborem; tím zajisté je dostatečně prokázána správnost Carnotových údajů a naprostá rozdílnost tohoto kusového morinitu od ježekitu.

Zdá se však jistým, že jehličky narostlé na morinitu, prozkoumané Lacroixem, jsou od něho různé a totožné s ježekitem. Ten by tudíž měl dosud známá dvě naleziště, obě v charakteristické paragenesi nerostů žulové pneumatolysy, obě v blízkých vztazích k výskytu žil cínovcových. V těžkých tekutinách o hustotě nad 2·94, v nichž kousky lamelárního morinitu dosti rychle klesají na dno, plave ježekit i ony jehličky, snížením hustoty pak obojí zároveň počínají vzplývati v každé poloze.

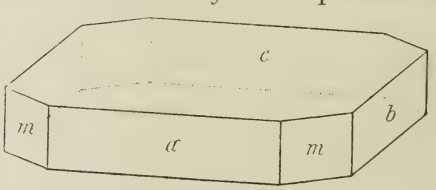
III.

Roscherit, nový minerál.

Druhý nový fosforečnan greifensteinsky dovoluji si nazvati ***roscheritem*** na počest pana lékárníka W. Roschera, horlivého sběratele a znalce nerostů ehrenfriedersdorfských, jehož ochotě děkuji za značnou část materiálu výzkumného. P. inž. W. Maucher označil roscherit jako „minerál podobný fillowitu" a též R. Görgey v citovaném sdělení podobně jej uvedl. Roscherit jest veskrze krystalován, monoklinický a typu různého, někdy i na téže druze: 1. krátké sloupce nebo tlusté tabulky osmiboké, někdy zúžením klinopinakoidu skoro šestiboké, na kterých mimo tři pinakoidy jsou vyvinuty dost široké, ale velmi nedokonalé, jenom slabě třpytné plochy základního hranolu *m* (110); pouze na dvou krystalech shledána hrana mezi plochou spodovou a zadním orthopinakoidem otupena uzounkou, slabě třpytnou facettou, již možno vzíti za positivní orthodoma základní ($\bar{1}01$) — viz obr. 3.; — 2. tenčí tabulky podle plochy spodové, s obrysem obdélníkovým, na rozích otupeným jen úzkými plochami hranolovými; delší stranou obdélníku jest tu hrana s orthopinakoidem, někdy tak protáhlá, že ráz krystalků přechází do



Obr. 3.



Obr. 4.

orthodiagonálně sloupcového (obr. 4.). Shledáváme se ovšem často i s krystalky přechodních tvarů mezi oběma uvedenými nejvýznačnějšími.

Krystalky roscheritu jsou na svém podkladu, kterým bývá křemen, orthoklas, jednou též childrenit, narostlé jednotlivě, nahloučeny nepravidelně i seskupeny někdy v hroznovité agregáty o slohu helminthickém, složené z basálně sploštělých individuí.

Hypoparallelní srůst drobných krystalků roscheritových, i mimo takovéto helminthické shluky častý, jest velikou překážkou exaktního stanovení elementů roscheritu, neboť jen velmi zřídka nalezneme jednotně reflektující plochy krystalové.

Jen orthopinakoidy dávají zřetelný až dobrý signál, klinopinakoidy a base jen velmi nedokonalý, prisma (110) a doma ($\bar{1}01$) vždy pouze slabý třpyt.

Za těchto okolností výsledky měření, získané na pěti relativně nejlepších krystalcích vybraných z velikého jich množství, nemohou býti než přibližné.

Celkem jsem obdržel tato úhlová data:

	Měřeno:	Meze úhl. hodnot:	Vypočteno:	Hran:
a (100) : c (001)	* 80° 10′	80° 0′ — 80° 21′	—	2
: b (010)	90 27	87 58′ — 91 24	90° 0′	9
: d ($\bar{1}01$)	* 52 2	51 43 — 52 21	—	2
: m (110)	* 42 48	42 14 — 43 27	—	3
b (010) : c (001)	90 7		90 0	1

Elementy roscheritu blíží se tedy hodnotám:

$$a : b : c = 0{\cdot}94 : 1 : 0{\cdot}88$$
$$\beta = 99^0\ 50'.$$

Řada krystalová jest pak velmi skrovná:

$$a\ (100)\ .\ b\ (010)\ .\ c\ (001)\ .\ d\ (\bar{1}01)\ .\ m\ (110).$$

Posiční úhly φ a ρ pro tvary tyto plynou velmi jednoduchým způsobem přímo z uvedených dat pozorovacích:

	φ	ρ
a (100)	90° 0′	90° 0′
b (010)	0 0	90 0
c (001)	90 0	9 50
d ($\bar{1}01$)	90 0	37 58
m (110)	47 12	90 0

Roscherit se štípe zcela zřetelně podle klinopinakoidu (010), lépe podle plochy spodové (001).

Tvrdost = 4½.

Hustota = 2·916, určena v roztoku jodidu rtuťnatobarnatého.

Lom světelný ve všech polohách jest o mnoho vyšší než v kanadském balsámu.

Pleochroismus jest zřetelný, absorpce značná.

Na plochách (001) zhášení jest rovnoběžné k orthodiagonále, jejíž směr vykazuje menší lámavost světelnou a prosvítá barvou žlutou do olivova, směr kolmý k orthodiagonále, optického rázu positivního, barvou žlutohnědou do zelenava s větší absorpcí.

Na klinopinakoidu (010) svírá směr bližší vertikále s ní 15° v ostrém úhlu meziosním a jest opticky negativní, olivově hnědožlutý, směr k tomuto kolmý, opticky positivní, prosvítá barvou kaštanově hnědou se značně větší absorpcí.

Dvojlom jest prostředně silný.

V konvergentním světle vystupuje na klinopinakoidu ostrá negativní bissektrix velmi velikého úhlu os optických ($2E_{Na} > 120^0$), ležícího v rovině na klinopinakoid kolmé a od vertikály o úhel 75° v tupém $\sphericalangle \beta$ odchýlené.

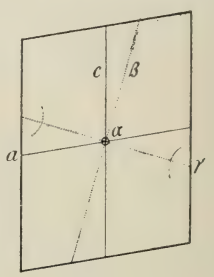
Skřížená disperse jest velmi silná, $\rho > \upsilon$.

Jest tedy optická orientace roscheritu (obr. 5.):

$b = \alpha$

$c : \gamma = 75^0$ v tupém $\sphericalangle \beta$

$c : \beta = 15^0$ v ostrém $\sphericalangle \beta$



Obr. 5.

Střední lámavost světelná:

1·625—1·63

Absorpce $\gamma > \beta > \alpha$.

Analysa kvantitativní, za niž děkuji laskavosti p. dvorního rady K. P r e i s e, potvrzuje, že roscherit jest minerál nový. Byloť v něm nalezeno:

P_2O_5	35·98%
Al_2O_3	13·01
FeO	9·58
MnO	13·70
CaO	10·87
Alkalií	sledy
H_2O	11·52
Nerozpustného podílu	4·58
	99·24

Po odečtení nerozpustného podílu na 100 přepočítán, poskytuje rozbor těchto čísel:

P_2O_5	38·00	0·2675
Al_2O_3	13·75	0·1345
FeO	10·13	0·1410
MnO	14·47	0·2040
CaO	11·48	0·2047
H_2O	12·17	0·6757
	100·00	

Poměr kysličníků shoduje se dobře s jednoduchou relací:

$$P_2O_5 : Al_2O_3 : FeO : MnO : CaO : H_2O$$
$$= 4 : 2 : 2 : 3 : 3 : 10$$

a za suposice, že dvojmocné kovy se isomorfně zastupují, obdržíme vzorec

$$(MnFeCa)_2\, Al\, [OH]\, P_2O_8 \,.\, 2\, H_2O.$$

Při poměru $Mn : Fe : Ca = 3 : 2 : 3$ vyžaduje formule ta složení velmi blízkého nalezenému:

P_2O_5	38·44%
Al_2O_3	13·84
FeO	9·73
MnO	14·42
CaO	11·38
H_2O	12·19
	100·00.

Chemicky náleží roscherit do skupiny basických fosfátů s kovy dvoj- a trojmocnými, jsa nejblíže příbuzným s isomorfní dvojicí childrenitu a eosforitu, jak vysvitne ze srovnání:

roscherit $4\, RO \,.\, Al_2O_3 \,.\, 2\, P_2O_5 \,.\, 5\, H_2O$
childrenit a eosforit $2\, RO \,.\, Al_2O_3 \,.\, P_2O_5 \,.\, 4\, H_2O$

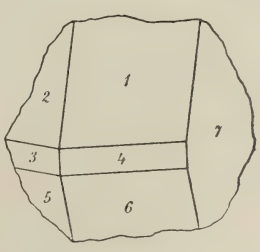
Roscherit liší se od obou druhých hlavně poměrným nedostatkem kysličníku hlinitého a značným podílem kysličníku vápenatého mezi monoxydy. Isomorfní směs *Ca-Mn-Fe* upomíná na jiné složitější fosforečnany, zvláště anapait.

Od nedokonale známých fosforečnanů týchže kovů: kalcioferritu a attakolithu jest roscherit podstatně rozdílný i složením kvantitativním i vlastnostmi zevními a fysikálními.

IV.

Lacroixit = domnělý herderit.

Vzácný fluorofosfát berylnatý a vápenatý, herderit, byl popsán právě z Ehrenfriedersdorfu; jest tedy přirozeno, že byly za herderit pokládány též nově nalezené neúplně vyvinuté krystaly nerostu zevně podobného herderitu, jež pocházejí taktéž z druzových dutin žuly greifensteinské. Nejlépe vyvinut jest krystal ze sbírky p. lékarníka R o s c h e r a, narostlý v malé druzové du'ince; měří asi $1\frac{1}{2}\,cm$ a přístupná jeho část má sedm ploch krystalových, vyvinutých přibližně jak znázorněno obr. 6. Celý kus není příliš veliký, tak že bylo možno krystal nesňatý s podkladu měřiti na dvoj-



Obr. 6.

kruhovém goniometru. Reflexy ploch však jsou špatné, často zmnožené; namnoze možno měřiti toliko na třpyt. S plochou 1 v pólu obdržel jsem opětovným měřením tyto výsledky:

	φ	ρ
1	— —	0° 0′
2	180° 0′	71° 40′ — 72° 27′
3	— —	(80° 39′)
4	72° 10′ — 75° 28′	20° 43′ — 21° 56′
5	139° 9′ — 140° 28′	87° 31′ — 88° 14′
6	72 38 — 75 58	41 58 — 43 5
7	0° 0′ [14])	53 30 — 55 0

Z toho plynou v hrubé aproximaci úhly měřené (t. j. ρ):

1 : 2 = 72°	1 : 5 = 88°
: 3 = (80½)	: 6 = 42½
: 4 = 21½ .	: 7 = 54,

a vypočtou se, nehledě ku příliš špatně vyvinuté ploše 3, další úhly:

5 : 6 = 72°	2 : 6 = 87½°
4 : 2 = 79½	2 : 5 = 43
4 : 5 = 79½	6 : 7 = 54
	5 : 7′ = 54

Morfologicky jest tudíž krystal kosočtverečný a spojkou tvarů:

(111) = plochy 1, 2, 5, 6
(110) „ 3, 4
(010) „ 7.

Vzhledem na malou přesnost dat měřicích, zjevnou z uvedených dat, stačí zajisté vyjádřiti elementy krystalu pouze

$$a : b : c = 0{\cdot}82 : 1 : 1{\cdot}60.$$

Oproti tomu však jsem pozoroval na zkoumaném krystale zcela zřetelnou štěpnost pouze podle ploch 1 a 2, v dalších pak úlomcích, jež jsem měl k disposici, taktéž jsem nemohl zjistiti čtverou stejně zřetelnou štěpnost odpovídající jehlanu kosočtverečnému, nýbrž jen dvojí, místy až téměř dokonalou. Mimo to jsou některé krystaly, neúplně vyvinuté, podél hrany obou zřetelných ploch štěpnosti až sloupcovitě protáhlé.

Též práškové preparáty mikroskopické nemohly věc úplně jistě rozhodnouti, ježto právě štěpnost neposkytuje zcela rovných, přesněji měřitelných omezení postranních na lupéncích štěpných; na těchto vystupuje v konvergentním světle šikmo jedna osa.

[14]) t. j. čísla pro φ u ploch 4, 5, 6 vzata jednak za předpokladu $\varphi_7 = 0^0\,0'$, jednak $\varphi_2 = 180^0\,0'$; měření, ač pásmo (2, 1, 7) jest zřejmé, poskytlo φ_1 a φ_7 v podobných mezích kolísající jako u druhých ploch.

Pravdě nejpodobněji tedy jest nový nerost jako herderit jednoklonný s velikou aproximací k souměrnosti kosočtverečné, ale teprve další nálezy dokonalejšího a hojnějšího materiálu mohou otázku jeho souměrnosti rozhodnouti. Nazývám nový minerál ***lacroixitem*** na počest slovutného badatele francouzského, jenž prvý zjistil přirozený ternární fosfát o konstituci příbuzné a jenž laskavým propůjčením materiálu morinitového přispěl i k doplnění výsledků této práce.[15])

Od herderitu odlišuje lacroixit přes souhlas v některých úhlech již úklon štěpných ploch 72° (u herderitu nedokonalá štěpnost podle základního hranolu tvoří úhel 64° 29′ vypočtený z Penfieldova poměru parametrů 0·63075 : 1 : 0·42742, $\beta = 89° 54'$).

Lacroixit jest bělavý, nažloutlý aneb světle nazelenalý; lesk skelný někdy poněkud přechází do mastného.

Tvrdost = 4½ (herderit = 5).

Hustota = 3·126 (h. = 3·012, Penfield).

Střední lámavost světelná přibližně = 1·57 (h. = 1·61).

Rozdílnost lacroixitu od herderitu byla zplna potvrzena výzkumem chemickým, jejž laskavě provedl p. Dr. A. Jílek, asistent chemicko-analytického ústavu české vysoké školy technické v Praze. Celkem nalezeny v lacroixitu součástky tytéž jako v ježekitu, ale kromě toho i značný podíl kysličníku *manganatého*; obsahuje tedy lacroixit jako podstatné součástky:

$$P_2O_5,\ Al_2O_3,\ CaO,\ MnO,\ Na_2O,\ F,\ H_2O.$$

V kyselině solné rozpouští se minerál za chladu ponenáhlu, za tepla snadno; v koncentrované kyselině sírové rozkládá se okamžitě, vyvíjeje nemnoho fluorokřemíku.

Analysa kvantitativná byla vykonána p. kol. Jílkem na úlomcích větších krystalů; výsledek její jest:

P_2O_5	28·83%
Al_2O_3	18·87
Fe_2O_3	sledy
MnO	8·43
CaO	19·46
MgO	sledy
Na_2O	14·92
Li_2O	sledy
F	6·53
Ztráta žíháním	5·46
SiO_2	0·95
	103·45
— O za F_2	2·75
	100·70%.

[15]) Název lacroixit, jejž dal H. Lienau (Chemiker-Zeitung 1903, XXVII. 15) nahodilé směsi dialogitu s rhodonitem, jest neplatný.

Při rozboru byl minerál nejprve rozpuštěn v kyselině solné; nepatrný zbytek SiO_2 sfiltrován a odpařeno několikráte s kyselinou dusičnou. Po okyselení touže kyselinou sražen ve filtrátu kysličník fosforečný molybdenovou solucí. Ostatní součástky určeny po odstranění P_2O_5 pomocí SnO_2 za přítomnosti HNO_3 několikerým odpařením k suchu; sfiltrováno, okyseleno HCl, odpařeno a v slabě chlorovodíkovém roztoku sražen cín sírovodíkem, sfiltrováno a ve filtrátu určen kysličník hlinitý, za horka sražený octanem ammonatým. Pak ve filtrátu octovou kyselinou a bromovou vodou určen mangan jako MnO_2 a vyžíhán na Mn_3O_4, v dalším filtrátu kysličník vápenatý šťovanem ammonatým po neutralisaci.

Alkalie určeny v podílu, rozpuštěném na platinové misce v kyselině fluorovodíkové za přítomnosti sírové; odpařeno pak k suchu, okyseleno kyselinou solnou a neutralisováno ammoniakem a šťovanem ammonatým; vyloučená sraženina sfiltrována, alkalisována hydrátem barnatým, odpařeno několikráte k suchu, filtrováno a nadbytek $Ba[OH]_2$ vyloučen uhličitanem ammonatým; po sfiltrování, okyselení HCl a odpaření k suchu vážen chlorid sodnatý. Zkouška na draslík dala výsledek záporný.

Určení SiO_2, ježto je přítomen fluor, bylo provedeno takto: minerál roztaven se sodou, vylouženo vodou a neutralisováno kyselinou solnou, pak ponechán roztok několik hodin v klidu po přidání ammoniakálného roztoku hydroxydu zinečnatého; sfiltrováno, spláchnuto do porcelánové misky a odpařeno s HCl k suchu; zbytek nerozpustný v kyselině solné identifikován jako SiO_2 (čištěný fluorovodíkem).

Fluor byl určen v jiném podílu nerostu, jenž vytaven se sodou a ve sfiltrovaném roztoku, do něhož přešel fluorid sodnatý a fosforečnan alkalický, provedeno dělení kyseliny fluorovodíkové a fosforečné vypočteným dusičnanem stříbrnatým (podle T r e a d w e l l a). Fluor ve filtrátu pak určen jakožto fluorid vápenatý.

Po odečtení SiO_2 a přepočtení analysy na 100% obdržíme čísla:

	%	Molek. kvoc.	
P_2O_5	28·92	0·2036	
Al_2O_3	18·92	0·1851	
MnO	8·45	0·1192	0·4675
CaO	19·51	0·3483	
NaF	14·47	0·3444	0·4823
$NaOH$	5·51	0·1379	
H_2O	4·22	0·2343	
	100·00		

Předpokládáme-li, že vápník s manganem a fluor s hydroxylem se zastupují isomorfně, pak se blíží poměr součástek v lacroixitu proporcím:

$$Na\,(F, OH) : (Ca, Mn)\,O : Al_2O_3 : P_2O_5 : H_2O$$
$$= 8 \quad : \quad 8 \quad : \quad 3 \quad : \quad 3 \quad : \quad 4,$$

což by vedlo ke složité formuli:

$$Na_4(Ca,Mn)_4Al_3P_3O_{16}(F,OH)_4 \cdot 2\,H_2O\,.$$

Od jednodušších proporcí

$$2 : 2 : 1 : 1 : 1,$$

čili vzorcem

$$2\,NaR^{II}[AlO]PO_4F \cdot H_2O,$$

lišily by se nalezené podíly hlavních součástek o 1·6—3·1%. Jistého však ani tu nelze nic říci, ježto výzkum byl proveden jen s malým množstvím materiálu, nad to podezřelého z počínajícího rozkladu; bylyť krystalové úlomky, jichž jedině bylo možno k rozboru použiti, oproti značně průsvitnému měřenému krystalu téměř neprůsvitné a mnohem slaběji, poněkud mastně lesklé. I po stránce chemické jest tedy pokládati údaje o novém minerálu za provisorní.

Zůstává jistým toliko to, že lacroixit jest nový, velmi basický a fluorem bohatý fosforečnan hlinitý, vápenatý, manganatý a sodnatý, od ježekitu rozdílný hlavně značně vyšším podílem monoxydů $(CaMn)O$. Přítomností manganu jest podmíněna jeho hustota, vyšší nežli u ježekitu, ač tento jest značně nižším hydrátem.

Snad přispěje toto upozornění na nový minerál k pátrání po homogenním a čerstvém materiálu krystalovaném, na němž by bylo možno prozkoumati zajímavý nerost dokonaleji.

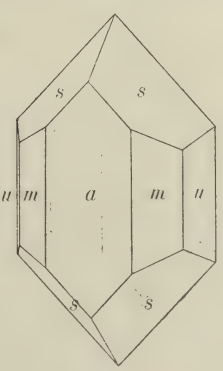
V.

Poznámka o childrenitu.

Childrenit popsal, jak uvedeno, z Greifensteinu před několika lety F. Kolbeck[16]) a uvedl i vyobrazil na něm tři nejobyčejnější tvary tohoto nerostu:

a (100) m (110) s (121).

Tyto jsem shledal též já na četných krystalech childrenitu greifensteinského mnou pozorovaných, mimo ně pak i hranol pro childrenit nový $*u$ (140), jenž přiostřuje dosti širokými plochami postranní hranu prismatu základního.



Obr. 7.

Nový tvar byl zjištěn z měření (na signály jen nedokonalé)

u (140) : a (100) = 71° 41′ měř., 72° 11′ vypočt.

Habitus krystalu s novým tvarem tím i některých jiných lišil se od childrenitů Kolbeckem vyobrazených širší rozlohou makropinakoidu a zúženým hranolem základním (obr. 7.).

[16]) l. c. (8).

Celkem poskytlo měření čtyř krystalů mimo uvedený úhel nového tvaru těchto dat:

		Měřeno:	Vypočteno:[17])	Hran:
s (121) : s'	($1\bar{2}1$)	81° 51′	82° 7½′	1
: s'''	($\bar{1}21$)	49 44	49 56½	2
: a	(100)	65 45	65 2	1
m (110) : a	(100)	37 49	37 53	4
: m'	($1\bar{1}0$)	76 34	75 46	1

Pouze jednotlivé plochy jehlanu s (121) byly poněkud lépe vyvinuty, ale i ty často jeví povrch i makroskopicky druzovitý; plochy makropinakoidu a obou hranolů reflektují vždy velmi nedokonale.

VI.

Další, neurčené minerály.

Jako „eosforit" etiketovány jsem shledal dva exempláře, z nichž na jednom byly nedokonale vyvinuté krystaly childrenitu a orthoklasu povlečeny krystalickou korou barvy bledě růžově fialové, na druhém ve druzové dutince nahromaděny jemně růžové, téměř čiré krystalky isometrické nebo krátce sloupcovité. Kusé výsledky měření na krystalcích těch nedovolují sice definitivního úsudku o povaze nerostu, jehož jest tak poskrovnu, ale vzbuzují pochybnosti o tom, že by to byl eosforit.

Dosti častý jest minerál podobný *barranditu*, jenž tvoří jemné bradavky a kuličky slabě průsvitné, barvy bělavé, nažloutlé neb našedlé; hustota 3·123, značně vyšší než u barranditu a wavellitu, dokazuje různost greifensteinského minerálu od těchto obou.

VII.

Paragenese fosforečnanů.

Greifensteinské fosforečnany jsou nerosty druzových dutin lithnaté žuly: okolo dutin těch, jako na četných analogických nalezištích (Baveno, Striegau atd.) nabývá žula slohu hrubozrnnějšího a součástky její: křemen, živec a lithnatá slída přesahují z horniny do druz tak, že nelze vésti ani přibližně ostřejší hranice mezi součástkami žuly a nerosty druzovými. U druz dostavuje se ve hrubozrnnější žule hojně turmalin v černých i zelených jehličkách, taktéž přesahujících do dutinek, a naše fosforečnany. Z těch jediný lacroixit náleží ještě této přechodní fasi a vězí leckdy zpola v hornině, jsa prvním fosforečnanem, jenž tu vznikl; ostatní všecky jsou nerosty výlučně druzové.

---

[17]) Z Millerova poměru poloos 0·77801 : 1 : 0·52575, srovn. Dana, Mineralogy, 6th ed. 850.

Pozoroval jsem tyto jednotlivé případy sukcese:

1. Lacroixit — childrenit,
2. lacroixit — ježekit,
3. lacroixit — nerost podobný barranditu (= „*B*“) — roscherit,
4. ner. *B* — roscherit,
5. ježekit — ner. *B*,
6. childrenit — roscherit,
7. childrenit — domn. eosforit (= ner. *E*),
8. ner. *E* — ner. *B*.

Apatit jsem nezastihl společně s druhými fosfáty, ale v kusech, které jsem viděl, jest taktéž nerostem pozdějším, již rozhodně druzovým.

Posloupnost nových fosforečnanů mezi sebou není z uvedených příkladů jednoznačně a obecně platně stanovena, a snad též vznikaly i dva neb tři současně, ale přece jest patrno, že *lacroixit jest vždy starší, roscherit mladší ostatních fosforečnanů*; childrenit, ježekit, dva dosud neurčené minerály a pravděpodobně také apatit dobou svého vzniku zaujímají střední postavení mezi oběma. Postupem časovým — a patrně zároveň klesající temperaturou — změnila se povaha krystalujících fosforečnanů tak, že po vykrystalování lacroixitu, obsahujícího oxydy typu R_2O, RO i R_2O_3 pohromadě, nastala rozluka kysličníků a soustředily se alkalie, fluor, skoro všechen CaO a část R_2O_3 v ježekitu, kysličník manganaty, železnatý a zbytek Al_2O_3 v childrenitu, krystalisace pak zakončena roscheritem, bohatým oxydy RO a prostým alkalií i fluoru.

Amoeba v cystě dentalní.

Sepsal

MUDr. VIKTOR GUTTMANN, s. docent laryngologie.

(Z ústavu pro všeobecnou biologii a experiment morfologii prof. dra. VLADISLAVA RŮŽIČKY a z laryngol. ústavu prof. dra. O. FRANKENBERGRA při č. lék. fakultě.)

(S 2 tabulemi.)

Předloženo dne 16. ledna 1914.

V případu cysty dentální shledány v dutině cysty amoebovité útvary, jež jsem učinil předmětem následující práce.

Cysta, jež pravděpodobně vycházela ze zbylé dutiny po extrakci vykotlaného zubu, získána byla operativním zákrokem v c. k. českém laryngologickém ústavu prof. dr. O. Frankenbergra a ve formolu konservována. Řezy byly barveny jednak *Delafieldovým* haematoxylinem, jednak *Heidenhainovým* železitým haematoxylinem. Teprve při vyšetřování fixovaného materialu byly amoeby konstatovány. Vyšetření konal jsem v ústavě prof. dra. V. Růžičky.

Jakkoliv bylo v řezech několik set útvarů podobných amoebám uloženo, a jakkoli velikou píli tomu jsem věnoval, přece nepodařilo se mně všechna stadia vývojová zjistiti, která bylo lze očekávati na základě analogie amoeb s jiných stran popsaných. Na tom vinu nesou jednak zvláštní poměry životní dotyčné amoeby, jednak upotřebená fixační methoda, málo vhodná ku studiu amoeb. Nalezl jsem i velmi mnoho obrazů, které bylo lze pojímati také jako epithelové buňky změněné pathologicky v útvary amoebám podobné. Snad i z oněch četných obrazů, jež zdály se podporovati výklad, že jde o degenerativní změny chromidialních zvířat, některé jest uvésti na takové buňky epithelové. Samozřejmo, že nahodilý nález vylučoval také vyšetření amoebovitých útvarů za živa, což by vzhledem ku určení druhu zaplašení různých pochybností a ku rozmanitým biologickým momentům bylo velmi žádoucno bývalo.

Ačkoli tedy uvedené okolnosti umožnily jen neúplný popis a velmi znesnadnily správné posouzení vyskytujících se obrazů, přece myslím, že uveřejnění jich je oprávněno.

Nález amoeby v pathologickém případu je zajisté zajímavým i tehdy, když nelze tu pathogenetického vztahu zjistiti. Jakkoli nemožno otázku

pathogenetického působení samozřejmě bez pokusu řešiti, a pokus ovšem zde možným nebyl, tedy přece dovoluji si zde k tomu poukázati, že nalezeny byly amoeby nejen v dutině cysty samé, nýbrž i v epithelu ano i pod epithelem, ba dokonce i dosti hluboko ve vazivu stěny cystové. Mimo to jde o případ vzácný, ne-li jedinečný. Nález amoeb nabývá avšak ještě větší zajímavosti tím, nelze-li je identifikovati s organismy, na něž by mohlo v podobném případu býti pomýšleno. A k této eventualitě by došlo, kdyby část mnou pozorovaných obrazů skutečně měla náležeti k životnímu cyklu nějaké amoeby. Než případ mnou popsaný byl by i tehdy zajímavý, kdyby se ukázalo, že část vyskytujících se obrazů nepochází od amoeb, nýbrž od pathologické změny epithelií stěny cystové, ježto by z toho vyplynulo, jak opatrně takové nálezy dlužno posuzovati. Naleziště připouštělo by zajisté možnost, že se zde jedná o *Entamoebu buccalis*, jež dostala se z dutiny ústní do dutiny cystové a zde se rozmnožila. Třeba že, jak již podotknuto vyšetření intra vitam bylo nemožno, přece bližším studiem, jak v následujícím líčení se ukáže, objevily se jisté odchylky, které jen s reservou by připustily stotožnění s *Entamoebou buccalis*. Rovněž nemůže býti zaměněn s *Entamoebou coli*, již bychom konečně snad též v úvahu bráti mohli, jak každému znalci zajisté bude zřejmo.

Do podrobnější klassifikace nalezené amoeby nechtěl jsem se však vzhledem ku četným nedostatkům ve vyšetřování pouštěti, ježto komplikované poměry v obsahu cystovém nedovolují žádného zcela bezpečného soudu.

Jelikož pozorování in vivo nebylo možným, může ovšem stanovení vývojového cyklu míti jen hypothetickou cenu. Nicméně posuzoval jsem skepticky nalezené obrazy a opíral se o ověřená fakta z literatury, takže závěry, k nimž dospívám, zajisté s jistou pravděpodobností pojímány býti mohou.

Velkost cystální amoeby ve vegetativním stavu jest, jak ve většině případů bývá, velmi různá; obnáší 13—66 μ, jestliže veliké buňky také ještě k amoebám počítáme; Není však vyloučeno, že představují jen přeměněné buňky epithelialní. Tvarem připomíná moje amoeba, pokud možno z fixovaných preparatů usuzovati, většinou t. zv. *amoeby hlemýžďové* (Limax-amoeben) (Obr. 2, 10, 13, 31). Rozlišení mezi ekto-a entoplasmatem bylo jen na malém počtu jedinců možno. (Obr. 1, tento připomíná nápadně Entamcebu buccalis); jeť známo, že působením zevních vlivů může hranice mezi nimi býti smazána, anebo vymizí vůbec často na fixovaných objektech. Ve vegetativních jedincích shledány někdy četné vakuoly, chovající obsah, jejž nebylo možno blíže určiti. Někdy mohl jsem ve vakuolách nalézti červené krvinky. (Obr. 13.) Ačkoli dutina cystální místy dosti četné bakterie obsahovala, přece nenalezl jsem ani jedné bakterie ve vakuolách amoeby.

Struktura protoplasmatu nebyla nikterak jednotnou. Nalezena byla typická alveolární struktura s malými a většími alveoly; na jiných exemplářích shledána vláknitá plsťovitá struktura, jež jevila se buď hustou

nebo řídkou, mnohdy jevila vlákna rozvětvení nebo provazcovitý průběh. Tyto vláknité struktury vyvolávaly význačný dojem proudů a vírů protoplasmových. Vlákna sama byla buď hladká a bezstrukturná anebo obsahovala do délky protáhlé chromatinové drobty anebo velmi malé kulovité chromioly, jež dodávaly jim vzhledu chondromitů. Formy právě popsané budí často podezření buď na degeneraci amoeb, mohly by však i jako degenerované, změněné epithelie býti pojaty. Ačkoli t. zv. přechodní obrazy jsou rázu velmi subjektivního, připomínám přece, že jsem mezi epitheliemi stěny cystové nalezl přechody k těmto posléze popsaným formám. Dle toho by cysta byla obsahovala amoeby smísené s epitheliemi různého stupně degenerace.

Rovněž vzhled jádra není nijak jednotný. Vegetativní individua jeví velmi často zdánlivé karyosomové jádro (Obr. 1.) jehož centriola pomocí lininových vláken jest spojena se zevní hranicí zóny jaderní šťávy; tato vlákna nejsou však v jiných stadiích viditelna, takže pak centriola leží úplně volně uprostřed pásma jaderní šťávy (Obr. 4, 6.) Na periferii zony jaderní mohou (jak vidno z obr. 1.) chromatinová zrnéčka nahromaděna býti, pásmo jaderní šťávy může však jich býti zcela prosto.

Na jednotlivých exemplářích (Obr. 2.) možno konstatovati obrazy, jež poukazují na to, že z centrioly zdánlivého karyosomového jádra odlučují se chromatinová zrnéčka, jež sledujíce průběh lininových vláken, ubírají se k perifernímu věnci chromatinovému. Zdá se, že toto pozorování poukazuje k tomu, že v obr. 1, 4, 6, zobrazená zdánlivě jednotná centriola vlastně představuje karyosom, v němž nedošlo ještě k differencování centrioly a zevního jádra. Tento výklad potvrzen je vzhledem jader zcela mladých amoeb, jež (obr. 4, 31.)jeví jen centrioly a pásmo jaderní šťávy chromatinu prosté. Je-li tento výklad správným, pak bylo by asi zapotřebí obr. 2. vykládati jako první naznačení oněch cyklických dějů v jádru, jež u amoeb ponejprv H a r t m a n n e m pozorovány byly. Tyto jevy jest tak pojímati, že vychází z centrioly množení chromatinu, jenž pak směrem ku periferii je pošinován.

Nalézáme pak na př. obrazy, kde centriola leží v karyosomu chromatinu prostém, obdaném pásmem šťávy jaderné, jež vykazuje radierní lininová vlákna, a obklíčeném věncem chromatinových zrnek (obr. 5.) jež tedy již v cytoplasmatu uložena jsou. Obraz tento však je dosti pochybný a představuje, možná, přeměněnou buňku epithelovou.

Obraz 6 a 3 náležející zcela nepochybným amoebám jeví jak se zdá fási, náležející mezi stadia obrazu 5 a 2. V obrazu 6. nalézáme na hranici karyosomu ještě několik málo chromatinových zrnek, kdežto zevní ohraničení pásma šťávy jaderní chová hojně chromatinu. V cytoplasmatu objevují se již ve skupinách malá k jádru radierně uložená chromatinová zrnéčka. V obr. 3. obdáno jádro již z části dosti silnou vrstvou těchto zrnéček.

Co se týče dělení vegetativních útvarů, mohl jsem konstatovati řadu obrazů, jež tento pochod, ač nikoliv bez mezer, přece však s pravděpodobností osvětlují.

Vezmou-li se za východisko obrazy 1 nebo 10, můžeme pak obrazy 9, 11, 13, 14, nechati následovat; zde jeví se již karyosom zaškrcený; obr. 14 pak asi jeví již také zaškrcení těla bunečného. Chceme-li tato stadia na základě viditelných jevů vyložiti, aniž bychom něčeho do nich vkládali, co by pozorováním nebylo oprávněno, nemůžeme asi jinak, než tento modus dělení označiti jako amitosu. Neboť není zde ani chromosomů, ani vřeten ani plotének aequatoriálních. Centriola se zaškrcuje, karyosom a pravděpodobně i cytoplasma sleduje toto zaškrcování analogickým pochodem.

Než tento způsob dělení nebyl jediným, jaký jsem ve svých preparátech mohl zjistiti. Obr. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 27 svědčí pro mitolické dělení. Obr. 18, 19, 20 jeví ve zřejmé chromosomy rozloženou aequatoriální ploténku. Obr. 19 a 20 pojímám jako dělení aequatoriální ploténky; na pólech obou figur lze centrioly dosti zřetelně konstatovati.

Dvojí průběh dělení jaderného, jaký jsem u amoeby v cystě přítomné právě zjistil, není u amoeb žádným zvláštním nálezem. (Viz. k. př. *Prowazek*, Arb. a. d. kais. Gesundheitsamt 22. 1905).

V době, kdy aequatoriální ploténka jednotnou se jeví, viděl jsem centrální vřetena jen homogenní; naproti tomu jeví se ve stadiu obrácení se chromosomů k pólům spojovací vlákna úplně, paprsky pólové pak aspoň z části (obr. 18, 19, 20.) zřetelnými.

Chromosomy možno na několika exemplářích z různých řezů zřetelně spočítati, dle těchto obrazů vytvářejí se 4 chromosomy. V hotových klidných jádrech mladých i starších forem však počet přítomných chromatinových drobtů kolísá v širokých hranicích; mladá jádra obsahují na periferii karyosomu zpravidla 5 chromatinových drobtů (obr. 32.) Popsaný pochod dělení jádra není zcela identický s popisem pro *Entamoebu buccalis*, již podal P r o w a z e k (Arb. aus d. kais. Ges. 21. 1904) Obrazů, jež by poukazovaly na vícenásobné dělení, nalezl jsem dosti málo. Obr. 22. jeví zdánlivě vegetativní individuum s třemi jádry, obr. 23. individuum se dvěma; Obrazy dovolují několikerý výklad: buď jedná se v obr. 23 o tvorbu druhotných jader z chromidia nebo jde o degeneraci dvojjaderného zvířete anebo konečně o degenerované epithelie. Tento výklad zdá se mi vzhledem ku pochybnostem, jež v poslední době vůči výše citovanému vzniku jádra u amoeb byly projeveny, a vzhledem ku zvláštním poměrům cysty, pravděpodobnějším.

Řada obrazů poukazuje, jak se zdá, na pohlavní pochody. Cysty, s nimiž v řezech dosti často se setkáváme, jsou malé, průměrně měří asi 22 μ, kulovité, mnohdy se zřetelnou dvojitou membranou (obr. 25, 26, 27.) Obr. 25, 26 jeví klidnou cystu. Na obr. 27 lze pozorovati dělení jádra cystového; obr. 28 ukazuje rozdělené jádro (cysta nezdá se však zcela normální).

Na obr. 29 znázorněno je vícenásobné dělení jaderní v cystě. Obr. 30 mohl by představovati důležité stadium, jelikož by mohl býti vykládán jako počátek gametogonního rozpadu cysty (vakuola!). Zda nějaký zbytek těla se zanechává, nemohu udati. V obr. 31 jsou vyznačeny útvary, jež by bylo lze míti za gamonty, odvoditelné ze stadia s předešlým analogního. Všecka právě popsaná stadia jest však s velkou reservou vykládati, ježto byla jen vzácně pozorována a ve směsi s degenerujícími epitheliemi snadno jsou možny záměny a klamné výklady. Velmi důležité stadium podařilo se mně, jak míním, zachytiti v obr. 32. Představuje, jak z porovnání s erythrocyty v okolí ležícími vysvítá, malý útvar, jenž obsahuje dvě dobře vyvinutá jádra karyosomová a vedle toho ještě dva v bezbarvých dvorečkách uzavřené chromatinové drobty. Jak velikost tak i podoba jádra odpovídají, jak plyne ze srovnání s obr. 12, následujícímu výkladu. Celý útvar je zřejmě *velmi dobře zachován*; načež obzvláštní důraz kladu. Neboť myslím, že nezacházím příliš daleko, když popsaný obraz pojímám jako právě proběhlé redukční dělení před kopulací. Kopulační děj sám nemohu však bohužel žádným obrazem doložiti. Zda snad útvary jako obr. 21 za kopulu považovány býti mohou, neodvažuji se rozhodovati z důvodů již častěji uvedených. Za autogamní děje mohou, jak již Hartmann (A. f. Prot. 24. 1912) upozornil, neprávem býti pokládány degenerační jevy uvnitř buňky amoebové. Takové obrazy, vysvětlitelné abnormální situací popsané amoeby, pozoroval jsem velmi často a vyobrazuji dva nápadnější případy v obr. 16 a 33b, z nichž poslední živě Hartmannovo vyobrazení (A f. P. 24. Tab. 16. obr. 31 (recte 32) připomíná. Degenerační jevy byly v mém případě vůbec velmi četné, což je snadno vysvětlitelno. Obzvláště objevovaly se degenerační příznaky na cystách a chromidiálních zvířatech. Zhroudovatělá jádra, špatná barvitelnost jich, jež by při nedostatečném ohledu na možnost degenerace mohly podnítiti myšlenku na fysiologickou atrofii jader ev. vznik jich z chromidiálních sítí*); tvoření se pigmentu v karyosomu (obr. 34.) a j., byly častým nálezem. Jako pravidelný jev mohl jsem konstatovati nepřítomnost jader v útvarech, která by mohla býti pokládána za chromidiální zvířata.

Domnívám se, že jádra jejich byla vyvržena, neboť jich uložení naznačeno prázdnou dutinou. (Obr. 35, 36, 37, 41.) Skutečnou příslušnost těchto buněk nebylo mi lze určiti. Mnohdy shledána však v takových zvířatech zhroudovatělá (obr. 16, 42) nebo špatně se barvící (obr. 38) nebo zase zcela normální, ba dokonce i dělící se jádra (obr. 39.) Mnohé z těchto obrazů lze pravděpodobně pojímati jako degenerativní pochody v útvarech epithelialních. Domnívám se, že *vyhradíme-li si pozdější opravy, jež vzhledem ku zmíněným již nedostatkům a mezerám pozorování, jakož i záměnám*

*) Tím nemá, jak se samo sebou rozumí v pochybnost býti brána udaj Hertwiga, Popoffa a j., již tyto důležité jevy na jiných objektech zjistili. Touto větou chci jen naznačiti, že jsem nenalezl žádných bezpečných podkladů proto, že by podobný děj nastával i u amoeby mnou pozorované.

s epitheliemi jsou možny — bylo by lze životní cyklus amoeby mnou nalezené stručně shrnouti následovně: Vegetativní individua množí se jednoduchým neb vícenásobným dělením. Během přechodu z vegetativního života k pohlavnímu možno zaznamenati značné rozmnožení chromatinu cytoplasmového. Následuje pak encystace, na počátku tohoto děje a v mladých cystách je rovněž mnoho chromidií přítomno. V cystách množí se jádra, a dochází pak konečně, když byly chromidie vymizely, k rozpadu cyst v malé, jednojaderné amoebky, jež fungují jako isogamonty, splývajíce vždy po dvou a nechávajíce kopulovati za úkazů redukčních svá jádra.

Jelikož obraz, který v tomto smyslu pojímám (obr. 32), sotva jiného vysvětlení připouští, a rovněž obr. 30 asi jinak vyložen býti nemůže, než jak mnou bylo udáno, nemůže zajisté ani závěr na kopulaci býti v pochybnost brán, ačkoli se mně nepodařilo zachytiti obraz, na kterém by splynutí isogamontů bez námitky mohlo býti konstatováno. Je-li tento výklad správným, pak jevila by moje amoeba podobný sexuální děj, jako *Entamoeba blattae* dle Mercier-a (A. f. Prot. 20. 1910) a *Amoeba minuta* dle Popoffa (A. f. Prot. 22. 1911.)

Po dokončené kopulaci roste amoeba vytvářejíc nové chromidie, až nastoupením nového rozmnožování dělením její vývojový cyklus se uzavře resp. počne znova.

Ještě jednou jest mi upozorniti na obtíže, jež se výkladu jednotlivých obrazů v mém případě v cestu kladou, tak že stále zůstává možnost, že přece by mohlo snad jíti o *Entamoebu buccalis* poněkud změněnou abnormními podmínkami životními. Jako známky, jimž se moje amoeba liší od typické *Entamoeby buccalis*, uvedl bych:

1. moje amoeba nejeví většinou žádného rozdílu mezi ekto- a entoplasmatem, jenž je pro *E. buccalis* význačný. Ovšem jsem pozoroval pouze fixovaný material.

2. je velikosti dvojnásobné. Dlužno však míti na mysli možnost záměn s degenerujícími epitheliemi, jež by mohly býti brány právě za ony veliké formy amoebovité.

3. obsahuje v jádru dosti mnoho chromatinu a má tenkou blánu jaderní; *E. buccalis* v obojím se chová opačně.

4. moje amoeba jeví velmi málo potravinných vakuol, jež nikdy neobsahují ani bezpečných bakterií, ani lenkocytů. Co se toho týče, bylo by však uvážiti abnormalní životní poměry, v nichž amoeba žila, ač na druhé straně cysta obsahovala dosti bakterií.

5. děje dělení jaderního a děje množení liší se od dějů těch u *E. buccalis*, pokud byly dosud popsány. Než právě v obrazech poukazujících na gametogonii nejsou v mém případě vyloučeny záměny ev. klamné výklady, vzhledem k degeneracím přítomných epithelií a k fixaci pro amoeby nevhodné.

Vzdor těmto odchylkám neodvažuji se však na základě mého materialu otázku identifikace rozhodnouti.

Poznámky všeobecně biologické.

Na konec poukázal bych na několik theoretických otázek všeobecně biologických, k nimž má pozorování se upínají. Jest to především poměr mitosy k amitose, k němuž ony organismy, vyznačené dvojím průběhem dělení jaderného poskytují příspěvek sotva nesrozumitelný. Ačkoliv ještě stále tu a tam zastáváno je tvrzení, že amitotické dělení nedosahuje téhož významu jako mitotické, nemůže přece toto tvrzení u organismu, u něhož oba druhy dělení jádra zastoupeny jsou aneho navzájem se střídají, podržeti platnost. Uváží-li se, že Gurwitschovi mechanickým zákrokem (centrifugováním), Haeckerovi, Natansohnovi a j. chemickými vlivy se podařilo mitosu v amitosu převésti, je jasno, že způsob dělení jádra závisí od zevních a vnitřních činitelů, jež na průběh dělení organismu samého a s ním spojené okolnosti (k. př. dědičnost) nemusejí vykonávati žádného vlivu. Vzpomeneme-li si okolnosti, že narkotiky možno mitosu amitosou zatlačiti, že narkotika pravděpodobně na lipoidy buněčné působí, že ale konečně dle Prowazka (Zool. Anz. 34. 1909. — Biol-Centrbl. 29, 1909) lipoidům velký význam v morfologii buňky přináleží — pak nebude snad možno domněnku, že závisí způsob dělení jádra na ovládajících právě poměrech lipoidů buničných, a priori zamítnouti. Otázka tato bude podrobena dalšímu výzkumu, jak zajisté zasluhuje.

Několika slovy zmínil bych se o vytváření se chromidií, specialně o otázce místa jejich vzniku. Werner a Hartmann vyslovili tvrzení, že u *Entamoeba histolytica* první vznik chromidií z karyosomu odvoditi nutno. Tomuto výkladu odpovídají mé obrazy, 8, 6, 3. Hartmann vyslovil domněnku, že chromidie vynikají heteropólovým dělením karyosomu, a že se snad vůbec nejedná o žádné pravé chromidie, nýbrž o odškrcení malých totipotentních jader. Tato domněnka souvisí s jeho theorií polyenergidních jader. Jsem dalek toho, abych tuto theorii jejíž oprávněnost v celé řadě případů nelze popříti, podroboval kritice, než zdá se mi přece odvážným spatřiti v každém od jádra odškrceném fragmentu chromatinovém celé malé jádro, když jiné důvody k tomu nenutí. Ostatně souhlasí mé obrazy (6, 8) úplně s udáním Schaudinnovým, dle něhož pravé chromidie vznikají ze zevního chromatinu karyosomu.

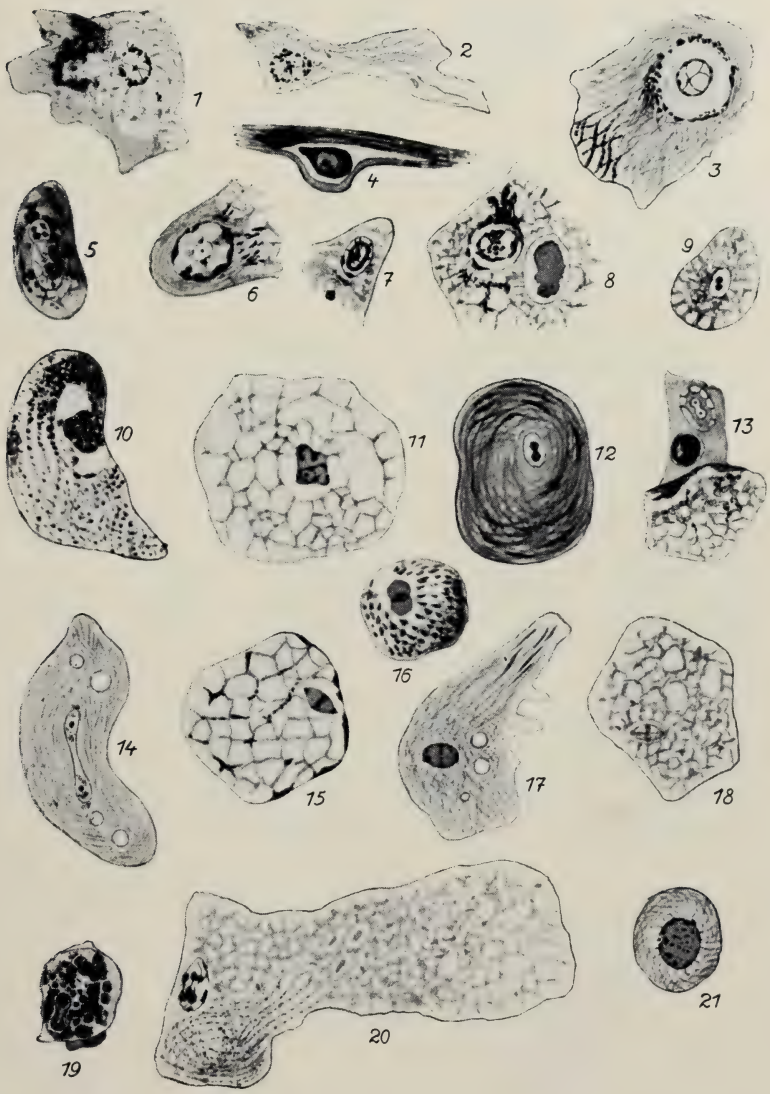
Správno je, co Hartmann uvádí o okolnosti, že jádro neobsahuje nikdy tolik chromatinu, kolik ho později v cytoplasmatu je obsaženo. Nutno prý připustiti, že se chromatin rozmnožuje. Ovšem zda se to děje dělením, nelze rozhodnouti. Vždyť mohlo by se i na to pomýšleti, že hmoty cytoplasmové samy přímo v chromatin proměniti se mohou, asi tím způsobem, jak Růžička byl zjistil pro první zrno chromatinové spór bakterií. K tomu poukazovaly by u mé amoeby dvě okolnosti. Poprvé enormní množství chromidií, jež konečně těla vegetativních zvířat vyplňuje a jež zřejmě ve tvaru chromiol seřazených plastinových vláknech se objevují a velmi živě připomínají chondromity známé z jiných objektů. Za druhé

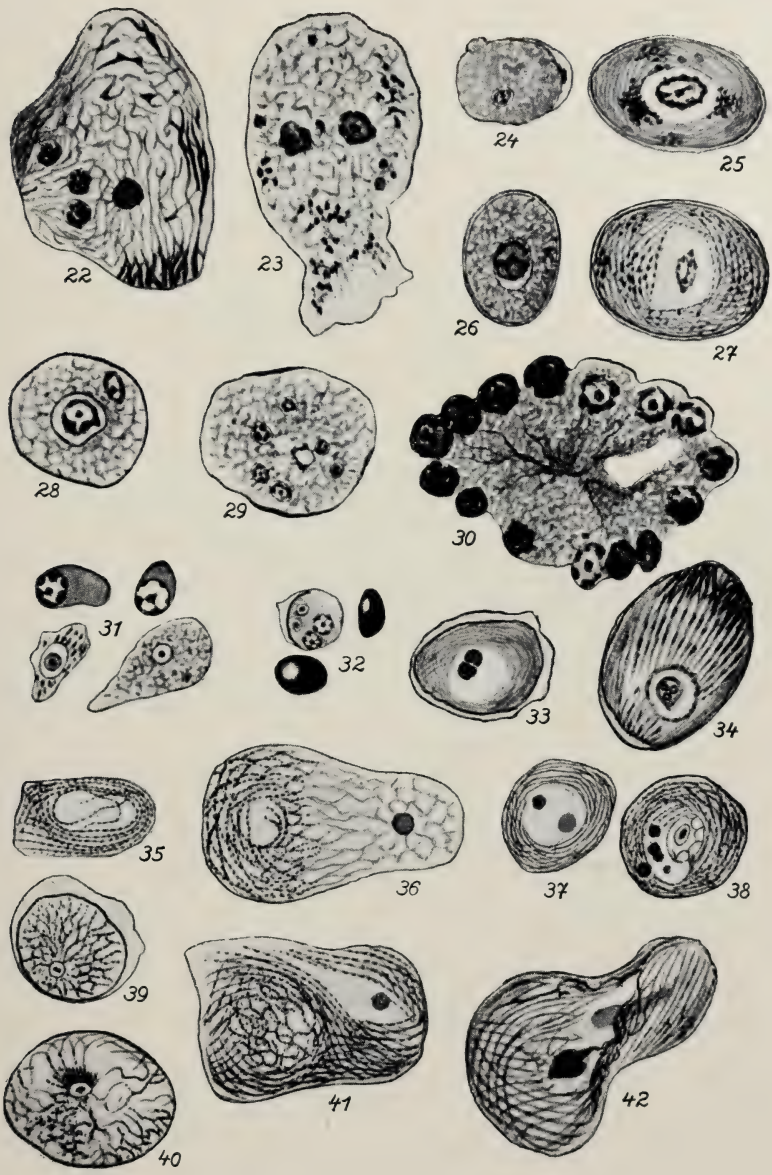
okolnosti, že tato forma tvorby chromidií mnohdy u téhož zvířete současně s karyosomální zjištěna býti může, a to na místě od jádra daleko vzdáleném (obr. 3.), aniž co na nějaký genetický vztah obou poukazuje. Karyosomální chromidie vyznačují se svou granulární formou. V cytoplasmatu nalézají se však často také podlouhlé chromatinové drobty (obr. 16, 17, 31, 34) nebo pruhy (obr. 15) ba dokonce i provazce (obr. 22, 42). Poslední nacházejí se však většinou v buňkách, o nichž soudím, že asi propadávají již degeneraci a jichž příslušnost k amoebě není zcela nepochybná.

Několika slovy zmínil bych se ještě o cyklických proměnách chromatinových, popsaných nejprve Siedleckim u *Caryotropha mesnili*. (Bull. Ac. sc. Krakov 1905) a oceněných co do jich významu pro amoeby Hartmannem. Jedná se při tom o vzrůst karyosomu a centrifugální transport jeho chromatinu. Jest to zjev povšechnějšího významu, jelikož byl také pozorován u centrálních zrn heliozoí a u některých centrosom vaječných. Mohla by se namanouti otázka, není-li možno třeba jen domněnkou tuto metabolickou strukturu kausálně vyložiti. Pozorujeme-li tyto obrazy, zvlášť ovšem ona stadia, kde centriol dvěma nebo třemi koncentrickými chromatinovými kruhy jest obdán, tu mimovolně vzpomeneme si na Küstrem nedávno studované Liesegangovy diffusní kruhy (Über Zonenbildung in kolloidalen Medien. Jena 1913). Dle toho jednalo by se asi při oněch cyklických chromatinových přeměnách o jevy diffusní, jichž centrum by leželo v centriole. Rhytmika jich dala by se pak pochopiti na základě fakt Růžičkou (Rozpr. č. akad. XVII 23. 1908 a XIX 15. 1910) zjištěných.

Dle jeho výkladů představuje chromatin fysikálně labilnější plasmové sloučeniny; mohl též ukázati, že množství chromatinu je v přímém poměru ku čilosti přeměny látkové. Na základě těchto výsledků je možno cyklickou měnu chromatinu jader amoebových pojímati jakožto výraz rythmických pochodů přeměny látkové. S názory Růžičkovými lze uvésti v souvislost též pozorování o tvorbě chromidií. Za vegetativní periody hromadí se chromidie, kdežto za doby klidu v cystě, kdy není žádná potrava přijímána, pozvolna jich ubývá. Tak dala by se pochopiti jak tvorba karyosomálních i cytoplasmatických chromidií, differencování karyosomálního zevního chromatinu a konečně i vegetativních chromidií s jednotného stanoviska a v případech, kde se vyskytují oba druhy chromidií, jež dle výkladů Růžičkových (Struktur u. Plasma, Wiesbaden 1907), R. Hertwigových (1907.) a j. jen kvantitativně se různí, na *jedné* — ovšem nejširší — basi spojiti.

Na konec ještě bych podotknul, že centriolu ve všech pozorovaných zajištěných normálních stadiích životního cyklu amoeby s bezpečností podařilo se zjistiti, čímž nálezy a postuláty Hartmannovy došly potvrzení.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21


22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42

22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42

O udržení konstantních obrátek strojů.

Napsal

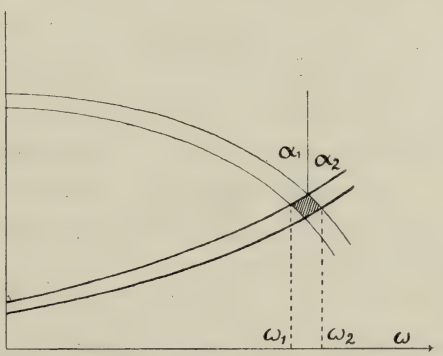
Dr. B. Macků.

Předloženo dne 17. ledna 1914.

Jednou z nejtěžších úloh, jež souvisí s problemem výroby elektrických oscillací dynamoelektrickým strojem, jest udržení konstantního kmitočtu oscillací aneb, což totéž jest, konstantních obrátek stroje. Důležitost úlohy této spočívá v tom, že kolísání kmitočtu elektromagnetických vln je pro zachycení jich skoro ekvivalentní zvýšení jich útlumu.

Abychom našli nějaké možné řešení udané úlohy, můžeme vyjíti od hledání podmínek obecných,[1]) jež jsou nutny pro docílení konstantních obrátek.

Úloha tato byla by rozřešena, kdybychom dovedli udržeti konstantními jak pracovní effekt do stroje dodávaný, tak i effekt v něm spotřebovaný [2]) Obě podmínky však, a jmenovitě druhou, není prakticky možno dostatečně přesně realisovati.



Obr. 1.

Znázorníme-li si skutečné poměry graficky, pak obdržíme asi obr. 1, v němž slabě vytažené křivky značí horní a spodní mez effektu do stroje dodávaného, jak závisí tento na obrátkách stroje. (Budiž vzat za podklad třebas stejnosměrný motor elektrický poháněný akkumulatory, u něhož jsou poměry velmi příznivé.) Silně vytažené křivky značí opět horní a spodní mez spotřebovaného

[1]) Budiž připomenuto, že pravidla dále odvozená platí pro dynamickou rovnováhu i jiných energií než jen kinetické, po případě mohou býti obdobně odvozena.

[2]) Nečítaje v to ovšem změnu kinetické energie, neboť v tu přebytečná dodávaná energie se mění, respektive z ní nedostatek dodávané se uhrazuje.

effektu ve stroji (když motor je zatížen, ku př. stejnosměrným dynamem; při tom ztráty v motoru samotném jest ovšem třeba čítati k zatížení motoru).

Ploška omezená všemi čtyřmi křivkami (v obraze vyčárkovaná) dává všemi svými body všechny možné poměry, t. j. pokud počtu obrátek se týče, může tento kolísati mezi oněmi hodnotami ω_1 a ω_2 (přesně děleno 2π), jichž rozdíl jest dán horizontální šířkou této plošky

Jedná se tedy o to zvoliti poměry takové, aby tento rozdíl (správněji procentová jeho hodnota) byl co nejmenší. Rozdíl tento se zmenší, jestliže hraničení čáry se k sobě více posunou. Tím nabýváme však dříve zmíněné podmínky, již nad jistou (nevyhovující) mez nelze splniti Předpokládejme tedy, že nedovedeme zmenšiti určité procentové kolísání obrátek, t. j. že nedovedeme zmenšiti procentovou vertikalní vzdálenost k sobě příslušných křivek.

Rozdíl $\omega_1 - \omega_2$ vyjde však pak menší, zmenší-li se úhel α_1 neb α_2, což však značí následující požadavky.

1. Zvoliti takový motor, při němž strojem přijímaný pracovní effekt v okolí žádaného počtu obrátek s rostoucím jich počtem rychle klesá. (Pro stejnosměrný motor elektrický jest možno snadno vhodné podmínky stanoviti. Není však vyloučeno, že dobré služby konati by mohly i motory indukční, u nichž sice dá se očekávati značné kolísání následkem nestálosti proudového zdroje, za to však mají velmi prudký spád přijímaného effektu v blízkosti synchronismu.)

2. Anebo voliti takové zatížení motoru, při němž spotřebovaný pracovní effekt rychle s rostoucími obrátkami roste. Z tohoto důvodu jest zatížení stejnosměrným dynamem, značně výhodnější než pouhé brzdění. Nejvýhodnějšího zatíženi jest však možno docíliti kmitajícím resp. oscillujícím systemem. A tato okolnost jest jádrem celé věci.

Kdežto při zatížení jakýmkoliv rotujícím systemem spotřebovaný pracovní effekt (W) dá se vyjádřiti formou

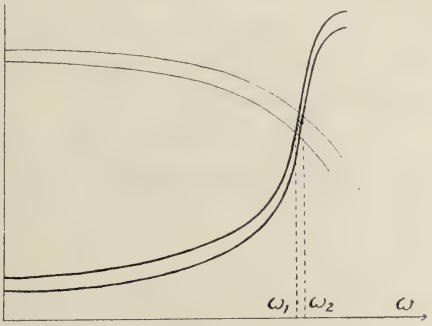
$$W = A_0 + A_1 \omega + A_2 \omega^2 + \ldots$$

kdež při vhodné konstrukci možno dosíci i vyšších mocnin obrátek ω) Naproti tomu při oscillujícím systemu o vlastním kmitočtu $\Omega : 2\pi$ a logarithmickém dekrementu $\mathfrak{d}$ bude týž effekt dán tvarem:

$$W = W_0 + \frac{B}{\left(\frac{\Omega - \omega}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{d}}{2\pi}\right)^2}$$

kdež W_0 značí ztráty, jež s vlastním oscillováním systemu nemají co činiti. Ztráty tyto jsou ovšem závisly od ω avšak v blízkosti resonance jest změna jich s počtem obrátek značně menší než členu druhého.

Případ motoru zatíženého systemem oscillujícím jest schematicky znázorněn obrazem 2. Srovnáme-li obraz tento s předešlým, pak pozorujeme, že při stejném procentovém kolísání effektů vyjde nyní ploška ona (čárkovaná) velmi úzkou, neboť v blízkosti resonance vzrůstá spotřebovaný effekt při málo tlumeném systemu velmi prudce, a příkrost vzrůstu tohoto může býti ještě v mezích možné proměny útlumu libovolně regulována.



Obr. 2.

Budiž tu výslovně upozorněno, že oscillující system nemusí býti elektrický.[1]) Jest pouze třeba, aby vyhovoval těmto podmínkám.

1. Kmitočet tohoto systemu musí býti procentově aspoň tak daleko konstantní, jak mají býti konstantními žádané obrátky. Podmínku tuto jest možno jistě jak mechanicky, tak elektricky splniti.

2. Zvýšení křivky spotřebovaného effektu, způsobené oscillujícím systémem, musí býti značně veliké alespoň proti kolísání tohoto effektu. Značný tento pracovní effekt spotřebuje se v oscillujícím systemu. Tím však nemá býti řečeno, že by energie tato musila se proměniti jen v teplo, nýbrž je nutno, aby přešla v takovou nějakou formu, jež nemůže se přímo v tomže systemu proměniti zpět v kinetickou energii motoru (může však býti ku př. vyzářena jako energie elektromagnetická).

3. Zmíněné zvýšení křivky musí býti dostatečně strmé. To však vyžaduje, aby system byl málo tlumený. Následkem podmínky 2. musí však v systemu tomto nashromážděná energie býti značně veliká, jistě větší nežli energie za jednu periodu v celém systemu spotřebovaná.

4. Žádanému počtu obrátek musí odpovídati bod na vzestupné části křivky. S tím souvisí však, že oscillující system nesmí býti s počtem obrátek v resonanci, nýbrž jeho kmitočet musí býti poněkud vyšší.

Užijme nyní pravidel těchto na soustrojí sestávající z motoru a dynamoelektrického stroje na oscillace. Na první pohled mohlo by se zdáti, že podmínky ony jsou tu zachovány, avšak není tomu tak.

1. Všechny známé dynamoelektrické stroje na oscillace nejsou systemem málo tlumeným, nýbrž silně tlumeným, a z toho důvodu křivka spotřebovaného effektu není dosti příkrou.

2. Při sladěných strojích (jak se jich užívá) dostáváme se na vrchol oné křivky, tedy do polohy, jež při nedostatečně klesající křivce dodávaného effektu může býti dokonce labilní.

---

[1]) Velmi známým příkladem jsou jakékoliv hodiny mechanicky regulované.

Dle toho je pro stabilitu kmitočtu oscillací dynamoelektrického stroje vyhověti těmto podmínkám:

1. Počet obrátek stroje musí býti poněkud nižší než by odpovídal vlastnímu kmitočtu stroje samotného.

2. Dynamoelektrický stroj na oscillace je nutno proměniti v system málo tlumený. Jak je možno proměnu tuto provésti, o tom jedná obšírněji pojednání zvláštní.[1])

Brno, česká technika.

---

[1]) B. Macků. Energetické poměry netlumených oscillací ve dvou spražených kruzích. Budiž tu však připomenuto, že v případě $b_1 > b_2$ je pak nutno přejíti maximum až na levou jeho stranu, čímž však výhodné poměry jen málo se zhorší.

Energetické poměry netlumených oscillací ve dvou spřažených kruzích.

Napsal

Dr. **B. Macků.**

S obr. v textu.

(Předloženo dne 16. ledna 1914.)

Všechny dynamoelektrické generatory elektrických oscillací představují oscillující kruhy silně tlumené, neboť je nutno u strojů těchto jich magnetická pole vyplniti železem; mění se tedy v nich v každé periodě značná část nahromaděné energie v nevyužitelnou energii tepelnou. Povstává tu tedy důležitá otázka, zda jest vůbec možno, po případě jak by bylo možno tyto ztráty zmírniti. Nejvíce na snadě leží tu způsob ten, ve stroji povstalou energii elektrických oscillací ze stroje pokud možno rychle odvésti, což může se státi oscillačním kruhem na stroj připřaženým. Jedná se tedy o to, najíti podmínky pro nejvhodnější konstrukci tohoto připřaženého kruhu.

Ve dvou spřažených oscillujících kruzích vznikají oscillace o kmitočtu i útlumu různém než jsou kmitočty a útlumy kruhů nespřažených. Mohlo by se tedy zdáti, že daná úloha jest rozřešena, volíme-li podmínky takové, aby jedna ze skutečně vznikajících vln byla pokud možno málo tlumená a aby kmitočet netlumených oscillací stroje byl roven jejímu kmitočtu. Tak jednoduchou však úloha tato není, neboť má-li system tento jako celek býti považován za málo tlumený, pak nestačí ještě, aby jedna z jeho vln byla málo tlumenou, nýbrž musí mimo to energie této vlny býti značnou proti oné, jež jest značně t umena.

Měla-li by se pak úloha touto cestou řešiti, pak povstává značná početní obtíž v tom, že útlumy oscillací skutečně vznikajících závisí nejen od rozdílu kmitočtů kruhů nespřažených, nýbrž i od koefficientu spřažení.[1])

[1]) Viz B. Macků: Jahrbuch f. drahtl. Telegr. III. 1910 pg. 332, rovnice 13.

Jest tedy nutno nastoupiti cestu jinou. Vhodnou jest ta, při níž vezmeme v úvahu různé tu se vyskytující energie.

Pro jednoduchost počtu bude stroj v něm representován pouze jediným oscillujícím kruhem (t. j. oním o nejvyšším kmitočtu)

Zn čí-li

$$E = E_0 \sin \omega t$$

elektromotorickou sílu stroje pro utlumené oscillace pak platí pro dva spřažené kruhy:

$$L_1 \frac{d J_1}{d t} + R_1 J_1 + \frac{1}{C_1} \int J_1 \, d t = E + M \frac{d J_2}{d t}$$

$$L_2 \frac{d J_2}{d t} + R_2 J_2 + \frac{1}{C_2} \int J_2 \, d t = M \frac{d J_1}{d t}$$

aneb

$$V_1'' + 2 \delta_1 V_1' + b_1 V_1 = b_1 E + k_{12} V_2''$$

$$V_2'' + 2 \delta_2 V_2' + b_2 V_2 = k_{21} V_1''$$

jestliže značí

$$J_1 = C_1 V_1' \qquad J_2 = C_2 V_2'$$

$$\delta_1 = \frac{R_1}{2 L_1} \qquad \delta_2 = \frac{R_2}{2 L_2}$$

$$b_1 = \frac{1}{L_1 C_1} \qquad b_2 = \frac{1}{L_2 C_2}$$

$$k_{12} = \frac{M C_2}{L_1 C_1} \qquad k_{21} = \frac{M C_1}{L_2 C_2}$$

$$k^2 = k_{12} k_{21}$$

Pro stationarní stav platí pak:

$$V_1 = E_1 \sin (\omega t + \varepsilon_1) \qquad J_1 = C_1 E_1 \omega \cos (\omega t + \varepsilon_1)$$

$$V_2 = E_2 \sin (\omega t + \varepsilon_2) \qquad J_2 = C_2 E_2 \omega \cos (\omega t + \varepsilon_2)$$

kdež znamená:

$$E_1^2 = \frac{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2}{P^2 + Q^2} b_1^2 E_0^2$$

$$E_2^2 = k^2 \frac{L_2}{L_1} \frac{\omega^4}{P^2 + Q^2} b_2^2 E_0^2$$

$$tg \, \varepsilon_1 = - \frac{(b_2 - \omega^2) Q - 2 \delta_2 \omega P}{(b_2 - \omega^2) P + 2 \delta_2 \omega Q}$$

$$tg \, \varepsilon_2 = - \frac{Q}{P}$$

$$P = (b_1 - \omega^2 (b_2 - \omega^2) - 4 \delta_1 \delta_2 \omega^2 - k^2 \omega^4$$

$$Q = 2 \omega \{ {}_1 (b_2 - \omega^2) + \delta_2 (b_1 - \omega^2) \}$$

Energie, jež se za každou periodu spotřebuje v kruhu primarním (W_1) neb sekundarním (W_2), je dána výrazy:

$$W_1 = R_1 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} J_1^2 \, dt = \frac{\pi \omega \delta_1}{L_1} \frac{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2}{P^2 + Q^2} E_0^2$$

$$W_2 = R_2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} J_2^2 \, dt = \frac{\pi \omega \delta_2}{L_1} \frac{k^2 \omega^4}{P^2 + Q^2} E_0^2$$

a energie W, jež se spotřebuje v celém systemu,

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\pi \omega}{L_1} \frac{\delta_1 \{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2\} + k^2 \delta_2 \omega^4}{P^2 + Q^2} E_0^2$$

Celá energie nahromaděná v kruhu primarním (U_1) neb sekundarním (U_2) je rovna maximalní elektrostatické a tedy:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 E_1^2 = \frac{1}{2 L_1} \frac{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega_2^2}{P^2 + Q^2} b_1 E_0^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 E_2^2 = \frac{1}{2 L_1} \frac{k^2 \omega^4}{P^2 + Q^2} b_2 E_0^2$$

a energie v celém systemu nashromážděná

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2 L_1} \frac{b_1 \{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2\} + k^2 b_2 \omega^4}{P^2 + Q^2} E_0^2$$

Poněvadž logarithmický dekrement útlumu pro jednoduchý oscillující kruh jest (při malém útlumu) též dán poměrem oné energie, jež za jednu periodu v kruhu tom se spotřebuje (promění v teplo, záření atd.), k energii v kruhu tom nashromážděné, budu v dalším *logarithmickým dekrementem systemu* rozuměti výraz tímto poměrem (pro system) definovaný.[1])

V případě našem vychází pro logarithmický dekrement horním způsobem definovaný:

$$\Delta = \frac{\omega \delta_1}{b_1} \frac{1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{k^2 \omega^4}{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2_2 \omega^2}}{1 + \frac{b_2}{b_1} \frac{k^2 \omega^4}{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2}}$$

Výraz tento bude co nejmenší (předpokládaje δ_2 značně menší než δ_1) a sice bude se blížiti hodnotě $\frac{\delta_2}{b_2}$, bude-li splněna podmínka, že

$$(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2 \quad \textit{jest malé proti} \quad k^2 \omega^4.$$

[1]) Není snad zbytečno upozorniti na to, že tento poměr jest závislý od formy oscillací skutečně v kruhu probíhajících, a že tedy byl by jiný pro oscillace tlumené, jež by vznikly po vypnutí zdroje, než je při netlumených oscillacích zdrojem udržovaných.

Podmínka tato vyžaduje však

1. Aby kmitočet nespřaženého sekundarního kruhu byl pokud možno blízký kmitočtu netlumených oscillací (t. j. $b_2 \doteq \omega^2$).

2. Aby koefficient spřažení byl značný (aspoň proti rozladění sekundarního kruhu)

Pro ten případ, že platí

$$b_2 = \omega,$$

obdržíme

$$\Delta = \frac{\delta_2 \omega}{b_2} \frac{1 + \frac{4 \delta_1 \delta_2}{k^2 \omega^2}}{1 + \frac{b_1}{b_2} \frac{4 \delta_1 \delta_2}{k^2 \omega^2}}$$

Je-li tedy koefficient spřažení dostatečně veliký, pak rozhoduje o dekrementu celého systemu dekrement málo tlumeného kruhu sekundarního.

Pokud se týče závislosti dekrementu Δ od relativní velikosti b_1 a b_2, je patrno, že závislost tato následkem malé hodnoty výrazu $\frac{4 \delta_1 \delta_2}{k^2 \omega^2}$ jest nepatrná, přece však dekrementu toho s ubývajícím b_1 ubývá. Pro specielní případ

$$b_2 = \omega \qquad b_1 = o$$

vyjde

$$\Delta = \frac{\delta_2 \omega}{b_2} \left(1 + \frac{4 \delta_1 \delta_2}{k^2 \omega^2}\right)$$

Právě jako dekrement útlumu Δ jest důležit též poměr (η) energií spotřebovaných v kruhu sekundarním a primarním. Neboť malý dekrement by neměl žádné ceny, kdyby větší část energie byla bez užitku v primarním kruhu proměněna v teplo. Má-li totiž útlum kruhu sekundarního původ svůj především v záření tohoto kruhu, pak udává udaný poměr též poměr energie využité (v záření proměněné) k oné, jež se v primarním promění neužitečně v teplo. Ale ovšem i v tom případě, že jenom část energie v sekundarním kruhu spotřebované se vyzáří, roste ekonomie systemu s rostoucím poměrem η.

Z dřívějších rovnic vychází:

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{k^2 \omega^4}{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2}$$

Z výrazu tohoto je patrno, že podmínka pro malý dekrement jest identickou s podmínkou pro ten případ, aby co nejvíce ze spotřebované energie připadalo na kruh sekundarní, a vychází tedy odtud, že s ubývajícím dekrementem systemu roste jeho ekonomie. —

Pro poměr (ε) energie nashromážděné v sekundarním a primarním kruhu vychází

$$\varepsilon = \frac{U_2}{U_1} = \frac{b_2}{b_1} \frac{k^2 \omega^4}{(b_2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2}$$

aneb s ohledem na rovnici předcházející

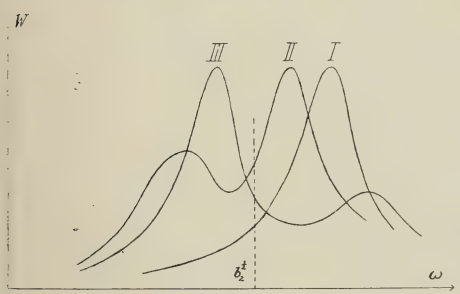
$$\varepsilon = \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{b_2}{b_1} \eta$$

Z relace této vychází, jakž se dalo čekati, že při malém útlumu systemu se energie hromadí především v málo tlumeném kruhu sekundarním.

Všimněme si ještě blíže výrazu pro celou spotřebovanou energii, neboť výraz tento charakterisuje výkonnost systemu.

Dle dřívějšího platí

$$W = \frac{\pi \omega}{L_1} \frac{\delta_1 \{(b - \omega^2)^2 + 4 \delta_2^2 \omega^2\} + k^2 \delta_2 \omega^4}{\{(b_1 - \omega^2)(b_2 - \omega^2) - 4 \delta_1 \delta_2 \omega^2 - k^2 \omega^4\}^2 + 4 \omega^2 \{\delta_1 (b_2 - \omega^2) + \delta_2 (b_1 - \omega^2)\}^2} \varepsilon_0^2$$



Znázorníme-li W graficky jako funkci ω pro různé hodnoty b_1 (zachovávajíce b_2 stále týmž), pak obdržíme křivky tvaru, jak schematicky jsou provedeny na obr. 1 a to

křivka I pro $b_1 > b_2$
„ II „ $b < b_2$
„ III „ $b_1 = o$

Pro nejpříznivější případ, totiž

$$b_2 = \omega^2$$

obdržíme na křivkách bod tento vždy značně daleko od maxima křivky (ba blízko minima, jestli jaké má) a to tím dále, čím těsnější jest spřažení. Výsledek tento praví však, že v nejpříznivějším případě (t. j. pro nejmenší dekrement) jest výkonnost systemu malá a mohla by býti zvětšena jen zvětšením elektromotorické síly zdroje E_0, což ovšem není vhodné.

Z důvodu toho hledejme, jak daleko zůstanou splněny příznivé poměry (t. j. malý útlum a velký poměr mezi spotřebovanou energií v kruhu sekundarním a primarním) nesplníme-li, podmínku pro případ nejvhodnější ($b_2 = \omega$), ale volíme-li ω tak, abychom docílili přibližně maxima výkonnosti (výrazu W).

Považujeme-li W za funkci ω, pak dává resonanční křivku systemu a pro maxima této platí (s dostatečnon přesností [1])

$$\omega^2 = \frac{b_1 + b_2}{2(1 - k^2)} \left\{ 1 \pm \sqrt{k^2 + (1 - k^2) \left(\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \right)^2} \right\}$$

[1]) Macků, l. c. pg. 333.

Omezme se v dalším na tři specielní případy, totiž

$$1.\ b_1 = o \qquad 2.\ b_1 = b_2 \qquad 3.\ b_1 = 2\,b_2$$

a volme spřažení tak těsné, aby bylo $(b_2 - \omega^2)^2$ proti $4\,\delta_2^2\,\omega^2$ velikým, takže toto proti onomu mužeme přibližně zanedbati. Mimo to omezme se na maximum bližší hodnotě $\omega^2 = b_2$, t. j. na maximum vyšší.

1. Pro první případ vychází

$$\omega^2 = \frac{b_2}{1 - k^2}$$

$$\Delta = \frac{\delta_2 + k^2\,\delta_1}{b_2}\,\omega$$

$$\eta = \frac{\delta_2}{k^2\,\delta_1}$$

Poněvadž i při těsném spřažení zůstane tu k^2 proti 1 dostatečně malým, dává případ tento poměry velmi příznivé.

2. Pro druhý případ, t. j. $b_1 = b_2 = b$ vychází:

$$\omega^2 = \frac{b}{1 - k}$$

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\,b}\,\omega$$

$$\eta = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

V tomto případě jsou poměry málo příznivy. Dekrement útlumu klesne jen as na poloviční hodnotu (je-li δ_1 proti δ_2 značné) a v kruhu primarním spotřebuje se značně více energie než v sekundarním.

3. Konečně v třetím případu, t. j. $b_1 = 2\,b_2$, obdržíme, jestliže zanedbáme vyšší mocniny k^2 proti jedničce,

$$\omega^2 = \frac{b_2\,(1 - 2\,k^2)}{1 - k^2}$$

$$\Delta = \frac{k^2\,\delta_1 + (1 - 2\,k^2)^2\,\delta_2}{2 + (1 - 2\,k^2)^2}$$

$$\eta = \frac{\delta}{\delta_1}\,\frac{(1 - 2\,k^2)^2}{k^2}$$

Tedy i v tomto případě nabudeme vhodných poměrů.

Z uvažovaných specialních případů je možno souditi, že příznivé poměry potrvají i pro ty případy, kdy volíme b_2 tak, aby bylo dosaženo maxima výkonnosti (t. j. hodnoty W), předpokládaje však, že zůstane b_2 značně rozdílným od b_1.

Resumé. Jest dokázáno, že těsným připřažením slabě tlumeného oscillujícího kruhu na kruh silně tlumený je možno dosíci pro utlumení oscillace systemu slabě tlumeného. V systemu tomto spotřebuje se (vyzáří) většina energie v kruhu sekundarním. Výkonnost systemu může býti stupňována až k jejímu maximu. Podmínky pro poměry tyto nutné jsou udány v pojednání samém.

Poznámka 1. Úvahy byly zde prováděny za předpokladu, že zdrojem netlumených oscillací jest dynamoelektrický generator. Není však vyloučeno, ba velmi pravděpodobno, že tytéž vhodné podmínky mohou býti docíleny i při generatoru obloukovém.

Poznámka 2. Otázka, zda kruh sekundarní bez praktických obtíží může zastupovati ihned antena, může býti řešena v prvé řadě jen pokusně, a proto není možno na ni dáti definitivní odpověď.

Brno, česká technika.

O předhistorických psech z okolí Podbaby u Prahy.

Napsal *Zdenko Frankenberger* v Praze.

S 2 obrazy v textu.

(Předloženo dne 28. listopadu 1913.)

Domácí psi z českých nalezišť předhistorických nejsou zjevem zrovna nejhojnějším a proto také naše literatura z oboru toho je u srovnání s cizími, hlavně německou a francouzskou, více než chudá. Nepočítáme-li práce o diluviální fauně (Woldřich, ostatně nekritické, Maška, Kafka, Kříž a j.), kde domácím zvířatům vůbec věnováno poměrně málo pozornosti a které jsou jedinými prameny literárními o našich *Canidách*, nenalézáme vlastně ničeho, kde by byly zmínky o domácím psu z mladších dob předhistorických. Proto byl jsem velice povděčen p. MUC. J. Jírovi, jenž svěřil mi ku zpracování svůj materiál předhistorických psů z Podbaby, kteří byli nalezeni na jakémsi hřbitůvku psím s průvodem koloniální keramiky římské a jež p. Jíra datuje asi do 2.—4. století po Kristu. Úvodem budiž mi dovoleno podati stručný přehled dnešního stavu otázky o původu psích rass vůbec.

Názory o původu dnešních rass psích byly až do konce předešlého století velmi nejasné. Zcela zbytečně vyhledáváni předkové dnešních psů mezi jejich recentními příbuznými, při čemž bráni v úvahu nejrůznější zástupci čeledi *Canidae*: vlci, šakalové, australský dingo atd., a nepováženo, že tito divocí příbuzní našich psů stojí k nim v takovém asi poměru, jako dodnes žijící některé divoké druhy *Bovid* (zubr, yak, buvoli) k domácímu skotu nebo volně žijící *Equidae* (zebry, kvaggy) k domácímu koni. Teprve Th. Studer[1]) (1901) vyslovil názor, že předka psa domácího nutno hledati v některé diluviální formě, jež není identická ani s vlkem, ani šakalem, ani Cuonem neb kterýmkoli jiným druhem fossilních (nebo i recentních) *Canid*, nýbrž ve tvoru, jenž jistě již patří k tvarovému okruhu druhu *Canis familiaris L.* nebo již přímo k tomuto druhu, ale stojí níže

[1]) Die prähistorischen Hunde in ihrer Beziehung zu den gegenwärtig lebenden Rassen. Abh. d. Schweiz. paläontologischen Gesellschaft XXVIII. 1901.

než všecky recentní rassy psí. Taková forma skutečně také později zjištěna v diluviu ruském (z Bologoje) knížetem P. A. Putatincm a nazvána *Canis Poutiatini* (Th. Studer[2]). Tato diluviální forma podobá se nejvíce australskému dingo, nebyla asi ještě úplně domestikována a byla jen průvodcem palaeolithického člověka na jeho lovech. Teprve později byla domestikována a dala původ různým rassám buď přímým vývojem a vlivem domestikace, nebo křížením s divokými *Canidami* (resp. vlkem). Přímými potomky byli by: *Canis familiaris intermedius*, Woldř. z doby bronzové, jenž jest předkem honicích psů v nejširším slova smyslu (ohaři, španělé, brak, setter atd.), a *C. f. matris optimae* Jeitt. (rovněž v době bronzové), z něhož vyvinul se čistý pes ovčácký; mimo to z menší formy tohoto diluviálního předka, *Canis Mikii* Woldř., povstal *C. f. palustris* Rütim. z kolových staveb švýcarských (Rütimeyer 1860, 62), jenž opět jest praotcem malých rass: pinčů, špiclíků, terrierů, čínského čau-čau a některých *menších* psů polárních. Chrti představují dle Studera domestikací změněné potomky pariů, které možno odvoditi přímo z diluvialního předka. Ostatní velké rassy psů povstaly křížením s vlkem; jsou to neolithický *C. Inostranzewi* Anučin, (Kellerem pokládaný za vlka), jenž je předkem velkých psů eskymáckých (sibiřských a skandinavských), psa svatobernardského a novofoundlandského a posléze dogg, bulldogů, boxerů a pod.) a *C. Leineri* Stud., pocházející rovněž z neolithu, předek hrubosrstého chrta škotského (deerhound) a irského vlkodava. O původu jich z křížení divokého psa a vlka svědčí též ta okolnost, že ještě dnes skřížením některé primitivnější rassy psí (na př. psa ovčáckého) s vlkem dostaneme potomky blízké doggám (ať moderním nebo praehistorickým) (Th. Studer 1907).

Tak zdál se problém původu rass psích zcela vyjasněn; avšak Maška[3]) zjistil, že Woldřichův *C. Mikii* není nic jiného nežli liška a rovněž zbytky, na jichž základě popsán *C. hercynicus* Woldř., dříve již jen za štěně pokládaný, patří lišce (polární). Tím vypadl sice jeden dosti důležitý spojný bod mezi psy diluviálními a mladšími rassami předhistorickými, ale v celku názor Studerův zůstane asi správným. Mimo to obohatil Maška faunu českých fossilních *Canid* nálezem druhu *Cuon* (recte *Cyon*) *europaeus* Bourg., ze Srbské sluje u Berouna, jenž dosti hojně přichází sice v štramberských jeskyních na Moravě, ale z Čech až do té doby nebyl znám. Proti tomuto *monofyletickému* názoru o původu psích rass, jehož hlavním — a skoro jediným — zastancem je dnes Th. Studer, stojí názor t. zv. *polyfyletický*, dle něhož jednotlivé rassy psí povstaly z různých druhů rodu *Canis* L., jejichž charakter i nyní

---

[2]) Étude sur un nouveau chien préhistorique de la Russie. L'Anthropologie XVI. 1905. — Über einen Hund aus der paläolithischen Zeit Rußlands. Canis Poutiatini. Zoologischer Anzeiger XXIX. 1906.

[3]) Diluviální pes v Čechách a na Moravě. Věstník IV. sjezdu českých přírodopytců a lékařů 1908.

ve své domestikované formě více méně věrně podržují. První s názorem takovým vystoupil Geoffroy St. Hilaire, později též L. H. Jeitteles[4]) a Nehring[5]) se k podobné theorii přidali, a v době nejnovější velice houževnatě ji hájí proti Studerovi C. Keller.[6]) Dle těchto autorů povstaly jednotlivé rassy psí z různých divokých předků na různých místech; a tu nejpůvodnějším obyvatelem Evropy je skupina špiclů, jež pomocí druhu *Canis familiaris palustris* Rütim. ze staveb kolových odvozuje se přímo od šakalů, snad přímo od *C. aureus* L.

Poměrně nízko stojící rassou jsou psi ovčáčtí, jejichž tvar ukazuje spíše na předky vlkovité; nejspíše uznává se za předka toho indická forma našeho vlka zvaná *Canis pallipes* Sykes. Do Evropy byl zaveden zároveň s kulturou bronzovou, jejíž původ klade se do Orientu a zachoval se nám z doby té jako *C. familiaris matris optimae* Jeitt. Třetí forma ze starších dob předhistorických, *C. intermedius* Woldř., povstala snad zkřížením obou forem jmenovaných (*palustris* a *matris optimae*) a spolu s vlivy ještě později zavedených prvků dala původ psům honicím. Pro celou velkou skupinu chrtů hledá Keller praotce v Africe, kde habešský dlouhonohý a dlouholebý *Canis simensis* Rüpp. zdá se mu nejspíše vyhovovati představě předka těchto už ze starého Egypta známých psů. Konečně velké rassy dogg, psů svatobernardských a novofoundlandských, bulldogů a (zmenšením těchto povstalých) mopsů odvozuje od tibetského mastiffa (tarače), známého už ze starověku, jenž jest prý nejspíše domestikovaným potomkem tibetského vlka (*Canis niger* Sclater).

Každý z těchto dvou názorů (monofyletický i polyfyletický) má pro sebe značnou dávku pravděpodobnosti, a rozhodnouti dnes dle pouhých znaků anatomických jest velmi obtížno, ne-li nemožno. Snad bylo by lze očekávati přesné rozluštění sporu od moderního badání biochemického na základě specifických reakcí krevních, v němž s úspěchem pracují zvláště Nuttal, Uhlenhuth a j., a jež přispělo již k vyjasnění poměrů v jiných otázkách systematických; při našich skrovných poměrech vědeckých není ovšem na něco takového ani pomyšlení, ale pro nákladně zařízené ústavy cizí bylo by zde vděčné pole pro rozhodnutí otázky prvořadé důležitosti.

Tolik považoval jsem za nutno předeslati aspoň jako nejstručnější úvod k vlastní mé práci, neboť, jak řečeno, u nás nebylo dosud o otázce o původu domácího psa ničeho uveřejněno, a při zpracování podbabského materiálu nutno tuto literaturu znáti. Zabýval jsem se zatím toliko studiem lebek, které poskytují vždy nejjistější znaky k určení rassy nebo aspoň příbuzenstva k určité rasse (ovšem vedle celkové velikosti a zvláště vý-

[4]) Die Stammväter unserer Hunderassen. Wien 1877.

[5]) Zoologische Jahrbücher 1889.

[6]) Die Abstammung der ältesten Haustiere. Zur Abstammungsgeschichte unserer Hunderassen. Eine Abwehr geg. Herrn Prof. Th. Studer. Vierteljahrschr. der naturf. Gesellsch. in Zürich. 1903.

značných tvarů končetin, jako dlouhých u chrtů a rhachiticky znetvořených u jezevčíků). Tu bylo mi možno zjistiti dva hlavní typy: 1. *doggu*, jen jediným kusem zastoupenou, a 2. více kusů příbuzných nejblíže *psu ovčáckému*.

Z lebky (opatřené číslem P. 2331), již připisuji některé z dogg římských, jest zachována celá zadní část lebky (obr. 1.), příslušící starému individuu se švy silně obliterovanými, svrchu až po začátek nasalií, jež jsou při kořeni srostlá synostoticky s frontale, na spodu schází již horizontální část ossis palatini. Ze předu je vidět os ethmoidale (lamina cribrosa a část laminae perpendicularis), kdežto labyrinthy, až na několik zbylých střípků, scházejí. Celý předek lebky (chrup a čenich) schází úplně, z oblouků zygomatických zachovány jen processus zygomatici ossis temporalis; rovněž otlučeny jsou processus supraorbitales a s nimi proražena i vnější stěna sinuum frontalium. Pokud bylo lze, změřil jsem lebku tu a dle analogie s jinými snažil se rekonstruovati původní délku, již odhaduji asi na 230 *mm*, tedy délka velice značná, jíž by odpovídala tělesná výška v ramenou rozhodně aspoň 75 *cm*. Mozkovna je značně protáhlá, úzká, málo klenutá, takže parietalia spadají silně (střechovitě) dolů, a zaškrcení spánkové příliš nevystupuje; za to arcus zygomatici byly asi hodně široké, soudě dle směru zachovaných zbytků, a odhaduji největší šířku v nich na 140—150 *mm*. Crista parietalis je velmi mohutná, vysoká a vybíhá v cípovitě vzad protáhlý hrbol týlní, který značně přečnívá přes svislou tečnou hořeního okraje foraminis magni. Kondyly okcipitální jsou silné, processus postglenoidales v kloubu mandibulárním rovněž silné a dolů protáhlé. Planum nuchale ukazuje mohutné drsnatiny pro inserce svalové, cristae temporales je ohraničující jsou též silně vyvinuty. Kosti jsou barvy temně šedé, poněkud fossilisovány (lnou dosti silně k jazyku) a pokryty pevně na nich lpící krustou hlinitou. Rozměry, pokud bylo lze zjistiti, jsou následující (v *mm*):

Osa basikraniální (od předního kraje for. magni k sutuře sphenoidální)	71	*mm*
Délka mozkovny (od horního okraje for. magni ke kořenu nosu) (S′ C)	127	„
Od hrbolu týlního ke kořenu nosu (*AC*)	134	„
Výška planum nuchale od spodního okraje for. magni k hrbolu týlnímu (*SA*)	66	„
Výška foraminis magni(*S S′*)	21	„
Šířka foraminis magni (*Y Y′*)	26	„
Největší šířka v kondylech okcipitálních (*O O*^{1})	50	„
Největší šířka mozkovny (*F F′*)	74	„
Vzdálenost crist temporálních (*E E′*)	80	„
Vzdálenost vnějších zvukovodů	68	„
Zaškrcení spánkové (*G G′*)	44	„

Obr. 1. Lebka doggy z Podbaby (Invent. č. sbírky Jírovy P. 2311). *a*) Pohled shora (zmenšeno), *b*) táž lebka pohled se strany pravé.

Nejmenší šířka mezi očnicemi . . . . . 47 *mm*
Délka planum frontale (od kořene nosu ke švu korunovému) (*BC*) . . . . . 66 „
Šířka čela v processus supraorbitales (*J-J'*) (jen přibližně) .65—67 „

Příslušné indexy, pokud lze je zjistiti, jsou následující:

Index cephalicus . . . . . 58.3 *mm*
Index frontalis (pro porušení proc. supraorbitales jen přibližně) asi . . . . . 100.— „
Index occipitalis; . . . . . 121.2 „
Index foraminis magni . . . . . 80.8 „

Jedná se patrně buď o zbytek některé z oněch velikých římských dogg, jichž se užívalo ke štvanicím na divoké kance, zubry, tury a j. zvěř, nebo snad též o psa válečného, jichž barbarské národy středoevropské hojně užívaly. (O podobné, jenže menší lebce zmiňuje se Studer[7]) z doby Hallstattské; jeho vyobrazení je naší lebce podbabské [až na velikost] dosti podobno.)

Vedle této velké lebky jest v materiále Jírově obsaženo 10 úplných lebek (až na některá nepříliš závažná porušení), dvě části obličejové více méně poškozené a několik úlomků mandibul. Vzhled jejich jest zcela jiný než u popsané již doggy; jsou totiž barvy celkem žluté až žlutohnědé, což patrně podmíněno poměry uložení, povrch není tak silně kryt hlinitou vrstvou, a patří vesměs rasse daleko menší. Proberu nejprve v krátkých popisech jednotlivé lebky a ku konci shrnu výsledky, které z podrobného prostudování vyplývají. (Jednotlivé exempláře uvádím s inventárním označením sbírky Jírovy.)

P. 2309. Veliké, dospělé individuum, velmi široké v lících (arcus zygomatici) a s poměrně úzkou mozkovnou. Crista parietalis silná, morda poněkud vpřed protáhlá. Zuby dobře zachovány, schází v levo J_1, Pm_1, Pm_2 a Pm_3, v pravo Pm_2; v mandibule vyznačené hákovitými processus angulares schází v levo J_1, J_2 a J_3, jakož i M_3, v pravo M_3. Kosti celkem málo fossilisovány.

P. 2310. Velmi staré individuum se švy lebečními úplně obliterovanými a zuby silně opotřebovanými; kosti málo fossilisovány. Zachována celá lebka mimo arcus zygomatici, jež scházejí na obou stranách, a mandibuly rovněž scházející. Crista temporalis silně vyvinuta, ze zubů zachovány na straně levé C, Pm_1, Pm_2, Pm_4, M_1 a M_2, na pravé pouze Pm_3, Pm_4 a M_2.

P. 2465. Dospělé a ne právě již nejmladší individuum s velmi obsáhlou mozkovnou a skoro úplně scházející crista parietalis, málo fossilisované. V levo zachován J_1, Pm_4, M_1 a M_2, v pravo J_1 a J_3, C, Pm_4 a M_1; M_2 i s pří-

[7]) Schädel eines Hundes aus einer prähistorischen Wohnstätte der Hallstattzeit bei Karlstein, Amtsgericht Reichenhall. Bern 1907.

slušným alveolem úplně schází, aniž možno nalézti stopy porušení (ať za živa či postmortálně). Mandibula schází.

P. 2484. Staré individuum se švy silně obliterovanými a zuby opotřebovanými. Nápadna je značně úzká a podlouhlá mozkovna a poměrně široké patro. Kosti jsou málo fossilisovány, ze zubů v horních čelistech zachovány v levo *C*, Pm_1, M_1 a M_2, v pravo Pm_2, Pm_3, Pm_4, M_1 a M_2; v mandibule schází na levé straně jen Pm_1 a M_3, v pravo J_1 a J_2, Pm_1, u něhož je zajímavo, že měl dva kořeny (či byly tu dva zuby?) a M_3. Processus angulares silně vyvinuty a hákovitě zahnuty.

P. 2485. Lebka podobná nejvíce č. P. 2465 a též asi stejně starému psu náležející; crista parietalis jen o málo vyšší. V horní čelisti v levo schází Pm_1 a Pm_2, v pravo J_2; v dolní jen v levo schází Pm_1 a M_3, v pravo chrup úplný. Mimo to uražen pravý processus supraorbitalis, čímž otevřen pravostranný sinus frontalis i částečně calva.

P. 2486. Úplně zachovaná lebka staršího psa s dosti otřelými zuby, jež v hořeních čelistech zachovány všecky, v dolní schází v levo J_1, J_2, J_3 a M_3, v pravo J_1, J_2, J_3 a Pm_1. Kosti lnou poměrně dosti silně k jazyku a jsou tedy více fossilisovány.

P. 2601. Značně porušená lebka dosti starého psa, poměrně dosti fossilisována; kosti lnou více k jazyku než ostatní (vyjma ovšem č. 3882). Oba arcus zygomatici jsou uraženy, praemaxillare uraženo až po zadní okraj alveolů pro J_3 (na obou stranách), processus pterygoidei otlučeny, calva v části okcipitální proražena velkou dírou, která zničila skoro celé levostranné planum occipitale, hrbolek týlní a část strany pravé. Crista parietalis dosti nízká. Ze zubů zachovány v levo Pm_2, Pm_3 a Pm_4, M_1 a M_2 (alveolus pro Pm_1 úplně obliterovaný); v pravo Pm_3 a Pm_4, M_1 a M_2 (alveolus pro Pm_2 úplně obliterován).

P. 2626. Dospělé individuum, ač ne příliš staré, jak zřejmo z dobře zachovaných konusů zubních. Kosti málo fossilisovány. Schází levý arcus zygomaticus, ze zubů v horní čelisti zachovány na obou stranách pouze Pm_4, M_1 a M_2, ve spodní čelisti na levé straně Pm_3, M_1 a M_2, na pravé M_1 a M_2.

P. 2627 a. Obličejová část staršího psa, zachovaná až po spojení obou temporálních čar na os frontale v crista parietalis, na spodině pak až po sutura sphenoidalis. Ze zubů zachovány na každé straně toliko Pm_4 a M_2. Kosti jsou značně fossilisovány, podobajíce se stavem zachování nejvíce č. 2601. Dále leží pod tímto číslem (jakožto P. 2627 b a P. 2627 c) dvě levé spodní čelisti, z nichž *P. 2627 b*, zachovaná až po přední okraj ramus mandibulae, má Pm_2, Pm_3, Pm_4 M_1 a M_2 uchovány a náležela poměrně malému individuu, kdežto od *P. 2627 c* jest zachována pouze dolejší část (bez ramus mandibulae) s Pm_2, Pm_4, M_1 a M_2 a pochází z individua značně většího.

P. 2628. Pravostranná mandibula velkého individua s uraženou nejpřednější částí; ze zubů zachován pouze M_2.

P. 3269. Zachovány následující části dosti starého psa malé velikosti: obličejová část lebky až po sutura coronalis (v pravo), kdežto v levo uražena i celá ala magna ossis sphenoidalis; v pravo zachováno celé os zygomaticum, v levo jen přední kus spojený s processus zygomaticus maxillae. Chrup v levo úplný, v pravo schází J_2, Pm_1, M_1. Dále dolní čelisti: levá s uraženým horním okrajem processus coronoidei a scházejícími J_1, J_2 a J_3 a kusem Pm_3, u pravé uražen celý ramus mandibulae a ze zubů schází J_1 a M_2. Kosti jsou poněkud fossilisovány.

P. 3882. Lebka patří dospělému individuu; schází na levé straně celý arcus zygomaticus, na pravé jeho zadní část, ze zubů pak na levo J_1 a J_2, na pravo J_1 a J_2, J_3 pak je uražen; v dolní čelisti v levo schází J_1, druhé dva incisivi jsou uraženy, pak uražen Pm_3 a schází M_2 a M_3; v pravo schází J_1, J_2 i J_3 a Pm_1. Nápadno je, že lebka tato vykazuje značné stopy činnosti ohně: zuby jsou úplně černé, kosti samy mají zvláštní nádech do hněděrůžova, lnou velice silně k jazyku jako nejstarší kosti diluviální, a vydávají kovový zvuk.

P. 3884. Jedna z nejúplněji zachovaných lebek. (Obr. 2.) Dospělé individium, ne staré, poměrně málo fossilisované, s velmi nízkou cristou parietální. V dolních čelistech chrup úplný, v hořeních na levé straně rovněž neporušen, na pravé schází jen J_2, Pm_1 a Pm_2.

Lebky tyto mají celkem dosti jednotný charakter, blížíce se nejspíše tvaru menšího psa honicího nebo ještě spíše ovčáckého s mordou podlouhlou, v zadních částech dosti širokou, do předu značně zúženou (více než u honicích psů to spatřujeme); lebka obsahem svým není ani příliš velká ani malá, shodujíc se tvarově též nejlépe se psem ovčáckým dosti statné postavy (asi v rozmezí 64—70 *cm* v ramenech, dle velikosti lebek), nespadajíc střechovitě, ale nevykazujíc také oněch značně nadmutých tubera parietalia, jak hlavně u menších rass psích silně jsou vyvinuta. Crista parietalis je různě silně vyvinuta; kdežto u některých vyniká jako mohutný hřeben až i před sutura coronalis protažený, končí u jiných už před sutura coronalis a je velmi nízká nebo i sotva naznačena. Oblouky zygomatické jsou dosti rovné a až vzadu náhle k os temporale zahybající, tak že v přední části tvoří skoro jen pokračování přímky vedené od alveolu špičáku k trháku. Čelo je dosti široké, ploché a málo šikmo vpřed spadající, očnice střední velikosti, hrbolek týlní normálně vyvinut.

Zdánlivě dosti značná různost rozměrů a indexů z nich vypočítaných nesmí nás ovšem mýliti, neboť jednak nelze předpokládati, že již v tak dávné době byly by chovány rassy tak čisté, a mimo to i mezi lebkami dokázaně k téže recentní rasse náležejícími možno shledati rozdíly sotva menší, operujeme-li s dosti velkým materiálem. Možno tedy jako výsledek stanoviti, že římští kolonisté nebo domácí obyvatelstvo u Podbaby žijící chovali rassu psí nejblíže dnešnímu ovčáckému psu stojící, jež pochází bezpochyby od *C. f. matris optimae* Jeitt. z doby bronzové; národ ten

Obr. 2. Lebka psa ovčáckého z Podbaby. (Invent. č. sbírky Jírovy P. 3884.) *a*) Pohled shora (zmenšeno). Exemplář s dosti obsažnou mozkovnou, cristou ne příliš mohutnou. *b*) Táž lebka se strany levé. *c*) Spodní čelisti téže lebky se strany levé.

choval patrně ve větším množství dobytek, k jehož hlídání užíval tohoto psa, jehož jako svého věrného přítele a sluhy si dobře dovedl vážiti, jak zřejmo z toho, že mu dokonce zřídil jistý druh hřbitovu.

V následující tabelle podávám přehled rozměrů a indexů jednotlivých lebek psích z Podbaby mnou zkoumaných. Volil jsem methodu měřicí dle E. H u e, Musée ostéologique, Paris 1907—8, a proto bude snad záhodno uvésti zde pojmenování hlavních osteometrických bodů dle tohoto autora, k nimž vztahují se písmena na levém okraji tabulky.

A = nejdistálnější bod hrbolu týlního.
A' = bod na sutura lambdoidea, nejblíže k bodu A položený.
B = bregma.
C = kořen nosu.
C' = konec nasalií přední.
C_2'' = bod mezi špičákem a Pm_1 kolmo pod C'.
D = gnathion.
E = laterální okraj lineae temporalis ossis temporalis.
$F\,F'$ = největší šířka mozkovny.
$G\,G'$ = zaškrcení spánkové.
$H\,H'$ = největší šířka mezi arcus zygomatici.
I = processus supraorbitalis.
J = přední okraj očnice.
K = foramen infraorbitale.
L = alveolus špičáku.
M = zevní okraj otvoru nosního.
$O\,O'$ = největší šířka mezi zevními okraji kondylů okcipitálních.
P = nejdistálnější bod processus postglenoidalis ossis temporalis.
Q = distální konec suturae palatinae medianae.
R = processus maxillaris (za alveolem M_2).
S = dolení (čili přední) okraj foraminis magni.
S' = hoření (čili zadní) okraj foraminis magni.
T = spatium interalveolare mezi Pm_4 a M_1.
U = foramen palatinum (vnitřní okraj).
V = foramen incisivum (vnější okraj).
W = processus frontalis ossis zygomatici.
$W\,W'$ = největší délka očnice.
$Y\,Y'$ = šířka foraminis magni.
$Z\,Z'$ = výška očnice maximální.
a = processus angularis mandibulae.
b = přední konec symphysy mandibul.
c = střední bod kondylu mandibulae.
d = processus coronoideus mandibulae.
$e\,e'$ = největší výška rami mandibulae.
$g\,g'$ = výška mandibuly u trháku (M_1).
$h\,h'$ = výška mandibuly u Pm_1.
$i\,i'$ = šířka mandibuly u trháku (M_1).
$k\,k'$ = šířka mandibuly u zadního kraje symphysy.
$l\,l'$ = šířka mandibuly u alveolu špičáku.
$m\,m'$ = šířka kondylu mandibuly.
$c\,c'$ = vzdálenost středních bodů obou kondylů.

	P 2309	P.2310	P.2465	P.2484	P.2485	P.2486	P.2601	P.2626	P.2627	P.3269	P.3882	P.3884
A B	57	61	54	64	56	56	50*	58	—	—	48	61
B C	62	59	57	57	52	56	57	59	55*	54	59	49
C C'	71	68	66	68	64	62	67	79	70	61	60	68
C D	109	101	96	108	94	98	100*	102	103	91	95	104
B D	165	153	149	163	146	152	154*	159	—	142	159	150
A D	212	207	195	214	187	195	200*	208	—	—	192	199
S Q	85	80	74	84	68	73	83	77	—	—	77	75
Q D	109	101	97	108	95	100	100*	105	101	91	95	97
S D	194	186	169	192	163	173	180*	182	—	—	171	172
S R	87	81	74	90	68	75	83	78	—	—	77	75
R D	110	102	99	107	97	101	102*	106	102	92	98	101
A A'	13	17	12	13	12	11	—	13	—	—	10	11
A S	50	54	47	53	45	47	56*	51	—	—	49	46
B S	77	77	68	77	65	72	77	73	—	—	67	72
B Q	81	77	71	78	65	75	78	75	—	68	77	70
Q J	62	57	53	57	54	55	59	60	57	50	57	54
I W'	20	—	21	21	20	23	23	21	—	20	23	21
W W'	32	—	30	31	31	32	30	30	—	29	30	30
Z Z'	31	30*	29	31	30	31	32	31	—	29	33	28
C Q	53	54	48	52	47	52	54	50	51	45	50	49
C' C''	34	34	31	33	31	34	31	32	30	27	33	31
C S'	110	109	103	113	100	101	111	108	—	—	101	100
S S'	17	19	18	15	15	15	16	16	—	—	17	15
E E'	76	74	65	69	62	65	67	70	—	—	67	65
F F'	67	65	63	65	62	62	65	68	—	—	62	63
G G'	36	42	41	39	42*	35	36	39	31	32	41	41
H H'	115	115*	100	115*	98	110	115*	115*	—	100*	110*	105
I I'	62	64	53	55	52*	52	53	54	46	45	61	55
J J'	50	60	46	48	47	48	48	48	50	42	52	51
K K'	46	43	38	43	39	42	39	41	41	38	40	41
L L'	42	41	39	42	38	39	36	41	38*	35	41	38
M M'	27	27	23	26	24	23	23	23	23	23	26	25
O O'	44	43	39	40	38	35	42	40	—	—	38	36
P P'	62	56	49	58	52	53	54	52	—	—	55	53
R R'	38	41	27	41	30	31	35	33	33	33	37	33
T T'	64	67	57	67	52	60	63	62	60	55	64	59
U U'	25	24	21	28	21	23	23	23	20	21	21	24
V V'	13	13	11	15	11	12	12	12	12	12	12	10
X X'	13	11, 12	11	12	13	11	12	11	11	10	11	10
Y Y'	22	21	20	19	20	18	21	19	—	—	19	18
a b	162	—	—	160	137	144	—	150	—	131	144	144
c b	159	—	—	155	137	144	—	149	—	131	142	144
a d	43	—	—	48	40	44	—	45	—	41	44	42
e e'	60	—	—	63	53	57	—	57	—	50*	62	55
g g'	26	—	—	30	23	26	—	28	—	25	27	26
h h'	23	—	—	22	18	21	—	21	—	20	20	21

* Hvězdičkou opatřená měření bylo možno pro porušenost příslušných částí skeletních provésti jen přibližně.

	P.2309	P.2310	P.2465	P.2484	P.2485	P.2486	P.2601	P.2626	P.2627	P.3269	P.3882	P.3884
c c'	67	—	—	64	60	62	—	55	—	60*	68	61
i i'	14	—	—	13	12	13	—	14	—	11	13	13
k k'	13	—	—	13	12	13	—	14	—	11	13	13
l l'	14	—	—	14	13	13	—	14	—	12	14	13
m m'	29	—	—	29	25	27	—	28	—	24	27	28
J. ceph.	60·9	59·6	—	57·5	62	61·4	58·6	63	—	—	61·4	63
J. front.	100	108·5	—	96·5	100	92·9	93	91·5	89·1	83·3	103·4	112·2
J. fac.	69·7	73·7	—	70·6	67·1	72·4	74·7	72·3	—	70·4	72·7	70
J. nas.	24·7	26·7	—	24	25·5	24·5	23*	22·5	22·3	25·3	27·4	24
J. orbit.	96·9	100*	—	100	96·8	96·9	106·6	103·3	—	—	110	93·3
J. palat.	58·7	66·3	—	62	54·7	60	63*	59	59·4	60·3	67·4	60·8
J. occip.	152	137	—	130	137·8	138·3	119·6	137·3	—	—	136·7	141·3
J. for. m.	77·3	90·5	—	79	75	83·3	76·2	84·2	—	—	89·5	83·3
J. man.	41·4	—	—	40	43·8	43	—	36·7	—	45·8	47·2	42·4

Rozměry lichých mandibul:

	a b	*c b*	*a d*	*e e'*	*g g'*	*h h'*	*i i'*	*k k'*	*l l'*	*m m'*
P. 2627*b*	—	—	—	—	25	20	12	13	13	—
P. 2627*c*	—	—	—	—	26	24	14	14	15	—
P. 2628	147*	147*	51	63	26	20	14	11	12	30

*) Hvězdičkou opatřená měření bylo možno pro porušenost příslušných částí skeletních provésti jen přibližně.

Šumavská jezera.

II.

Velké Javorské jezero.

Napsal **V. Švambera.**

(S 1 mapou a 1 tab.)

(Předloženo dne 16. ledna 1914.)

Výzkum Velkého Javorského jezera provedl jsem hlavně v l. 1907 a 1908. Po přípravné návštěvě koncem června 1907 pořídil jsem za příznivého počasí ve dnech 7. až 14. září mapu jezera a změřil hloubky v přední (východní) části jezera. Celkem bylo tehdáž měřeno 140 hloubek v 7 profilech. Při tom byla provedena obvyklá měření teploty sloupce vody, teploty přítoků a odtoku a pozorována průhlednost a barva vody. V zadním (západním) bassinu byla provedena měření hloubky pouze na zkoušku a byla tu konstatována největší hloubka 10 *m*, tudíž o 1 *m* více, než měřil svého času dr. Wagner a více, než jsem sám očekával, počítaje právě v zadním bassinu s velikým zanášením jezera.

Navštívil jsem jezero opětně uprostřed září 1908 především za účelem systematického změření hloubek v zadním bassinu. Tentokráte mi počasí nepřálo, změřil jsem však přece ve 3 profilech 68 hloubek. Tím bylo měření hloubek na V. Javorském jezeru dokončeno.

Další krátké návštěvy uprostřed září 1909 a ve druhé polovici srpna 1911 byly věnovány prohlédnutí okolního terrainu a fotografování. Poslední revisi provedl jsem koncem září 1913, při čemž měřena průhlednost vody o něco větší, než dříve. Ostatně jsem však seznal, že se obrysy i celkový zjev jezera od r. 1907 vlastně nezměnily.

Při výzkumu zúčastnili se střídavě se mnou moji posluchači pp. Basl, Bělohlávek, Hamáček, Soušek, Vitásek, Vrba a Wízek.

Než pojednám o svém vlastním výzkumu, pokládám za vhodno podati přehled toho, co až dosud bylo vykonáno.

Nejstarší zmínka o V. Javorském jezeru nalézá se, pokud mně známo, v darovací listině Konráda II. Güntherovi, představenému kláštera v Rinchnach.[1]) Značná část pohraničního lesního území připadla tím klášteru. Hranice byly vedeny právě podle jezera: „. . . per descensum Regin fluminis usque in villam Petrach que duarum Petraha media interfluit, et sic sursum per eandem Petrah usque *ad lacum qui est in monte Hatvvich*, et inde sicut intercisum est usque in exortum Svvarzaha, et sic inde uscque Büchohimberch . . .". O pravosti této listiny z r. 1029 se nepochybuje, za to však jiná[2]) podobného obsahu z r. 1009 pokládá se za falsum. V té udává se hranice jinak . . . et per descensum Regin fluminis usque in villam Piberahb, que duarum Pibera media interfluit, et sic sursum per eandem Piberaha usque ad *lacum qui ex monte Hadavvich* et per cursum acque que vocatur *Seebach*, et sic inde, ut modo terminatum est, usque ad locum ubi Kelbirbach cadit in album Regin. . . Zfalšování této listiny klade se do počátku XII. století. Ze znění obou listin lze souditi, že již r. 1029 V. Javorské jezero bylo dobře známo, když ho bylo použito za hranici. V listině falešně na r. 1009 datované, skutečně však z poč. XII. století, zvětšuje se právě v těchto místech území kláštera a uvádí se poprvé odtok jezera (Seebach), z čehož lze usuzovati, že končiny zdejší byly asi během XI. století lépe seznány a pokládány za důležité.

Potom vzpomíná se jezera až teprve v stol. XV. a sice nehezky u Aventina: „Allda ist auch Hädweg der höchst berg oberhalb Passauw, auf dem ein großer See, darumb die Behemen und Bayern noch kriegen, wer stercker kempfft, wirtt den anderen in See". Hledal jsem tuto větu v sebraných spisech Aventinových, nemohl jsem ji však nikde nalézti. Místo to bylo vztahováno vždy na Velké Javorské jezero, nepokládal bych však za vyloučeno, že by tím mohlo býti míněno i Malé Javorské jezero.

Také Velké Javorské jezero vyskytuje se po prvé na mapě F. Apiana, o níž jsem se zmínil již v práci o Malém Javorském jezeru. Na mapě té vyskytuje se ovšem bezejmeně, přímo na jih od hory V. Javoru, jež na mapě označena jest jako Aetwhä mons. Jezero má zde podobu, jež blíží se značně kruhu a při tom rozměry aspoň třikráte tek velké jako Malé Javorské jezero. Uprostřed východního břehu odtéká „Seepach" do Velké Řezné (Gros Regen fl.) směrem, jenž proti skutečnosti uchyluje se na mapě Apianově příliš na jih, celkem však dosti správným. Geografická poloha Velkého Javorského jezera podle mapy Apianovy jest 33° 49·3′ až 33° 52·4′ v. d. a 49° 1·2′ až 49° 2·6′ s. š. Platí tu totéž, co jsme napsali o poloze Malého Javorského jezera na mapě Apianově, nepatrná chyba v zeměpisné šířce, větší v zeměpisné délce.

---

[1]) Monumenta Boica. Vol. XI. Monachii 1771. p. 145 (Designatis Territorii Celle S. Guntheri hodie Rinchna concessi. An. 1029).

[2]) tamt. p. 139. (Imperialis concessio Territorii ad cellam Guntheri, hodie Rinchna. An. 1009.)

Ve své Topografii zmiňuje se Apian o Velkém Javorském jezeru na dvou místech: „Mons admodum excelsus et clarus, quem nonnuli Etwha, allii ab herbis et plantis Herbae montem, quod multis raris et haud vulgaribus plantis abundet, dictum estimant. In huius summa planicie, quae perampla est, lacus consistit, in quo trottarum copia inexhausta. Rivus ex eo emanans per catadupa orientem versus devolvitur. Ad hunc versus aquilonem rupes exsurgit altissima, quae longe lateque conspici, etiam in Vindeliciae partibus potest,“[1]) a na jiném místě[2]): „Seepach autem rivus ex lacu et monte Artwha decidens, longus 6 m. p. in Regenum incidit, 4 m. p. supra vicum Zwisel“. Již z podrobných čísel, udávajících délku odtoku jezerního jakož i z celé kresby na mapě lze souditi, že také zde pracoval Apian na základě autopsie.

O jeden a půl století později shledáváme se s Velkým Javorským jezerem na mapě Müllerově[3]). Proti mapě Apianově jest tu sice zlepšena vzájemná poloha obou Javorských jezer, za to však jest tu zakresleno Velké Javorské jezero v podobě téměř čtverce a sotva poloviční Malého Javorského jezera, což sotva odpovídalo tehdejším poměrům. Na Wielandově zmenšeném vydání plocha V. Javorského jezera jest poměrně velká vůči původní mapě Müllerově. Pozoruhodno jest, že na mapě Müllerově zakreslena jest hranice česko-bavorská těsně po východním břehu jezera a po celém levém břehu jezerního potoku, což ostatně přejal také Finck do své mapy,[4]) jenž ovšem jezero posunul zase příliš na jih od vrchu Javoru.

V důležitém jinak díle Flurlově[5]) očekávali bychom o jezeru aspoň zmínky, ale marně. Pouze mapa jeho jako první pokus petrografické skizzy této končiny má pro nás jistý zájem. Jsou tu vyznačena obě jezera Javorská a jezero Roklanské, všechna téměř stejně velká, podle koloritu mapy vesměs v žule. Asi v téže době botanisoval zde a na Velký Javor vystoupil s prof. D. Mikanem proslulý později cestovatel Tadeáš Haenke.[6])

Nejdůležitějším pro V. Javorské jezero dílem za celou první polovici stol. XIX. jest mapa katastrální.[7]) Zde jsou asi obrysy jezerní dosti správně zakresleny. Hladina jezerní jest tu asi táž jako na naší mapě;

---

[1]) Philip Apian's Topographie von Bayern. Herausg. v. d. Historischen Vereine von Oberbayern. München 1880, p. 362.

[2]) tamt. p. 364.

[3]) Mappa geographica Regni Bohemiae auct. J. C. Müller. Ed. 1720.

[4]) Mappa Electoratus et Ducatus Bavariae. Auspic. Ac. R. Sc. Berol. 1766. Fol. II.

[5]) Flurl Mathias, Beschreibung der Gebirge von Baiern und der oberen Pfalz. München 1792.

[6]) Mayer J., Sammlung physikalischer Aufsätze, besonders die Böhmische Naturgeschichte betreffend. III. Dresden 1793, p. 285.

[7]) Bavorská mapa katastrální. N. O. XLVII. 50. K. L. Kötzting und Regen. 1842. 1 : 5000.

slati měly hlavně ve střední části u malého poloostrůvku a naproti němu rozsah snad ještě o něco větší než dnes. Tok Geigenbachu (přítok jezera) i odtoku jest tu zaznamenán s veškerými podrobnostmi. Úřední jméno jezera jest zde „Arber See".

Teprve uprostřed století XIX. vyskytuje se V. Javorské jezero v literatuře turistické a odborné. V té době, aspoň jak z díla Grueberova a Müllerova[1]) můžeme souditi, nalézal se zde při samém jezeře ještě divoký prales, jenž se otvíral na jednom místě, totiž při odtoku. Slatě a bažiny obemkly jezero tak, že jen po kmenech, jež zde všude ležely, bylo lze jezero, ovšem nikoliv pohodlně, obejíti. Výslovně však připomíná dílo Gruebera a Müllera, že zde krajina ani z daleka není tak chmůrná, jako na jezeru Roklanském. Ostatně mimo poznámku, že json zde pstruzi (Steinforellen), nedovídáme se ze zmíněného díla ničeho podstatného. Současné dílo Winebergerovo[2]) věnuje Velkému Javorskému jezeru jenom několik řádek. Udává plochu vodní na 18 Tgw. a poznamenává, že voda jest čistá a chladná, při tom bohatá na pstruhy. Hloubka není známa. Na geognostické mapě Winebergerově zakreslena jsou obě Javorská jezera přesně na hranici svoru a horniny, již nazývá „Gneuss-Granit". Hochstetter, jenž mapoval geologicky Šumavu r. 1853 a násl., určil[3]) barometricky nadmořskou výšku jezera na 2931·5' a poprvé se zmiňuje[4]) o charakteristické pro jezero Nuphar luteum. V současném nepodepsaném článku, jehož autorem byl patrně Sendtner[5]), udává se nadmořská výška jezera na 2925, délka na 1300 a šířka na 1000 stop. Z díla Sendtnerova,[6]) jehož práce na Šumavě spadají do l. 1854—57, seznáváme pro V. Javorské jezero pouze určení nadmořské výšky na 2925 pař. stop. Také v díle prof. Krejčího[7]) jest jen několik poznámek. Krejčí nalezl zde ještě vysoký les. Přecenil plochu jezera, již udává na 40 jiter, správně však položil končinu tu do ruly. Stejně skoupé jest veliké dílo Gümbelovo.[8]) Na hrázi jezerní měřil Gümbel barometricky nadmořskou výšku jezera na 2909 pař. stop. Mimo to sděluje nadmořskou

---

[1]) Grueber B. u. A. Müller, Der Bayrische Wald. II. Ausg. Regensburg 1851 (I. vyd. tamt. 1846), p. 206 a n.

[2]) Wineberger L., Versuch einer geognostischen Beschreibung der Bayerischen Waldgebirges und Neuburger Waldes. Passau 1851, p. 27.

[3]) Hochstetter F., Die Höhenverhältnisse des Böhmerwaldes. Jahrb. der k. k. Geol. Reichsanstalt, VII. 1856, p. 325.

[4]) Aus dem Böhmerwald. Ausserord. Beilage zu Nr. 220 der Allg. Zeitung, 8. August 1855, p. 3515.

[5]) Ansichten vom bayerischen Walde. Beilage zu Nr. 229 der Neuen Münchener Zeitung v. 25. September 1855.

[6]) Sendtner O., Die Vegetations-Verhältnisse des Bayerischen Waldes. Münchener Zeitung v. 25. September 1855.

[7]) J. Wenzig u. J. Krejčí, Der Böhmerwald. Prag 1860, p. 48.

[8]) Gümbel W., Geognostische Beschreibung des Ostbayerischen Grenzgebirges. Gotha 1868.

výšku 2858 pař. stop podle topografického bureau bavorského. Plochu jezera udává stejně jako Krejčí na 40 jiter. Poprvé tu však v textu i na mapě nalézáme moderní petrografickou charakteristiku této končiny. Stěnu jezerní přičítá Gümbel dislokaci. Na různý od dnešního vzhled ukazuje charakteristika, jak ji tehdáž Gümbel podal: „V hluboké, nepřívětivé prohlubni kotlinné leží temné jezero, zbytek většího dříve reservoiru vodního". Na jiném místě praví však Gümbel: „Ačkoliv celkem odpovídá chmurnému obrazu jezera Roklanského a Lakka, přece okolí V. Javorského jezera jest trochu přívětivější a veselejší, kdežto Malé Javorské jezero úplně opětuje divokost a chmurnost horských jezer jižní Šumavy". Pohled na jezero, jak je shledáváme na illustraci Gümbelově, zdá se příliš schematickým; na severním břehu jsou tu zakresleny značné skály, kdežto ve skutečnosti jest tu jen několik balvanů. V novějším svém díle[1]) přijímá Gümbel výšku jezera 934 *m* a plochu jezera 13 *ha*. Na několika místech popírá zde s důrazem vyhloubení jezera erosí ledovcovou nebo nadržením za morénou. Pohled na jezero, známý z jeho staršího díla, nalezne se zde hned dvakráte, na str. 416 a 451. V červnu 1871 dlel tu za účelem zoologického výzkumu Dr. A. Frič s assistentem H. B. Hellichem a sběratelem J. Štaskou. To co sám sdělil[2]) v zasedání math.-přírod. třídy kr. české společnosti nauk 15. července 1871, jakož i poznámky v pozdější práci Hellichově,[3]) jsou, pokud mi známo, dosud jediným faunistickým příspěvkem pro V. Javorské jezero vůbec. V září 1881 navštívil jezero prof. Partsch, jenž vyslovil náhled, že zde není vůbec žádné z balvanů nakupené hráze, takže celé jezero jest vyhloubeno v pevné skále.[4]) Právě s tím projevil nesouhlas F. Bayberger,[5]) jenž dlel zde patrně roku následujícího. Bayberger měřil na jezeru apparatem Geistbeckovým v jednom podélném a jednom příčném profilu celkem 23 hloubek. Třebas nelze hloubky ty na mapě správně lokalisovati, přece jsou to první údaje hloubkové, blížící se aspoň poněkud skutečným poměrům, neboť Möchelovy zprávy o jezerech z r. 1877 jsou fantastické. Willkomm přejal údaje Möchelovy r. 1878, Řivnáčův průvodce r. 1882 a dokonce ještě G. Vogel r. 1906 docela bez kritiky. Bayberger mohl, jak udává, nahlédnouti ještě u hráze jezerní do studny asi 10 *m* hluboké, jež od té doby zmizela. Málo důvěry vzbuzuje ovšem mapa Baybergerova v měřítku 1 : 6000. Jezero jeví se na ní jako pravidelná podélná vana, při čemž rozdíl mezi

[1]) Gümbel W., Geologie von Bayern. II. Cassel 1894.

[2]) Frič A., Über die Fauna der Böhmerwald-Seen. Sitzber. d. kgl. Ges. d. Wissensch. g. 1871. II. Halbjahr, p. 9.

[3]) Hellich Bohusl., Perloočky země České (Cladocera). Archiv pro přírodov. prozkoum. Čech, III, 4. Praha 1873, p 120 a n.

[4]) Partsch J., Die Gletscher der Vorzeit. Breslau 1882, p. 108.

[5]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886. (Ergänzungsheft zu Petermanns Geogr. Mitteilungen. Nr. 81) p. 30, s mapou.

západním a východním bassinem úplně mizí. Tam, kde dnes konstatujeme zúžení jezera, nalezneme podle Baybergera největší hloubku jezera t. 15 *m*. Že snad není zakreslen pouze přední, východní bassin, to dokazuje délka jezera, podle mapy Baybergerovy 456 *m*. Ostatně nelze tu mysliti na tak rychlé vyplnění jezera za čtvrtstoletí, a i v tom případu postrádáme zase větších hloubek ve východní části jezera. Sklon stěny udává Bayberger, jako u jiných jezer, přehnaně na 70°. Bayberger pozoroval také — vlastně jest to první pokus na šumavských jezerech — průhlednost vody a udává ji na 0·4 *m*. Číslo to jest tak nízké, že musíme tu počítati s nějakou vadou při pozorování, nebo s nesprávným záznamem. Publikace Baybergerova vyvolala exkursi vídeňských odborníků (P e n c k, B ö h m, R o d l e r), kteří pozorování jeho podstatně opravili.[1]) Pokud se jedná o Velké Javorské jezero, tu byly především opraveny a doplněny Baybergerovy údaje o přepážce odtokové. Stručně charakterisováno též skalisté pozadí jezera a střední sklon stěny odhadnut na 35—40° proti 70° Baybergerovým. Časově následuje práce M e t z g e r o v a.[2]) Podává první chemickou analysu vody jezerní. Za celých 20 let potom máme pro V. Javorské jezero pouze jedinou práci, jež ovšem obsahuje nejvíce novinek a respektuje také pozorování starší. Napsal ji P. W a g n e r,[3]) jenž pracoval na jezeru v srpnu 1896. Wagnerova stať o V. Javorském jezeru jest nejlepší celého jeho díla. Topografický popis doplňuje zprávy předchůdců, chemie vody podána podle Metzgera, biologické poměry podle Friče. Po prvé tu na základě jednoho podélného a 5 příčných profilů, celkem 55 hloubek, aspoň přibližně správně charakterisován relief dna a rozpoznány 2 bassiny. Zvláště dlužno upozorniti na pozorování tepelných poměrů vody, jichž tu provedl Wagner nepoměrně více, než na ostatních jezerech šumavských, celkem 11 řad. Jsou mezi nimi také pozorování sloupce vodního v noci, první pozorování toho druhu na jezerech šumavských. Rovněž po prvé tu měřena barva vody a lze říci i průhlednost, neboť starší udání Baybergerovo nelze, jak již řečeno, uznati za správné. Wagner sebral po prvé také některé zprávy o stavu sněhu a tloušťce ledu na jezeru.

Zbývá ještě zmíniti se o V. Javorském jezeru na mapách.

Pravili jsme, že se po prvé správně objevuje na bavorské mapě katastrální. Trvalo však dlouho, než se objevilo ve správné poloze a se správnými obrysy na ostatních mapách úředních. Časově nejbližší starší speciální mapa královstvím Českého[4]) zaznamenává V. Javorské jezero v ob-

---

[1]) P e n c k, B ö h m u. R o d l e r, Bericht über eine gemeinsame Excursion in den Böhmerwald. Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft, 1887, p. 76.

[2]) M e t z g e r C., Beiträge zur Kenntnis der hydrographischen Verhältnisse des bayrischen Waldes. Erlangen 1882, p. 8.

[3]) W a g n e r P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 28—36.

[4]) Spezialkarte des Kgr. Böhmen. 1 : 144000. Bl. XXIX.

rysech zcela nesprávných, což se opakuje ještě na posledním jejím vydání z r. 1876, ačkoliv v té době existoval již dotyčný list topografického atlantu Bavorska,[1]) jenž po prvé správně jezero i s okolním terrainem uvádí do mapové literatury. Pro hladinu jezera udává nadmořskou výšku 934 *m*. Nová specialní mapa Rakousko-Uherska [2]) přejala tuto část mapy i s výškou 934 *m*, rovněž novější mapa Německé říše,[3]) tato však s nadmořskou výškou jezera 932 *m*.

Velké Javorské jezero zapadá do východního svahu V. Javoru, vlastně do hřbetu, jenž pokračuje k jihu od V. Javoru a jest také proti východu otevřeno. Ať již jdeme sem s české strany od Bav. Eisensteinu, nebo s bavorské strany od Regenhütte, spatříme hladinu jezera — jako u všech ostatních šumavských — teprve když staneme na jeho břehu. V obou případech vyjdeme poblíž nového pavillonu, jenž stojí nedaleko odtoku. Hledíme-li k západu, tu zdvihá se proti nám v pozadí jezera mohutná stěna, z největší části vegetací krytá; v jižní části této stěny nalézají se však rozsáhlé holé skály. Geigenbach v severu a Bärenbach v jihu zařezal se vedle této stěny v pozadí jezera tak, že tím polokruhovité vyústění stěny k odtoku jak na severu tak na jihu jest těmito zářezy přerušeno, takže nelze tu mluviti o nějakém typickém cirku. Gümbel soudí, že právě zde podklad pro dnešní vytváření předurčen byl dislokací. Od stěny k odtoku jest svah povlovný. Jižní svah dosahuje jen v západním, t. j. zadním bassinu těsně hladiny vodní, kdežto dále k východu, nalézá se mezi ním a jezerem plochý pruh půdy, podle některých mohutných stromů soudě, již od delší doby nad vodou. Potok s jižní strany spadá k jezeru se sklonem podle Wagnera 18° a to jest asi také sklon jižního svahu při odtoku. Jinak jest tomu při břehu severním. Zde zadní bassin jest ohraničen slatinnou plochou, kdežto ve východní části svahy spíše dosahují jezera. Sklon severního svahu dosahuje místy podle Wagnera až 25°.

Severní břeh jest dosti jednotvárný, kdežto jižní břeh vykazuje téměř uprostřed poloostrov dosti daleko do jezera vybíhající. Poloostrov tento znamená hranici mezi oběma bassiny. Jest značně obklopen vegetací vodní, jež ještě nedávno zúžovala zde jezero mnohem více než dnes. Na východě tohoto celkem nízkého poloostrova, krytého jehličnatými stromy nevelkého stáří, vyvinula se malá zátoka, nyní vyplněná z největší části vodní vegetací a skoro stejně jest tomu i na straně proti západnímu bassinu, zde ovšem ve směru spíše na jih. Z tohoto poloostrova lze nejlíp celé jezero přehlédnouti.

Západní bassin má jenom z malé části pevné břehy. Od zmíněného poloostrova k jihu pokračuje tu nízký břeh lemovaný mělčinami a travnatými ostrůvky, ovšem nepatrného rozsahu. Dále k jihu sklání se vykácený

[1]) Topographischer Atlas d. Kgr. Bayern. 1 : 50000. Bl. 20. Zwiesel (west) 1870.

[2]) Spezialkarte der Österreich-Ungarischen Monarchie. 1 : 75.000. Z. 9. C. VIII. Eisenstein u. Viechtach. I. vyd. z r. 1882.

[3]) Karte des Deutschen Reiches. Bl. 582 Zwiesel. 1 : 100.000. Herausg. 1891.

svah až k samému jezeru. Na západě přechází jezero ve slať, dnes proti hladině ostře ohraničenou. Tato slať dělí se na část severní a jižní, mezi nimiž volná trať vodní vede k ústí Geigenbachu. Jižní trať jest částečně porostlá, nízkým, řídkým stromovím. Také severní slať — dosud bez stromoví — jest již stejně pevná, tak že s jistou opatrností lze se zde postaviti. My jsme tu již mohli upevniti provazce pro měření profilů a pracovati zde s tachymetrem. Ve směru ku stěně nalézají se za slatí ještě pruhy volné, ovšem mělké vody, jak ukazuje přiložený obraz.

Hranice slatě proti jezeru jest, jak již řečeno, ostrá a následkem odstranění části slati, většinou přímočarná. Voda zde zasáhá jistě ještě pod slať samu a hned vedle slati nalezneme hloubku přes 2 *m*. Ještě za pobytu Wagnerova zaujímala slať proti jezeru mnohem větší plochu než dnes. Na podnět kníž. hohenzollernského lesního v Bav. Eisensteinu žádal Waldverein vládu bavorskou, aby povolila náklad na odstranění slatí z jezera. Skutečně povolen byl značný obnos, myslím asi 60.000 M, a také sekce Böhmerwaldvereinu B. Eisenstein, Rabenstein a Zwiesel přispěly, takže r. 1898/99 jezero z valné části bylo vyčištěno od slatí.[1]) Přední část slati byla roztrhána dynamitem, načež jednotlivé části byly silnými háky zachyceny a odplaveny. V pozadí ovšem slatě zůstaly. Wagner[2]) mluví zde o slatích mocnosti 1 *m*. Dnes jsou místy asi dvakráte tak mocné.

Bayberger mohl ještě konstatovati ohromnou spoustu kmenů v jezeře, jehož dno jest kryto jich setlelými odpadky. Bylo mu sděleno, že jest zde takové množství bahna, že tyč prorazí vrstvu bahna 2 *m* mocnou, prve než narazí na pevný podklad.[3])

Vyjdeme-li dnes od pavillonu při ústí jezera po jižním břehu jezera, dostaneme se zcela pohodlně do p o z a d í j e z e r a, kdež můžeme projíti dolejší částí stěny. Vidíme zde romantické partie skalní a máme na několika místech nádherné průhledy na celé jezero a zvláště na slať v pozadí jezera. V krásných kaskadách řítí se Geigenbach se stěny a vine se potom v rovince, jež jest reminiscencí na bývalou hladinu jezerní. Mohutné skály, jež v pozadí vystupují, znamenají zde dřívější břehy jezera. Také od ústí Geigenbachu lze se bez velkých obtíží dostati ke kaskádám a na cestu probíhající stěnu javorskou. Asi od r. 1909 lze z pozadí jezera obejíti jezero po nově zřízené pěšině i na jeho severním břehu. Ovšem jest cesta tato ještě velmi měkká a za vlhkého počasí málo schůdná.

Zde, pod stěnou v pozadí jezera, nalézá se vlastní romantická část břehů jezerních. Na tato místa vztahují se patrně první zmínky o divoké přírodě zdejší, jež najdeme v díle Grueber-Müllerově a v článku Hochstetterově. G r u e b e r[4]) líčí nesnáze, jaké se v té době skýtaly pochůzce

[1]) G. V o g e l, Des Waldes Hochburg Eisenstein. Eisenstein 1906, p. 96.
[2]) W a g n e r, Seen des Böhmerwaldes, p. 31.
[3]) B a y b e r g e r, Geographisch-geologische Studien aus d. Böhmerwalde, p. 31.
[4]) G r u e b e r B. u. A. M ü l l e r, Der Bayrische Wald. Regensburg 1851, p. 207 a n.

okolo břehů jezerních; byla tu všude spousta odumřelých kmenů, po nichž sice zdejší lidé dostanou se ku předu, nikoliv však necvičený turista. S tím srovnává se líčení Hochstetterovo[1]), jenž pokusil se podle břehů jezerních vystoupiti na V. Javor. Práce Baybergerova[2]) jest s to uvésti v omyl, neboť bychom podle ní mohli souditi, že stěna počíná u samé hladiny vodní a sice se sklonem 70° (podle Penckovy citace 75°). Ve zprávě o exkursi Penckově[3]) nalézáme první určitější poznámky o stěně a tu Penck redukuje sklon stěny na 35—40°. Stěna spadá stupňovitě a spád jednotlivých stupňů tvoří cleavagové plochy, jichž pokračování ve směru do stěny můžeme pozorovati v řadě otevřených komínů. Hořejší plochy zmíněných stupňů jsou kryty troskami stupňů vyšších. Penck také konstatoval, že jezero nesáhá až ku stěně, nýbrž že se vzdaluje na 200 *m* od ní. Stopuje Geigenbach směrem nahoru měl za to, že se tu snad vyskytne stejný zjev, s jakým se před tím shledal na stěně nad jezerem Čertovým, totiž paralelní rýhování. Wagner[4]) mohl již po stezce, kterou pořídili lesníci, dostati se snadněji na stěnu a tu konstatoval, že očekávání Penckovo se nesplnilo. „Vidíme balvany ohromné jako domy, jež se od pevné skály oddělily v kolmých rovných plochách, v poloze jen o několik metrů nižší. Mezi nimi vznikly úzké komíny. Paralelní, horizontální směr odpovídal vždy původnímu zvrstvení. Uprostřed širokého pralesa s jeho vlhkou půdou a kapradinami zvýší člověka a hustým porostem můžeme pozorovati vysoké stěny skalní, někdy vodou jako jemným závojem tak povlečené, že v slunci se lesknou. Jsou to skvostné kluzné plochy, podle nichž kolmo se hornina odlamuje. Pokračují ještě do pevné skály. Rula zde mívá většinou strukturu plástevnou, ježto křemenné, jemnozrné a pevné vrstvy střídají se s některými svorovými. Touto strukturou jest podmíněno vzezření mnohých kluzných ploch, u nichž tvrdé vrstvy jeví úplně zachovalé ohlazení, kdežto měkké ustupují jako rýhy obloukovitě prohloubené."

Relativní výšku stěny udával Bayberger na 400 *m*; při tom ovšem, jak již řečeno, asi dvojnásobně přecenil sklon. Také Wagner schematicky kreslil profil stěny s jezerem a sice od nejvyšší výšky 1215 *m* až po výtok, při čemž stěna má sklon přijatelný. S tím se však neshoduje text Wagnerův, v němž udává bod 1345 *m* jako největší absolutní, a 411 *m* jako relativní výšku stěny, jejíž relativní výška jenom v největší části blíží se 400 *m*.

Jezerní hráz, tedy právě končina, jež při všech šumavských jezerech jest velmi zajímavá, byla zde již za návštěvy Wagnerovy budovami a

---

[1] Hochstetter F., Aus dem Böhmerwald. Ausserord. Beilage zu Nr. 220 der Allg. Zeitung, 8. Aug. 1855, p. 3515.

[2]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886, T. 2.

[3]) Penck, Böhm u. Rodler, Bericht über eine gemeinsame Excursion in den Böhmerwald, p. 76.

[4]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 29 an.

cestami tak přetvořena, že Wagner pokládal vniknutí do stavby této hráze téměř za nemožné. První, jenž odtoku V. Javorského jezera věnoval pozornost, byl professor Partsch.[1]) Ovšem, vše, co uvádí, jest výrok: „při V. Javorském jezeru neexistuje vůbec hráz z kusového materialu; zde jest zcela zřejmo, že jezerní bassin jest vana vyhloubená v pevné skále". Tomu částečně odporuje Bayberger,[2]) jenž po něm přišel. „Odtoková část nemá sice určitě vyslovený ráz náspu nakupeného, tolik však jest jisto, že jezerní odtok razí si cestu hrází nakupených balvanů nejrůznější velikosti, jež jest pouze zbytkem bývalé větší přehrady, která jezero kdysi uzavírala. Jest zajímavo, že se zde nalézají dobře znatelné valouny vedle rohatých balvanů pod pískem a krupičnatou hlínou, takže obsah celé hráze ihned upomíná na usazeniny morénové. Až do 10 *m* nad dnešním stavem jezera jsou tyto stopy znatelny. Ve vyschlé studni vykopané do hráze bylo lze pozorovati tyto zajímavé usazeniny." Bayberger pozoroval glacialní stopy pouze na jižním břehu; jsou úplně isolovány, neboť dále po odtoku opětuje se rozpadávání se skal; směrem nahoru — znamená zde asi od odtoku — mohl je zde pozorovati na 30 *m*. Orograficky nebylo lze zde nic pozoruhodného, než velkolepá hromada balvanů, ovšem bez výrazné formy barrierové. Dalšímu pozorování překážela pokrývka mechová.

Exkurse Penckova[3]) konstatovala o hrázi jezerní: „V. Javorské jezero leží ve východním svahu Javorského hřbetu a jest na venek obemknuto náspem balvanů, zdvihajícím se asi 10 *m* nad hladinu, jehož ráz živě připomíná hráz na Černém a Čertovu jezeru, ježto také zde koncentruje se zvlášť hojný výskyt balvanů na hráz jezerní; dále i to, že zde v šedém jílu vyskytují se pestře promíšeny a v různých velikostech rozličné druhy hornin j. svor, amfibolová břidla, pegmatit. Potok, jenž odvádí vodu jezerní, neotvírá poklad těchto balvanitých uloženin, stejně jako jest tomu u Černého a Čertova jezera". Bayberger ovšem konstatuje, že si prorval odtok mezi balvany, shroucenými sem s vyšší polohy. Plyne z počátku jenom se sklonem velmi mírným, pouze 5°, a teprve později s větším spádem, asi 12°.[4])

Dospějeme-li na hráz jezerní s české strany, tu máme v levo pěkný pavillon, z nejkrásnějších celé Šumavy, v pravo, směrem k západu prostírá se Velké Javorské jezero. Pavillon a stavby k němu náležející činí končinu tu příjemnou a milou. Nebylo tomu vždy tak. Gümbel, jak již uvedeno, líčil jezero jako chmurné a také náš Krejčí[5]) praví o něm: „Sestoupíme

---

[1]) Partsch J., Die Gletscher der Vorzeit. Breslau 1882, p. 108.

[2]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886, p. 31.

[3]) Penck, Böhm u. Rodler, Bericht über eine gemeinsame Excursion in den Böhmerwald, p. 76.

[4]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 30.

[5]) J. Wenzig u. J. Krejčí, Der Böhmerwald. Prag 1860, p. 48.

(s Javoru) do velké rokle, kde mezi vysokými skalami a vysokými kmeny lesa zastrčeno jest Velké Javorské jezero v hluboké osamělosti". Řekne-li se to o V. Javorském jezeru, tu to lze ještě větším právem tvrditi snad o všech šumavských. Záleží tu hlavně na počasí, za něhož na jezero přijdeme. Kdybych měl ze šumavských jezer přiřknouti některému chmurný ráz, tu bych to nejspíš učinil při jezeru Roklanském, kdežto V. Javorské jezero pokládám naopak na základě zkušeností jistě větsíc , než mých předchůdců, za poměrně nejpřívětivější z nich. Úsudek Gümbelův a i Krejčího předpokládá docela jiný ráz břehů, než jak jest dnes. Tehdáž tu byl prales. Mohutné stromy na březích jakož i spousta odumřelých kmenů a vegetace v jezeře byly s to ospravedlniti úsudek Gümbelův. Dnes jest tomu jinak. Z bývalého pralesa, jenž ještě v létech padesátých stol. XIX. jezero obklopoval, zříme dnes jen ojedinělé stromy na jižním břehu východního bassinu a v pozadí jezera. Severní břeh vykazuje již jen mladší les, nejvyšší právě poblíž odtoku. Jehličnaté stromoví na březích jezera jen ojediněle jest přerušeno několika břízkami a jeřábkem.

Pokud se jedná o krajinný dojem, jejž činí šumavská jezera, moje mínění o tom jest, že by bylo lze na všech těch jezerech, i těch nejsmutnějších, jako jest ku př. jezero Roklanské, vyvolati náladu daleko vlídnější zřízením lidského obydlí a úpravou břehů. Kdo však má cit pro velkolepost neporušené přírody, ten bude se vždy přimlouvati za uchování bassinů jezerních, tak jak dnes jsou. Chrániti je před zanášením, to jest hlavní úloha, jež právě při V. Javorském jezeru správně byla pochopena.

Jméno jezera. Tam, kde se v listinách po prvé o jezeru mluví,[1]) označuje se jako „lacus qui est in monte Hatvvich". Po dlouhou dobu bývá na mapách zakresleno beze jména a teprvé v XIX. století setkáváme se, pokud vím, s určitým jménem a sice po prvé asi na mapě katastrální se jménem „Arber See", jež se potom opakuje na všech mapách úředních, t. v topografickém atlantu Bavor, Karte des Deutschen Reiches 1 : 100.000 i na Spezialkarte der Österr.-Ung. Monarchie 1 : 75.000. V literatuře však téměř bez výjimky nalézáme označení „Grosser Arbersee" jistě spíše na rozdíl od Malého Javorského jezera než k označení jeho velikosti. Chceme-li česky jezero pojmenovati, tu máme volbu mezi jezerem Javorským nebo Velkým Javorským jezerem. Název „Velké Javorské jezero" zdá se nám vhodnějším, ježto jest určitější než „Javorské jezero".

Mapa jezera. První mapa jezera, provedená na základě skutečných měření, jest, jak na jiném místě uvádím, bavorská mapa katastrální.[2]) Dr. Wagner reprodukoval ji[3]) a zakreslil při tom podle odhadu stav vodní plochy, jak se jevil za jeho zdejšího pobytu. Ostrůvek, jejž zaznamenává poblíž odtoku při severním břehu, za našich návštěv jsem nespatřil. Teprve

[1]) Monumenta Boica. Vol. XI. Monachii 1771, p. 145. v. v př.

[2]) Bavorská mapa katastrální. N. O. XLVII. 50. K. L. Kötzting und Regen. 1842. 1 : 5000.

[3]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897. T. I. 1 : 5000.

r. 1913 jevil se tu jistý náběh k němu. Mapa, již před Wagnerem uveřejnil Bayberger,[1]) sotva odpovídala tehdejším poměrům a lze míti za to, že zde jde jen o hrubou skizzu, při níž rozdíl mezi západním a východním bassinem, pokud se týče obrysů horizontálních, úplně zmizel. Wagner poznamenal již, že mapy Baybergerovy naprosto nelze užíti. Podle mapy Wagnerovy obnášela by délka jezera asi 460 *m*, nejmenší šířka asi 115 *m*, největší šířka asi 155 *m*, ovšem ve východní části, tedy celkem rozměry, jež se zdají pravděpodobnými. Wagnerovi tvrdil hostinský na jezeře, že ještě před 9 lety, tedy asi r. 1887 nebylo tu ještě onoho zúžení, jež dnes dělí jezero ve 2 bassiny. Něco snad na tom jest, neboť tak příliš nesprávné obrysy jezerní nebyly by přece ušly exkursi Penckově; že by však skizza Baybergerova byla správná, pokládám za vyloučeno. Třeba jenom nahlédnouti na dotyčný list topografického atlantu bavorského[2]) z r. 1888, abychom zde poloostrovní onen výběžek konstatovali. Moje mapa byla pořízena s použitím tachymetru podle stavu r. 1907 a 1908 v měřítku 1 : 1000 a později redukována na měř. 1 : 2000. Od té doby až do r. 1913, kdy jsem posléze jezero navštívil, nenastaly zde žádné podstatné změny v obrysech hladiny jezerní. Bayberger projevil náhled, že by při stejném postupu zanášení, jako dosud, celé jezero proměnilo za 50—60 l. v slať. Wagner to označil jako trochu přehnané, třebas tu připouštěl značně rychlý postup v zanášení jezera. Já sám mám za to, že bude třeba neustálé péče a úsilovné námahy, aby jezero bylo uchováno aspoň přibližně v dnešních obrysech. Jistě nesnadno bude zachovati jezeru hloubku aspoň poněkud odpovídající dnešní.

Nadmořská výška jezera. Asi ve stejných létech měřili nadmořskou výšku jezera rakouský geolog Hochstetter[3]) a bavorský botanik Sendtner,[4]) oba barometricky. Hochstetter udává 2931·5 víd. stop = 926·6 *m*, Sendtner 1925 pař. stop = 910·15 *m*. Gümbel měřil později na hrázi jezerní 2909 pař. stop = 925 *m* a sděluje také nadmořskou výšku 2858 pař. stop = 928·4 *m* podle bavorského topografického bureau.[5]) V topografickém atlantu Bavorska[6]) nalezneme výšku 934 *m* a tu potom i autoři t. Gümbel ve sv. geologii Bavorska, Wagner i cizí mapy j. Spezialkarte der Oesterr.-Ungar. Monarchie 1 : 75.000 přejímají, kdežto úřední Karte des Deutschen Reiches

---

[1]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886. T. 2. 1 : 6000.

[2]) Topographischer Atlas 9. Kgr. Bayern, 1 : 50.000. Bl. 50. Zwiesel (west 1870. Revid. 1888.

[3]) Hochstetter F., Die Höhenverhältnisse, des Böhmerwaldes. Jahrbuch der k. k. Geol. Reichsanstalt, VII., 1856, p. 325.

[4]) Sendtner O., Die Vegetations-Verhältnisse de Bayerischen Waldes. München 1860, p. 140.

[5]) Gümbel C. W., Geognostische Beschreibung des Ostbayerischen Grenzgebirges. Gotha 1868, p. 66.

[6]) Topographischer Atlas d. Kgr Bayern. 1 : 50.000. Bl. 50. Zwiesel (west) 1870. Revid. 1888.

1 : 100.000 a s ní rakousko-uherská Generalkarte von Mitteleuropa 1 : 200.000 mají výšku 932 *m*. Z těchto čísel, jež ovšem vznikla z materialu velmi různorodého a jež se liší od sebe až o 24 *m*, přijímám výšku topografického bureau 934 *m*.

Plocha hladiny jezerní byla až dosud různě udávána. Některá z těch čísel postrádají vůbec vážného podkladu, tak čísla v různých průvodcích uváděná, ku př. ing. Möchel jednou 26·5, po druhé 10 *ha*, Řivnáč podle Möchela 26·5, starší dílo Wenziga a Krejčího 23 *ha* (40 jiter), jenom průvodce Detterův 7 *ha*. Z odborných prací právě v nejstarším díle, totiž Winebergerově nalezneme přijatelné číslo 18 Tgw. = 6·233 *ha*, kdežto Gümbel udává ve starším díle 40 Tgw. = 13·63 *ha*, v novějším 13 *ha*, obě nekriticky. Wagner patrně omylem cituje z díla Gümbelova číslo 48 Tgw. = 17 *ha*. Sám počítal pro hladinu vodní jenom 4.3245 *ha*. To vztahuje se ovšem na stav r. 1896 a Wagner také na mapce zakresluje rozdíl proti bavorskému katastru, jenž udává pro jezero i se slatí 8·086 *ha*. Číslo Wagnerem udávané zdá se mi i pro onu dobu trochu nízkým. Já sám jsem zjistil podle své mapy terčovým planimetrem Coradiovým pro celé jezero rozsah 7·020 *ha*, z čehož připadá na zadní (západní) bassin 3·140, na přední (východní) bassin 3·880 *ha*. Při tom za konvencionalní hranici pokládám profil 6 VII. Ve skutečnosti leží při severním břehu hranice mezi oběma bassiny asi spíše směrem k odtoku; nemohl jsem však svého času vésti tento profil, tak jak bych byl chtěl, ježto se v těchto místech nalézalo příliš mnoho vodní vegetace.

Rozdíl mezi číslem, jež Wagner udává a jež já jsem naměřil, jest značný a týká se především zadního bassinu, ačkoliv i při předním bassinu mám za to, že Wagner plochu poněkud podcenil. Různost čísel lze částečně — pravím částečně — vysvětliti tím, že od návštěvy Wagnerovy slať v zadním bassinu a také vegetace mezi zadním a předním bassinem byla z valné části odstraněna. Číslo námi uvedené vztahuje se pouze na hladinu vodní. Hranice proti slati se ovšem mění podle toho, jak velká část slatě se toho kterého roku odstraní, celkem však během posledních 6 let zůstala téměř nezměněna. V střední části, na hranici mezi oběma bassiny bylo však jezero v té době od vegetace značně vyčištěno.

Obrysy jezera za vysoké a nízké vody mění se právě u V. Javorského jezera méně, než u kteréhokoliv jiného na Šumavě. Naše měření byla prováděna za stavu vody velmi vysokého, takže za nejvyššího stavu stoupne voda jen asi o 40 *cm*, při čemž obrysy předního bassinu změní se pouze tak, že stromy trčí přímo z vody. Hladinu vodní lze uměle jenom málo snížit, pouze asi o 1 *m*, tedy daleko méně než na jiných jezerech šumavských. Následek toho jest ovšem, že množství vody v jezeře jenom poměrně kolísá.

Přírůstek plochy dna proti hladně jezerní podle hodnot, jež dále, na svém místě uvádíme, jest mezi jednotlivými isobathami:

Mezi isobathou:	Ve východním bassinu: m^2	v západním bassinu: m^2
0— 1 *m*	78	66
1— 2 „	115	6
2— 3 „	110	34
3— 4 „	73	44
4— 5 „	56	32
5— 6 „	108	24
6— 7 „	90	19
7— 8 „	113	29
8— 9 „	110	14
9—10 „	84	4
10—11 „	66	—
11—12 „	65	—
12—13 „	45	—
13—14 „	35	—
14—15 „	22	—
15—16 „	4	—
	Celkem . .1174	286

Úhrnem pro celé jezero 1460 m^2.

Rozměry jezera co do délky a šířky poprvé udával Sendtner před 60 lety[1]) a sice na délku na 1300, šířku na 1000 stop. Překvapuje zde při pozorovateli jako byl Sendtner, značná šířka jezera, jež zdá se nasvědčovati tomu, že poloostrov, jenž dnes jezero zúžuje, tehdáž neexistoval. Potom teprve Wagner udal délku jezera ve směru od západu k východu na 441 *m* (podélná osa podle jeho mapy byla by asi 460 *m*), šířku — míněna tu asi největší — na 144 *m*. Mnou měřená podélná osa jezera, ovšem počítáme-li od nejzazšího bodu při ústí Geigenbachu, obnáší 530 *m*. Nepočítáme-li s úzkým průchodem od ústí Geigenbachu mezi severní a jižní slatí, tu měří nejdelší osa jezera 510 *m*. Značný rozdíl proti Wagnerovi vysvětluje se tím, že veliká plocha slatě byla zvláště v zadním bassinu odstraněna. Pokud se jedná o šířkové rozměry jezera, tu naměřil jsem jako nejmenší šířku tam, kde jezero na hranici mezi předním a zadním bassinem nejvíce se zúžuje, 127 *m*, největší šířku v předním bassinu ok. 150, v zadním přes 200 *m*. Kdyby nebylo poloostrova téměř uprostřed jižního břehu do jezera zasahujícího, bylo by lze říci, že jezero šíří se vždy více směrem od odtoku ku stěně.

Bathymetrie V. Javorského jezera. První číslo pro hloubku V. Javorského jezera udává Möchel[2]) a sice 33 *m* jako největší hloubku jezera,

[1]) Sendtner, Ansichten v. bayerischen Walde. Beilage zu Nr. 229 der Neuen Münchener Zeitung v. 25. Sept. 1855.

[2]) Möchel, Führer auf d. Bahn Pilsen-Eisenstein. Pilsen 1878, p. 118.

jinde[1]) udává 34 *m*, ale to jsou jistě udaje, jež se nezakládají na nějakém měření. Cituje to potom nekriticky Willkomm. Ještě dr. Wagner sděluje, že asi před 3 léty (tedy okolo r. 1893) měřili tu lesníci hloubku 33 *m*. Že číslo to neodpovídá skutečnosti, jest nepochybno a měření to, ač-li vůbec bylo vykonáno, jest jistě nesprávné. Ostatně není vyloučeno, že se tu jedná o nějakou tradici, jež byla již podkladem údaje Möchelova. Ve velkém průvodci Detterově udává se největší hloubka na 20 *m*. Jako první skutečný badatel přichází sem Bayberger. Čteme u něho,[2]) že v září 1870 měřili tu lesníci „přesně" 60′ = 17·54 *m*. Bayberger zdá se pochybovati o přesnosti jich měření — myslím, že neprávem — a staví naproti tomu svoje, jež prý provedl s největší přesností týmž strojem, jímž měřil Al. Geistbeck v bavorských Alpách. Kdo prý jednou jezero viděl, může již z celého utváření břehů seznati, že nemá žádnou značnou hloubku. Bayberger měřil zde od západu k východu hloubky: 2, 5, 8·5, 14, 14, 15, 15, 15, 13·5, 13·5, 11, 10, 5, 3, 2 *m*, od jihu k severu 4, 10, 12, 15, 15, 13, 10, 5 *m*. Věřím, že tyto hloubky byly dobře měřeny, mám však pochybnosti o jich správném lokalisování, nehledě k zvláštním okrajům jezera na mapě Baybergerově. Jsou to první určitá data o hloubkách V. Javorského jezera, jež odstraňují fantastické číslo Möchelovo a jistě nejsou vzdálena skutečnosti. Co zvláště bych z čísel a mapky Baybergerovy konstatoval, jest poměrně značný spád dna od břehů. Na mapě Baybergerově jeví se jezero jako jednotný bassin tvaru pravidelného obdélníku. Mám za to, že zde Bayberger neodhadl správně vzdálenosti při dotyčném profilu. Kdo z praxe ví, jak veliký někdy bývá rozdíl mezi odhadnutou a přesně měřenou vzdáleností při plavbě na jezerech, ten pochopí, co zde míním.

Přesnější jsou již měření Wagnerova,[3]) jenž zde v srpnu 1896 měřil 1 podélný a 5 příčných profilů. Podélný profil od západu k východu vykazuje tato čísla: 3, 8·5, 9, 8, 4·5, 2, 3·5, 8·5, 13, 14·5, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 14·5, 13, 11·5, 8·5, 5·5, 3, 1 *m*, a dále příčné profily a sice v profilu nejblíže k odtoku od jihu na sever:

c. d. 4, 6, 8·5, 9·5, 3 *m*, *l. m.* 5, 14, 15, 11·5, 7 *m*;

e. f. 7, 10, 13, 14, 15, 15, 15, 11·5, 4·5 *m*;

g. h. (= profil v nejužší části jezera, asi souhlasný s naším profil. m 6 VII 0·8, 2·5, 1·5, 0·8 *m*. Ze zadního bassinu sděluje Wagner příčný profil *i. k.*, asi souhlasný s naším 7 VIII. Vykazuje čísla: 5·5, 7, 7, 6, 5·5, 7, 8, 4, 1·5 *m*.

Mapa Wagnerova po prvé aspoň odpovídá schematicky skutečným poměrům. Wagner podle své mapy vypočetl plochu pro jednotlivé stupně hloubkové takto:

---

[1]) týž, Bohemia 1877 Nr. 191.

[2]) Bayberger, Geographisch-geologische Studien, p. 31., s mapou.

[3]) Wagner, Die Seen des Böhmerwaldes, p. 31, s mapou.

mezi	0—2	*m* = 1	*ha* 29	*a* 15	m^2
„	2—5	„ = 0	„ 95	„ 85	„
„	5—10	„ = 0	„ 98	„ 10	„
„	10—15	„ = 0	„ 75	„ 60	„
	15	„ = 0	„ 33	„ 75	„

Já sám jsem měřil v září 1907 v předním bassinu 140 hloubek v 7 profilech a r. 1908 v zadním bassinu ve 3 profilech 68 hloubek.

Měření byla provedena v předním bassinu většinou u vzdálenosti od 5 ku 5, v zadním u vzdálenosti od 10 ku 10 *m*.

Profil 1 I.

| — 4, — 5, — 6, — 7·5, — 8, — 7, — 5, — 2, — |

Profil 2 II.

| 1·5, 4, $5^1/_4$, 7, 8·6, 10·2, 11·3, — 12·5, 13·2, 15·5, 13·4, — 12·5, — 10, — 5·4 — 1 |

Profil 3 III.

| 2·8, 4·4, $6^1/_4$, $8^1/_4$, $10^1/_4$, $12^1/_4$, 13·6, 15, 15·5, 15·7, 15·7, 15·8. 15·9, $15^3/_4$, 15·7, 15·5, 15·2, 14·7, $13^1/_4$, 12, 10·4, 7·3, 5·5, 3·2 — |

Profil 4 IV.

| 1, $2^3/_4$, 5·5, $6^3/_4$, 8·6, 10·5, $11^3/_4$, 12·9, $13^3/_4$, 14·5, 15, 15·4, —, $15^1/_4$ $15^3/_4$, 16, 16, $15^3/_4$, — $15^3/_4$, — 15·5, — 13, — 9, — 5, — $3^3/_4$ — |

Profil 5 V.

| $1^1/_4$, — 3, — $5^1/_4$, 8, 9·2, 10·5, $12^1/_4$, $13^1/_4$, $14^1/_4$, 14·7, 15·4, 15·5, 15·6, 15·6, 15·8, 15·7, 15 8, 15·6, 15·5, 14·9, 13 $^1/_4$, 11·4, 9, 7, $4^3/_4$, $2^3/_4$, $2^3/_4$, 1, — |

Profil 5 VI.

| 1·4, 1·8, $2^3/_4$, 3·7, 4·5, 5·7, 6·6, $7^3/_4$, 8·6, 10·2, 10·9, 12, 12·4, 13, 13·6, 14·2, 14·4, 14·6, 14·5, 14·4, $14^1/_4$, $13^3/_4$, $13^1/_4$, 12·4, 11·6, $9^3/_4$, 7·9, 5·6, —, $2^1/_4$, — — |

Profil 6 VII.

| 1·6, 1·6, —, $1^3/_4$, —, $1^3/_4$, —, $2^3/_4$, —, 3·9, —, 3·8, — $3^3/_4$, —, $3^3/_4$, —, $3^3/_4$, —, 3·8, —, 3·9, — 3·1, —, 2, — 0·7, — |

Profil 6 IX.

| —, 1·5, —, 1·5, — 1·5, — 1·5, — 1·5, 1·5, — 2, — $3^3/_4$, — $5^1/_4$, —, $6^3/_4$, —, $7^3/_4$, —, $8^3/_4$, —, $9^1/_4$, —, $9^3/_4$, — 10, —, 10, —, $9^3/_4$, —, $8^3/_4$, —, 5, —, 3, — 2·5 |

Profil 6 X.

| —, $1^1/_4$, —, $1^1/_4$, —, 1·5, —, $1^1/_4$, —, $1^1/_4$, $1^1/_4$, —, 1·5, —, 2, — $3^1/_4$, —, 5, —, $6^3/_4$, —, 8, —, 9, —, 9·5, —, 9·5, —, $8^3/_4$, — $6^3/_4$, —, 4·5, —, 2·5, —, $2^3/_4$, —, 2, —, $1^3/_4$, —, 1, —, $^3/_4$, —, —, 0·5, — |

Profil 7 VIII.

| —, —, —, —, 1·5, —, 2·5, —, 3·5, —, 4, —, 3·5, —, $3^1/_4$, —, 2, —, $1^1/_4$, —, 1·5, —, 2, —, 3·5, — 4·5, —, 6, —, 6, —, $5^3/_4$, —, $4^1/_4$, —, 3, —, 2, —, 1·5, —, 2, —, $1^3/_4$, —, $^3/_4$, — |

Hustota měření hloubkových jest v předním bassinu značně větší než v zadním. Připadá tu 140 měření na plochu 3·880 *ha*, tudíž jedno měření na 227 m^2, kdežto v zadním bassinu připadá na plochu 3·140 *ha* 68 měření, tedy jedno měření na 460 m^2. Při tom ovšem počítám profil 6 VII plně k přednímu bassinu. Počítáme-li s jezerem jako celkem, tu připadá jedno měření hloubkové na 337·5 m^2. Největší neměřená plocha nalézá se v jihozápadní části zadního bassinu.

Na základě těchto měření pořídil jsem přiloženou bathymetrickou mapu jezera, z níž pak pomocí měření planimetrických a kurveometrických dosaženo výsledků, jež shrnuji v následující tabulce, při čemž rozlišuji přední (východní) a zadní (západní bassin). Kdybych počítal jenom s jediným bassinem, tu by morfometrické hodnoty skutečně zkreslovaly skutečný stav. Zvláště o hodnotách pro střední sklon to platí.

Vrstva mezi isobathami	Přední jezero. Plocha hladiny mezi isobathami v m^2	Vývoj isobath v m	Obsah vodní v m^3	Úhel sklonu	Zadní jezero. Plocha hladiny mezi isobathami v m^2	Vývoj isobath v m	Obsah vodní v m^3	Úhel sklonu
0— 1	4402	845	36555	10° 39′	3820	777	33276	10° 3′
1— 2	2650	810	33032	16° 27′	7766	650	32471	4° 44′
2— 3	2458	755	30486	16° 42′	5312	635	22445	6° 30′
3— 4	3262	720	28802	11° 57′	3274	575	16128	9° 23′
4— 5	2494	660	24747	12° 3′	3200	507	12769	8° 6′
5— 6	2186	620	22405	15° 32′	1778	395	8921	9° 23′
6— 7	1868	595	20392	17° 15′	1616	345	7054	8° 44′
7— 8	1678	565	18820	18° 9′	1366	280	5458	10° 8′
8— 9	1536	535	17016	18° 42′	1370	220	4091	8° 6′
9—10	1460	510	15501	18° 49′	1704	170	2638	3° 52′
10—11	1482	485	14032	16° 42′	(218)	(60)		
11—12	1544	465	12515	16° 13′				
12—13	1916	433	10783	12° 17′				
13—14	2024	402	8801	10° 31′				
14—15	2356	350	6600	7° 48′				
15—16	5136	295	5312	2° 20′				
16	320	125	—	—				
Úhrn ..	38772		305799		31424		145278	
Střední sklon				14° 44′	. . . . .			7° 57′

Lze tudíž množství vody v celém jezeře počítati na 451.100 m^3, střední hloubku předního bassinu na 7·88 *m*, zadního na 4·61 *m* a celého jezera na 6·42 *m*.

V číslech výše uvedených jsou zvláště nápadny hodnoty zaznamenané pro sklon v zadním bassinu. Neobyčejnou hodnotu pro sklon ve vrstvě 0—1 *m* vysvětlujeme vertikálním useknutím slatě do hloubky větší než 1 *m*. Velmi nízký sklon mezi 1—2 *m* podmíněn jest zvláště plochým dnem v jihovýchodní části zadního bassinu. Připomínám, že plochy uvnitř isobathy 16 *m* v předním bassinu a uvnitř isobathy 10 *m* v zadním bassinu pokládám za horizontální.

K vůli úplnosti uvádím, že Wagner, ovšem na základě docela jiných čísel, vypočítal střední hloubku jezera na 6·1 *m*, číslo, jež se blíží hodnotě mnou udané.

Množství vody v jezeře obnáší podle něho 265.162·5 m^3, z čehož připadá

na isobathu	0—2 *m*	12 915	m^3
„ „	2—5 „	33 547·5	„
„ „	5—10 „	73 575	„
„ „	10—15 „	94 500	„
„ „	15 „	50 625	„

Zde připomínám prozatím, že tato čísla Wagnerova nelze přímo srovnávati s mými, ježto vrstvy vodní u Wagnera jsou míněny ve smyslu docela jiném, než u mne.

Podle isobathycké mapy rozlišíme na V. J. j., jak již řečeno, zcela určitě dva bassiny, východní a západní, oddělené od sebe v celé šířce jezera širokým prahem. V příslušném profilu nedosahuje jezero nikde hloubky ani 4 *m*. Jest s podivením, že Bayberger o tomto prahu ani se nezmiňuje a poloostrov z jihu do jezera vybíhající ani v textu ani na mapě neuvádí. Teprve Wagner konstatoval tu dva bassiny. Ovšem i Wagner považuje patrně zmíněný polostrov za útvar zcela nový, vzniklý snad teprvé od návštěvy Baybergerovy, neboť praví: „Jest nápadným, že ještě Bayberger neví ničeho o rozdělení jezera ve dvé; jeho mapa zaznamenává v místech dnešního průplavu hloubku 14 *m*. Přihlížíme-li při tom ku výpovědi zdejšího hostinského, že oba výběžky, jež dnes jezero zúžují, ještě před 9 léty (tedy asi okolo r. 1887) neexistovaly, máme tu doklad, jak neobyčejně rychle se jezero zanáší.“ Mám za to, že Bayberger pořídil svou mapu příliš od oka. V té době vegetace vodní pokrývala asi hladinu tak, že skutečné obrysy pobřežní nepřišly k platnosti. Že poloostrov jest data dosti moderního, o tom na základě místního ohledání nepochybuji. Zde hladina vodní utrpěla veliké ztráty.

Bassin přední, t. j. východní, tvoří zcela pravidelnou vanu. Dno klesá tu v severu i v jihu velmi pravidelně, kdežto v západu a zvláště na východě směrem k odtoku jest sklon povlovnější. Poměrně značně roz-

sáhlá jest plochá hlubinná část jezera, ohraničená isobathou 15 *m*, již lze pokládati za úplně rovnou; obnáší značně přes 5000 m^2. Jistý povlovnější přechod od většího sklonu pobřežního lze konstatovati již od isobathy 12 *m* a určitě od 13 *m*. Na 3 příčných profilech měřil jsem na vzdálenosti 50 a více *m*, tudíž více jak $^1/_3$ šířky jezerní hloubku nad 15 *m* celkem 26krát, hloubku plných 16 *m* ovšem jenom dvakráte na profilu 4 IV.

Porovnáme-li hloubkové poměry tohoto bassinu s ostatními jezery šumavskými, tu nejvíce blíží se mu jezero Prášilské. Rozdíl není tu sice velký (západní bassin V. J. jezera má při ploše 38.700 m^2 vody 305.800 m^3, jezero Prášilské při ploše 37.200 m^2 274.000 m^2), ukazuje však přece na větší sklon dna než při jezeru Prášilském.

Zadní bassin (západní) hloubkovou osou svou nalézá se kolmo na hloubkové ose předního bassinu a podélné ose celého jezera vůbec, ovšem nikoliv tak, jak soudil svého času Wagner, za jehož návštěvy ovšem slať právě od západu sáhala mnohem dále do jezera než dnes. Zvlášť mělká jest severovýchodní a jihovýchodní část tohoto bassinu. Kdyby hladina jezera byla snížena jenom o 2 *m*, tu místo štíhlého dnes poloostrova objevil by se poloostrov poměrně rozsáhlý; jiný menší by vznikl v severu. Ostatně však, počínaje již isobathou 3 *m* — nehledě k jejímu uchýlení na východě — jest sklon mezi isobathami 3 až 9 *m* pravidelný, ovšem i zde všude povlovnější než v bassinu východním. Plochou hlubinnou končinu ohraničuje isobatha 9 *m*.

Hloubku 9 *m* konstatoval jsem tu v profilu 6 IX na vzdálenosti 50 *m* čtyřikrát a hloubku 10 *m* dvakráte, kdežto na profilu 6 X hloubku pře 9 *m* třikráte. Slať přímočárně, ovšem uměle useknutá spadá místy ihned do hloubky 2 *m*. Řada drobných vegetačních ostrůvků, táhnoucích se podle jihovýchodního břehu, ukazuje, odkud dnes hrozí jezeru zanášením největší nebezpečí.

Jezero *sbírá vodu* s plochy poměrně značné, již Wagner odhadoval na 220 *ha*, tudíž daleko více, než kterékoliv jiné jezero šumavské. Bývalou firnovou plochu pokusil se na základě dnešních poměrů orografických odhadnouti Bayberger, a sice na 3 km^2. Dnes přitéká sem hlavní množství vody Geigenbachem se svahů Javoru do západní části jezera. Geigenbach tvoří velmi krásné kaskády, při svém ústí má však již klidný vinutý tok. Jiný menší přítok, zaznamenaný dosud jenom bez jména na mapce Wagnerově, ústí do jižní části zadního bassinu; byl mi jmenován jako Bärenbach. Mimo to ústí ještě od severu skrovný potůček do severovýchodní části jezera.

Vývoj břehů jezerních obnáší 1350 *m*. Obvod kruhu, jenž má stejnou plochu jako jezero, jest 942 *m*. Jeví se tudíž vývoj břehů vyjádřen poměrem 1 : 1·43.

Největší vzdálenost od břehu obnáší v předním bassinu 75 *m* a sice na isobathě 15 *m*, málo na východ od hloubky 14·2 *m* v profilu 5 VI.

V zadním bassinu jest tato vzdálenost asi o 10 *m* větší a sice asi 10 *m* na sever od hloubky 5 *m* v profilu 6 X.

Teplota vody. Wagner provedl právě na V. Javorském jezeru svá nejlepší a nejcennější pozorování teploty. Hodlal provésti zde systematická pozorování souvisle po několik dnů a nocí v mezerách šestihodinných. Prudká bouřka překazila již druhé noci pobyt na jezeru a také třetí noci silný dešť zahnal jej z jezera, přece však jsou to první noční pozorování teploty sloupce vodního na šumavských jezerech.

Uvádím nejprve pozorování Wagnerova v srpnu 1896 a potom svá pozorování v září 1907.

Pozorování dra P. Wagnera r. 1896.

vzduch	19. srpna		20. srpna				21. srpna				22. srpna		
	6 *h* p. m.	12 *h* a.m. (půlnoc)	6 *h* a. m.	12 *h* m.	3 *h* p. m.	6 *h* p. m.	6 *h* a. m.	12 *h* m.	6 *h* p. m.	12 *h* a.m.	6 *h* a. m.	12 *h* m.	6 *h* p. m.
	10·5°	7·5°	8·5°	18°	20·5°	14°	12°	16°	14·75°	12·5°	13·5°	13·5°	12°
0 *m*	13·3	12·5	12·0	13·3		15·3	13·75	14·8	15·3	14·75	14·5	14·75	14·5
1 „	12·75	12·5	12·0	12·5		15·5	13·5	14·5	13·25	—	13·25	13·25	14·5
2 „	12·25	12·0	12·0	12·0		12·25	12·0	12·25	12·5	—	12·1	12·1	12·1
3 „	11·75	11·75	11·75	11·9		11·9	11·75	11·75	11·75	—	11·75	11·75	11·6
4 „	11·75	11·3	11·0	11·25		11·0	11·4	11·4	11·4	—	11·0	—	11·0
5 „	8·75	9·0	9·0	9·7		9·0	8·75	9·5	9·2	—	9·0	—	9·2
6 „	7·5	7·25	7·0	7·75		7·25	7·6	7·2	7·0	—	7·2	—	7·0
7 „	7·0	6·5	6·3	6·5		6·0	6·5	6·0	6·25	—	6·2	—	6·0
8 „	6·0	5·5	5·5	5·5		5·5	5·6	5·25	5·9	—	5·6	—	—
9 „	5·0	5·0	5·0	5·2		5·2	5·0	5·1	5·3	—	5·1	—	—
10 „	5·0	—	—	5·5		5·0	4·8	5·0	5·0	—	5·0	—	5·0
11 „	4·75	—	—	4·8		—	—	—	—	—	—	—	—
12 „	—	—	—	—		—	4·75	4·7	4·6	—	4·6	—	—
13 „	4·75	—	—	4·75		—	4·5	—	—	—	—	—	—
14 „	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—
15 „	—	—	—	—		4·6	4·6	4·6	—	—	—	—	—

Celkem provedl zde Wagner za 4 dny 126 měření teploty v 11 sloupcích.

Postup povětrnosti v těchto dnech charakterisuje Wagner: Dne 18. srpna sucho. První slunečný den 19. srpna. Dne 20. srpna slunečno, slabý vítr střídavého směru. O půlnoci na 21. srpna bouřka s deštěm (2·6 *mm*) a silným větrem. Ráno 21. srpna až do 6 *h* 30 *m* mlha, potom mírně zamračeno, dusno a bezvětří. V noci na 22. srpna silný dešť (5·7 *mm*), ráno mraky v celé kotlině, od 9 *h* dešť (teplota vody dešťové 15°), odpoledne zamračeno. Teplotu přítoků a odtoku měřil Wagner v poledne 20. srpna. Teplota jižního přítoku byla 9·5, severního přítoku 10·5, odtoku 12·5. Teplota vzduchu při tom 18°.

Vlastní pozorování v září 1907.

Počasí před tím i v době pozorování vesměs pěkné.

	12. září 1907 ok. 7 *h* dop.	13. září 1907 ok. 5 *h* 30 *m* odp.	14. září 1907 mezi 12 a 1 *h* odp.
vzduch	9·5	14·25	17·0
0 *m*	13·5	16·8	17·5
1 ,,	13·4	14·6	15·0
2 ,,	13·2	13·7	14·0
3 ,,	12·7	13·0	13·0
4 ,,	12·2	12·4	12·5
5 ,,	11·0	10·5	10·5
6 ,,	9·0	8·6	8·9
7 ,,	8·1	7·5	7·5
8 ,,	7·6	6·7	7·0
9 ,,	7·1	6·3	6·5
10 ,,	7·0	5·9	6·0
11 ,,	6·5	—	—
12 ,,	6·0	—	—
13 ,,	5·6	—	—
14 ,,	—	—	—
15 ,,	—	—	—
15·5 ,,	—	5·3	—

Pozorování tato byla provedena překlopným teploměrem Negretti-Zambra ve sklopce Uleově.

Dne 14. září ve 4 h. odp. byla také provedena měření teploty malého severního přítoku (v nevelké vzdálenosti od pavillonu), jenž vykazoval teplotu pouze 6°, kdežto odtok ve vzdálenosti asi 10 *m* pod splavem měl 16·75° *C*.

Pozorováním teploty budeme ovšem ještě věnovati pozornost v srovnávací stati o jezerech šumavských.

Průhlednost vody. První pokus zjistiti průhlednost vody ve Velkém Javorském jezeru učinil Bayberger.[1]) Praví, že voda jest tu průhledná sotva do 0·4 *m*. Bayberger neudává, jak tuto průhlednost zjistil, ježto však při Černém jezeru mluví o tom, že sonda byla viditelna ještě v hloubce 8 *m*, lze míti za to, že i na V. Javorském jezeru pozoroval stejně. Snad tu máme co činiti s přepsáním a má snad státi 4 *m*. Nesprávnost

[1]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde, p. 31.

zmíněného čísla 0·4 *m* vytkl již Wagner,[1]) jenž pozoroval zde mosazné části teploměru ještě do hloubky 3 *m* a bílou desku průměru 0·30 *m* do hloubky 4·1 *m*. O nesprávnosti čísla Baybergerova nemůže býti pochybnosti. Pozoroval jsem sice na jednotlivých jezerech šumavských veliké proměny v průhlednosti vody, nikdy však jsem nepozoroval průhlednost menší než 1·5 *m*. Na V. Javorském jezeru měřil jsem sám za krásného slunného dne 13. září 1907 ok. 4 h. odp. průhlednost 4·5 *m* a za stejného počasí 26. září 1913 rovněž 4·5 až 4·7 *m*, tedy v obou případech o něco, ač nikoliv o mnoho více, než Wagner.

Barva vody. O této otázce vyslovují se autoři velmi různě. První poznámku nalézáme u Winebergera,[2]) jenž mluví o čisté chladné vodě. Ostatně jen ještě Hellich[3]) označuje vodu jako čistou a bezbarvou. Zde míněna jest patrně voda, jak se jeví ve sklenici: Möchelovi[4]) zdálo se jezero temně modrým a stejně udává Detter,[5]) jenž (ovšem na jiném místě) udává barvu temně zelenou. U obou autorů jedná se prostě o dojem, jejž vyvolává odraz oblohy nebo stín stromoví jezero obklučujícího. Mluví-li Gümbel[6]) na jednom místě a rovněž Bayberger[7]) o černé hladině jezerní, lze míti za to, že míněn jest tím dojem při pohledu na jezero s hůry. V tom případu zdávají se ovšem jezera temnými až černými. Ostatně však Gümbel a již před ním Sendtner správně pochopili skutečné zabarvení jezera. Sendtner[8]) první odhaduje barvu všech šumavských jezer jako temně kávově hnědou, Gümbel[9]) jako temně hnědou a v jiném svém díle[10]) ji i vysvětluje. Stejně Metzger[11]) označuje barvu jezer šumavských jako temnou následkem slatí na okraji jezer. Skutečné pozorování barvy vody podle určité skály provedl zde přede

---

[1]) Wagner, Die Seen des Böhmerwaldes, p. 34.

[2]) Wineberger L., Versuch einer geognostischen Beschreibung des Bayerischen Waldgebirges, p. 27.

[3]) Hellich B., Perloočky země České (Cladocera). Arch. pro přír. prozkoumání Čech. Praha 1873, p. 120.

[4]) Möchel H., Der Führer auf der Bahn Pilsen-Eisenstein-Deggendorf. Pilsen 1878, p. 118 a 121.

[5]) Detters Illustrierter Führer durch d. unteren Bayer- u. Böhmerwald. II. Deggendorf, 1904, p. 178.

[6]) tamt. p. 354.

[7]) Gümbel C. W., Geognostische Beschreibung des ostbayerischen Grenzgebirges, p. 24.

[8]) Sendtner O. (anonym), Ansichten vom bayerischen Walde. Beilage zu Nr. 229 der Neuen Münchener Zeitung v. 25. Sept. 1885.

Sendtner O., Vegetationsverhältnisse des Bayerischen Waldes. München 1860, p. 75.

[9]) Gümbel C. W., Geognostische Beschreibung des ostbayerischen Grenzgebirges, p. 552.

[10]) tamt., p. 413 a 416.

[11]) Metzger C., Beiträge zur Kenntnis der hydrographischen Verhältnisse des bayrischen Waldes, p. 7.

mnou jedině Wagner[1]) ok. 20. srpna 1896. Označuje ji jako značně hnědou — stejně jako jezera Čertova — a stotožňuje ji s č. 15 skály prof. Ule. Já jsem porovnával barvu vody s toutéž skálou Uleovou 13. září 1907. Byla mezi číslem 15 a 16, spíše bližší k číslu 16. Pozorování, jež jsem provedl tu s některými posluchači 26. září 1913, potvrzovala totéž. Pokládám Velké Javorské jezero za temnější než jezero Čertovo a po jezeru Roklanském za nejtemnější ze všech šumavských.

Sníh. Data o sněhu a ledu uveřejnil dosud jenom Wagner[2]) podle sdělení tehdejšího hostinského na jezeře.

První sníh 1893	padal	2. listopadu,	poslední sníh	největší výška sněžné pokrývky
„ „ 1894	„	15. října,	5. dubna 1894	48 *cm*
„ „ 1895	„	17. října,	22. května 1895	137 *cm*
			6. května 1896	163 *cm*

Na jezerní stěně ležel sníh r. 1896 ještě až do 10. června. R. 1896/97 bylo ho při odtoku až 1·25 *m*, pod stěnou až 2 *m*. Na jiném místě udává Wagner[3]) pro Javor a V. Javorské jezero 2 až 3 *m* sněhu v zimě 1896/97. Při tom dlužno připomenouti, že zima r. 1896/97 byla zde neobyčejně mírná. Na ledě bývá sněhu pod jezerní stěnou více než při odtoku. Na jaře řítí se laviny se stěny a strhují s sebou balvany ledové a kmeny; stržení skal nebylo pozorováno.

Mně sdělil zdejší hostinský Ludwig Krieger, muž intelligentní, jenž jest zde od 1. dubna 1901, že bývá sněhu někdy ještě více. Přihodí se, že sněžívá již okolo 1. října; sníh taje v dubnu a tání jeho potrvá někdy až 6 týdnů.

Led. Také o ledu sdělil dosud pouze Wagner některá data. Ještě počátkem března 1896 byly vyříznuty kusy ledu 73 *cm* tlusté a t. r. utvořil se první led 10. listopadu, uzavřená pokrývka ledová 18. listopadu. V zimě 1896/97 byla tloušťka ledu 70 až 80 *cm*. Podle pozorování Kriegerových zamrzává jezero obyčejně uprostřed listopadu. Krieger vyprávěl mi o různém zvrstvení ledu během zimy. Střídají se tu vrstvy ledu a sněhu až prý do maximalní tloušťky 2½ *m*. Jest to samozřejmé a měl jsem ostatně sám příležitost pozorovati to na jezeru Čertovu. Na jaře led působením slunce znenáhla roztaje a jen slabé a nevelké kry proplují propustí v hrázi. Zpravidla bývá prý jezero okolo 7. nebo 8. května ledu prosto.

Chemické složení vody jezerní známe dosud z jedné analysy, provedené C. Metzgerem.[4])

---

[1]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes, p. 34.

[2]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 35.

[3]) Wagner P., Über die Schneeverhältnisse im bayrisch-böhmischen Grenzgebirge. Leopoldina. XXXIII., p. 138.

[4]) Metzger C., Beiträge zur Kenntnis der hydrogr. Verhältnisse des bayrischen Waldes. Erlangen 1892, p. 8, 9 a 22.

V 1000 cm^3 vody:

Suchý zbytek 0·0287, kyslík potřebný k oxydaci 0·00755.

V 1000 cm^3 vody jest:		což odpovídá v litru:	
$NaCl$	0·002532	Na_2O	0·002210
Na_2SO_4	0·000772	K_2O	0·000966
K_2SO_4	0·001788	CaO	0·002080
$CaSO_4$	0·002420	MgO	0·001080
$CaCO_3$	0·001936	Cl	0·002144
$MgCO_3$	0·003068	SO_3	0·002480
SiO_2	0·004000	SiO_2	0·004000
Fe_2O_3, Al_2O_3	0·0009000	Fe_2O_2, Al_2O_3	0·000900
		CO_2	0·002040
	0·017416 *g*		0·017900 *g*

Ve 100 dílech zbytku po odpaření bylo:

Na_2O	12·34%
K_2O	5·40%
CaO	11·62%
MgO	6·03%
Cl	12·26%
SO_3	13·86%
SiO_2	22·36%
Fe_2O_3, Al_2O_3	5·02%
CO_2 váz.	11·40%
	100·29%

O zvířeně V. J. jezera psali, pokud mi známo, dosud jenom prof. A. Frič a Bohuslav Hellich, oba patrně na základě výzkumu, jejž zde podnikli v červnu 1871.

Frič[1]) shrnuje výsledky své takto:

Velké jezero Javorské jest nejbohatší (ze všech šumavských) na Holopedie, v jichž společnosti vyskytuje se kulovitá kolonie vírníků (Conochylus volvox?)

U silně porostlého břehu v zadní části jezera byly uloveny:

Lynceus hamellatus, velmi často Lynceus lacustris, L. truncatus a L. sphaericus, oba zhusta, dále řídčeji L. ovatus, L. nanus a L. exiguus, Sida crystallina, Cyclops minutus, C. coronatus, Polyphemus oculus, Diaptomus castor.

[1]) A. Frič, Über die Fauna der Böhmerwaldseen. Sitzungsberichte d. II. böhm. Ges. d. Wiss. Ig. 1871. II. Halbj., p. 8 a 9. Prag 1872.

Uprostřed jezera v hloubce 3 stop (Hellich udává: až do hloubky 3 *m*) hojně Holopedium gibberum, Cyclops minutus, Daphnia longispina, D. pulex, D. quadrangula.

Z infusorií byl pozorován nálevník (Stentor) jakož i nálevníci bičíkovití (Flagellata, Frič píše Flagelliferen).

Bohuslav Hellich[1]) doplňuje tyto zprávy Fričovy specialním výzkumem perlooček. Zvířena pobřežní jest tu na druhy bohatší než v Černém a Čertovu jezeře. Z perlooček má V. Javorské jezero největší množství, a sice ze 24 v šumavských jezerech známých zde 16 a sice:

Sida elongata, Holopedium gibberum, Daphnia ventricosa, Simocephalus vetulus, Scapholeberis mucronata, Ceriodaphnia reticulata, Eurycephalus lamellatus, Acroperus leucocephalus, Alonopsis elongata, Alona affinis, Alona costata, Pleuroxus excisus, Pleuroxus nanus, Pleuroxus truncatus, Chydorus sphaericus, Polyphemus pediculus.

Hospodářský význam V. Javorského jezera jest týž, jako u ostatních jezer šumavských — jak se o tom stala zmínka již při M. Javorském jezeru. Na jaře užívá se vody jezerní při plavení dříví. Ježto, jak již bylo uvedeno, lze hladinu vodní jen nepatrně, asi o 1 *m* snížiti, naplní se jezero zase velmi rychle během 10 až 12 hodin. V létě trvá ovšem 4 až 5 dnů, než jezero po vypuštění dosáhne zase nejvyššího stavu. Jest ze všech šumavských nejhojněji navštěvováno turisty a výletníky a sice jak s bavorské tak i s české strany. Vábí tu hlavně moderně zařízený a vedený pavillon, jenž má telefonické spojení s Bavorským Eisensteinem i s hostincem na vrcholu Javoru, padá tu na váhu sjízdnost cest s bavorské i české strany a ovšem především ta okolnost, že těsně podle jezera vede hlavní cesta na nejvyšší vrchol Šumavy. Již po řadu let těší se jezero v zimě zvláštní oblibě lyžařů. V zimě trvá hlavní saisona podle sdělení p. L. Kriegera od vánoc do 20. ledna; lyžaři však přicházejí pravidelně až do velikonoc. První ochranná chýše, t. zv. „Sechäusel", ovšem velmi primitivní, byla prý tu zřízena r. 1860. Později byla tu zřízena skutečná hostinská živnost. Se stavbou dnešního moderního pavillonu bylo započato na podzim r. 1903. Dokončena byla na jaře r. 1904 a slavnostně otevřena 17. července 1904. Umožněna byla jenom munificencí knížete Leopolda z Hohenzollern-Sigmaringen.

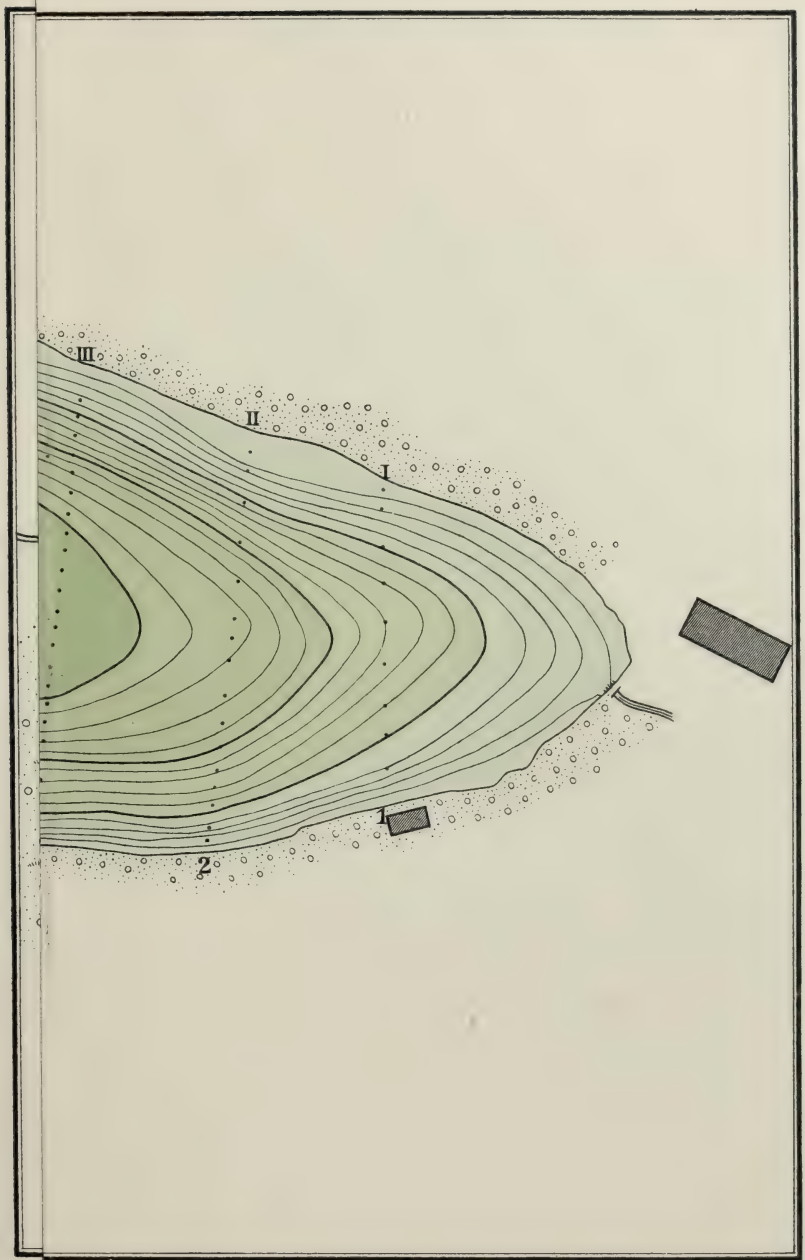
Jezero náleží z větší, severní části knížecí rodině Hohenzollern-Sigmaringen, v jižní části jest státním majetkem bavorským.

Při práci na Velkém Javorském jezeru byli mně radou i skutkem nápomocni p. Lehnert, kníž. hohenzollerský nadlesní tehdáž v Bavorském Eisensteinu, do jehož obvodu jezero náleželo, a p. L. Krieger, hostinský na jezeře. Vzdávám oběma upřímné díky.

---

[1]) B. Hellich, Perloočky země české (Cladocera) .Archiv pro přírodovědecké prozkoumání Čech. III. díl, č. 4. Praha 1878, pag. 120 a 121.

Pohled na Velké Javorské jezero se stěny přes slať směrem k odtoku. Fot. V. Švambera.



UNIE PRAHA

V. ŠVAMBERA : Velké Javorské jezero

podle měření v září 1907 a v září 1908

Rozpravy II. třídy České Akademie roč. 1914 čís. 9.

O lakkolithových intrusích porfyrů mezi Mníškem a Vltavou.

Sděluje **Radim Kettner** v Praze.

(S geologickou mapou, přílohou profilů a 3 obr. v textu.)

Předloženo dne 16. ledna 1914.

Úvod.

V povltavském algonkiu mezi Svatojanskými proudy a ústím Berounky rozeznávám celkem dva typy vyvřelin porfyrových. První prorážejí vrstvami napříč tvoříce buď pně (kozohorský porfyr u Nového Knína) neb útvary podobné pravým žilám a bývají doprovázeny horninami basickými („pásmo jílovské“ v okolí Jílového a Svatojanských proudů), druhé vyskytují se vždy ve tvaru dokonalých ložních žil a jeví vždy ráz hornin kyselých nejsouce spiaty geneticky s vyvřelinami basickými. Oba typy porfyrů, byť i si byly navzájem petrograficky velmi podobné, nelze při práci v poli omylem mezi sebou zaměniti, jsouť v terrainu určitě lokalisovány a od sebe odděleny širokými pásmy algonkických vrstev vyvřelin porfyrových prostých.

Porfyry druhého typu zajisté nezůstanou nepovšimnuty od těch, kteří plaví se parníkem od Zbraslavi ke Štěchovicům. Vystupují velmi výrazně na Vltavě, zvl. proti ústí *Károvského potoka*, na *Strnadu*, *na Víru* proti Vranému, u *Davle* a u *sv. Kiliána*, kdež jsou v četných lomech dobývány a slouží jako výborný materiál při vodních stavbách. Počínaje před 3 léty soustavné mapování v Povltaví mezi Svatojanskými proudy a Modřany, věnoval jsem hned od počátku pozornost vyvřelinám těmto, jejichž pravidelný výskyt v podobě ložních žil mi býval vždy velmi nápadný, zvláště při značné délce (až 7 *km*), na kterou žíly tyto vnikají do mezivrstevních prostor algonkického souvrství. V lomech u Vltavy svrchu uvedených bylo možno konstatovati u ložních žil, stejně jako u sedimentů, jimiž žíly prostupují, zpravidla směr sv a úklon k jv, takže se zprvu zdálo, jakoby žíly tyto byly vysílány vějířovitě z bassinu středočeské žuly a po-

užily při intrusi mezivrstevních ploch. Tomu zdál se nasvědčovati zvláště názor J. L. BARVÍŘŮV, podle kterého všecky vyvřeliny povltavské jsou vázány na společný bassin magmatický, z něhož pochází i spousta středočeské žuly.

Později však jsem nalezl v údolí potoka Bojovského v krásných odkryvech na trati mezi *Bojovem* a *Měchenicemi* porfyry, které zde rovněž tvořily velmi dokonalé ložní žíly, u nichž však úklon byl obrácen k severu, tedy na opačnou stranu od středočeské žuly. Okolnost tato vzbudila ve mně tím více zájmu o tyto horniny a zároveň i nedůvěru k mému původnímu názoru, zvláště když se mi podařilo dokázati na několika místech, že ložní žíly porfyrů byly společně s vrstvami algonkickými zvrásněny a že tudíž musí býti o mnoho starší, než vyvřeliny ostatní, které prostupují vrstvami napříč. Konečným výsledkem mých studií bylo dokázání fakta, že z povltavských porfyrů ony, které se vyskytují v podobě ložních žil, náleží jednomu společnému eruptivnímu tělesu, jehož intruse musila se udáti před zvrásněním vrstev algonkických. Podrobné odůvodnění tohoto mého tvrzení a zároveň úplné vylíčení všech geologických zjevů vztahujících se k porfyrům našim je úkolem této práce. Petrograficky zpracovány budou porfyry tyto v práci jiné.

I.

Povšechný přehled geologických poměrů studovaného území.

Nejvíce rozšířeným útvarem v krajině mezi Svatojanskými proudy, Mníškem a ústím Berounky jsou t. zv. břidlice příbramské, jichž algonkické stáří jsem dokázal ve své práci z roku 1912,[1]) popsav výskyt effusivního spilitu jižně od nádraží *Zbraslav-Závist*. Algonkium tvořeno jest tu hlavně z polymiktních drob a drobových neb jílovitých břidlic, jichž hlavními součástkami jsou vedle křemenných zrn a sericitu zvláště ostrohranné živce, jmenovitě lamellované plagioklasy; ba v některých ukázkách ustupují křemeny oproti plagioklasům silně do pozadí, takže sedimenty takové blíží se svou skladbou horninám arkosovitým.[2]) Jest význačno pro algonkický pruh táhnoucí se územím naším od *Říčan* přes *Nový Knín* a *Dobříš* k *Příbrami*, který budeme prostě nazývati pruhem příbramsko-říčanským, že tu není typických buližníků, t. j. takových zkřemenělých břidlic, jichž vznik dlužno položiti již do doby algonkické a které na jiných místech v českém algonkiu bývají složkou tak význačnou. Na okolnost

[1]) R. Kettner: O některých vyvřelinách z povltavského algonkia. Rozpravy České akademie, roč. XXI., čís. 30, Praha 1912.

[2]) R. Kettner: Ein Beitrag zur Kenntnis der geologischen Verhältnisse der Umgebung von Königsaal (Böhmen). Verhandlungen d. k. k. geol. Reichsanstalt, Wien 1914.

tuto poukázal již FR. POŠEPNÝ [3]) ve své práci o montanicko-geologických poměrech okolí příbramského, a já pak bych k tomu dodal i tolik, že v celém pruhu příbramsko-říčanském kromě jediného výskytu na Závisti není též vyvřelin spilitových, s kterými jsou buližníky v genetickém spojení.

Buližníkům podobné horniny vyskytující se v krajině mezi Mníškem a Vltavou (nejblíže od Prahy na př. na *Čihadle* u *Točné* a u *Jiloviště*) jsou zcela jiného původu než pravé buližníky algonkické a jsou i značně mladší než tyto. Nevynikají též tak nápadně nad okolní povrch jako buližníkové kamýky na sev. od Prahy, v poříčí Mže a j. V práci této se k nim ještě vrátíme a vyložíme podrobně jejich vznik.

Vrstvy algonkické jižně od spilitu závistského až ke *Skochovicům* zapadají vesměs k jv a jsou tudíž, jakožto nadloží spilitu závistského, mladší tohoto. Upozorniti sluší, že mezi *Říčany* a *Dobříší* vyskytují se v algonkiu slepence známé až dosud z *Modřanské rokle* a okolí, od *Kuří* u Říčan, z okolí *Jesenic*, z údolí potoka *Libeřského*, z údolí potoka *Zahořanského*, od *Petrova*, z údolí Sázavy u *Pikovic*, z jižního okraje porfyru v *Davli*, z poříčí *Kocáby* v pruhu mezi *Hrašticemi*, *Mokrovraty*, *Pouštěmi* a *Vojířovým mlýnem*, z *Větrného vrchu* u *Dobříše*, od *Lhotky*, z krajiny mezi *Dubnem* a *Dubencem* u Příbrami a j. Vrstvy tyto zdají se býti jednotným význačným horizontem v algonkiu pruhu příbramsko-říčanského značíce periodu krátkého vyzdvižení vrstev algonkických nad hladinu tehdejšího moře.

K posouzení relativního stáří vrstev, zvláště pak poměru slepenců ke spilitu zavistskému, budiž zde uvedeno faktum zjištěné na nové silnici ze Závisti do Točné. Zde vystupují dvě ložní žíly porfyrové. Mezi oběma u telegrafní tyče označené číslem 68 nalézáme vrstvu algonkických slepenců, která sem zasahuje jakožto pokračování slepenců Modřanské rokle a z níž svrchnější část byla nadložním porfyrem částečně urvána a v úlomcích v porfyru uzavřena. Porfyry pokračují odtud jz. směrem přes *Hradiště* u Závisti, zachovávajíce stále týž úklon jako okolní vrstvy, t. j. k jv., a vycházejí v údolí vltavském při ústí *Károvského potoka*, tedy v nadloží spilitu závistského. Poněvadž pak obě ložní žíly chovají se tektonicky jako vrstvy, jest tím podán důkaz, že i pokračování slepenců Modřanské rokle jest mladší spilitu závistského. Naopak zase případ tento ukazuje, že ložní žíly porfyrové mezi Jiloništěm a Točnou intrudují přibližně v niveau slepenců algonkických (srv. str. 14).

Z okolnosti, že algonkické slepence a tudíž i všecky vrstvy od ústí Károvského potoka na jih až asi k Davli jsou určitě mladšími spilitu závistského, domnívám se, že větší díl pruhu příbramsko-říčanského tvoří

[3]) Beitrag zur Kenntniss der montangeologischen Verhältnisse von Příbram, Archiv für prakt. Geologie II., str. 624.

asi samostatný stupeň českého algonkia, mladší komplexu spilitového. Stupeň tento byl by pak charakterisován nepřítomností spilitů a buližníků a jeho basální vrstva — horizont slepencový — značila by pak nejen krátké přerušení sedimentace v době algonkické, ale snad i ukončení sopečné činnosti českého algonkia. Mám ta to, že soustavný výzkum pruhu příbramsko-říčanského a zvl. krajiny rožmitálské a blovické přinese další příspěvky k řešení tohoto problému.

V ohledu tektonickém poskytne krajina naše časem ještě mnoho zajímavého. Zjišťovati dislokace bývá zde, jako vůbec jinde v algonkiu, stíženo jednotvárností algonkických sedimentů, mezi nimiž nelze snadno nalézti význačného horizontu. Proto ložní žíly porfyrové, prostupující v území povltavském vrstvami až na vzdálenost několika kilometrů, jsou vítanými při řešení místních problémů tektonických, neboť mohou dobře zastupovati význačnou vrstvu.

Hlavní vrásnění souvrství algonkického v Povltaví mezi Svatojanskými proudy a ústím Berounky spadající do staršího palaeozoika nebylo právě nejintensivnějším. Vrásy nejsou příkré a jsou dosti značné amplitudy. Drobnější svraštění břidlic jest jen lokálního rázu. K vytvoření přesmyků, jež v ostatních souvrstvích „pánve Barrandeovy" tak hojně pozorujeme, zde nedošlo. Jedině hranice algonkia proti silurským vrstvám jest podmíněna ohromným přesmykem, který probíhá od *Mníšku* přes *Jiloviště* k *Závisti* a *Modřanské rokli* a dle něhož vytrácejí se postupně vrstvy spodního siluru ($Dd_1\beta$, $Dd_1\gamma$ a Dd_2). Je-li tento přesmyk pokračováním příbramské rozsedliny jílové, jak J. KREJČÍ a K. FEISTMANTEL[4]) ve svém „Orografickém a geotektonickém přehledu území silurského" uvádějí, nelze dnes ještě s určitostí dokázati.

K pozdějším fasím vrásnění palaeozoického náleží vytvoření zlomů směru sz.—jv. a s.—j. Zlomy tyto, podobně jako všude v našem palaeozoiku podmiňují rozčlenění krajinné jsouce základem dnešních údolí. V území našem, jak jsem již jednou ukázal a jak ostatně již J. KREJČÍ a K. FEISTMANTEL[5]) uvádějí, jsou naznačeny hlavně úhrnným tokem Vltavy.

II.

Přehled starších údajů o porfyrech povltavských.

Pokud se týče starších údajů, ať literárních, ať v geologických mapách, o porfyrech povltavských, dlužno předem upozorniti, že jsou většinou velmi chatrné a mnohdy i nesprávné. Geologická mapa Povltaví našeho vydaná říšským geologickým ústavem vídeňským, kterou sestavil r. 1859

[4]) Archiv pro přírodovědecký výzkum Čech, V. 5. 1890, Praha.

[5]) R Kettner: O terasách vltavských mezi Svatojanskými proudy a Zbraslaví. Sborník čes. společ. zeměvědné 1913; Krejčí, Feistmantel: Orograf. a geotektonický přehled území silurského etc.

J. KREJČÍ, jest v území azoických břidlic velmi nepřesná. Jest pochopitelno, že v době, kdy J. BARRANDE odkrýval nesmírné bohatství palaeontologické ve vrstvách mladších pásma azoického, věnováno bylo více pozornosti vrstvám zkameněliny chovajícím než jednotvárným souvrstvím azoickým. Celkem znázorňuje geologická mapa mezi *Štěchovicemi* a *Zbraslaví* 5 pruhů porfyrových, z nichž však jest v celku správným pouze nejsevernější. Jsou to pruhy:

1. pruh vedený od *Čihadla* u *Točné* přes rokli mezi *Dolními Břežany* a *Závistí*, *Hradištěm* ke *Strnadu* na l. břehu vltavském a odtud levým břehem vltavským proti *Vranému* k *Jiloviští*;

2. pruh vedený j. od *Skochovic* přes mlýn *Holubov* směrem k jz. (mnou nebyl vůbec zjištěn);

3. pruh přestupující Vltavu j. od *Měchenic*;

4. pruh vedený z lesnatých návrší vých. od *Hvozdnice* k *Davli*, přes ostroh „*Sekanku*" mezi Vltavou a Sázavou k *Olešku* na pravém břehu vltavském;

5. pruh vedený z pravého břehu vltavského záp. od *Hradištka* přes *sv. Kiliána* k *Masečínu*.

Jest zajímavo, s jakého stanoviska pohlížel tehdy J. KREJČÍ na naše vyvřeliny porfyrové, jichž zřejmá konkordance s okolními břidlicemi mu byla nápadnou. Citujeme doslovně onu partii jeho práce z r. 1862: [6]) „Dieser Felsitporphyr bildet . . . einen mächtigen Streifen in den Příbramer Schiefern, der im Streichen derselben (Stunde 3) liegt und genau wie dieselben nach Südost einfällt. An seinen beiden Enden wird dieser Streifen dünner und geht allmälig in die Schiefer über, eben so hat er in seinen Mittelpartien Stellen, wo das Gestein dem Tonschiefer ähnlich wird.

Ein eigentliches Lager bildet dieser Felsitporphyr daher nicht, viel weniger einen Gang, sondern das Vorkommen desselben wird am besten charakterisiert, indem man denselben als eine Zone von Tonschiefer bezeichnet, welche stellenweise mehr, stellenweise weniger in Felsitporphyr übergeht." — Pozorujeme tedy z uvedených řádků zajímavý doklad neptunismu, pod jehož vlivem KREJČÍ stál.

KREJČÍMU ušel při tehdejším mapování mohutný pruh porfyrový budující hřbet „*Děsiny*" mezi *Zahořany* u Mníšku, *Bojovem* a *Sloupem*. Mnohem bedlivěji pozoroval současně v roce 1859 vždy spolehlivý badatel KAREL FEISTMANTEL,[7]) jenž uvádí zcela správně porfyry z okolí Mníšku mezi *Rymání* a *Davlí*, zvl. od *Čisovic* a z kopců u *Bojova*, *Hvozdnice* a *Sloupu*. FEISTMANTEL si představoval tehdy, maje na mysli synklinálu, v níž vrstvy palaeozoické jsou složeny, že porfyry v jižním křídle jejím v okolí Mníšku, Davle atd. odpovídají porfyrům pásma křivoklátsko-

[6]) Bericht über die im Jahre 1859 ausgeführten geologischen Aufnahmen bei Prag und Beraun, Jahrbuch d. k. k. geol. Reichsanstalt, 1862, S. 229.

[7]) Die Porphyre im Silurgebirge von Mittelböhmen; Abhandl. d. kgl. böhm. Gesellschaft d. Wiss., Praha 1859, str. 42.

rokycanského a jiným porfyrům vyskytujícím se v severním křídle synklinály.

V KREJČÍ-HELMHACKEROVĚ [8]) mapě okolí pražského sahající pouze něco málo za *Jiloviště* vyznačen jest porfyrový pruh jdoucí od Břežanského údolí přes *Hradisko* u Závisti, na levý břeh vltavský nad cihelnou *„na Strnadu"* a k *„Víru"* proti Vranému. Směrem k jihu se tento pruh na této mapě velmi silně rozšiřuje, což se s pravdou nesrovnává. Vedle toho kreslí mapa KREJČÍ-HELMHACKEROVA na l. břehu vltavském ještě užší pruh porfyrový parallelní s prvním po jeho sev. straně. Dobře jest vyznačeno v mapě přetržení porfyrů u ústí *Károvského potoka* způsobené zlomem vltavským mezi *Jarovem* a *Chuchlí*. Ve vysvětlivkách k mapě [9]) pokládá se porfyr jako současně vytvořený s břidlami a drobami. Jak jsem již jednou uvedl,[10]) nesrovnávají se v partii u Závisti profily HELMHACKEROVY ani s mapou ani s textem.

V petrologických studiích BOŘICKÉHO [11]) vytčeny jsou v Povltaví jižně od Zbraslavi pruh porfyrový jdoucí Hradištěm u Závisti a směřující k Víru, pak porfyr u Davle. Oba označeny jsou BOŘICKÝM jako felsitické porfyrity slídnaté.

Mapka KREJČÍHO ke spisu J. KREJČÍHO a K. FEISTMANTELA: „Orografický a geotektonický přehled území silurského ve stř. Čechách" jeví oproti mapám říšského ústavu značný pokrok v tom, že vynechává správně neexistující porfyrový pruh u *Skochovic* a zaznamenává porfyrový hřbet mezi *Zahořany*, *Bojovem* a *Hvozdnicí*; nesprávně však dosud nechává pruhy j. od *Davle* a pak, jak jsem již jednou na to poukázal,[12]) lemuje nesprávně porfyrový pruh mezi *Břežanskou roklí* a *Vírem*, jejž prodlužuje příliš k jihu, po obou stranách afanitem. Hlavní zlomy vltavské jsou v mapce KREJČÍHO vyznačeny zcela správně.

V novější době popsány byly porfyry j. od *Záběhlic* na Vltavě po stránce petrografické B. MÁCHOU,[13]) který zde zjistil 7 žil konkordantních s ostatními vrstvami. Vrátíme se k práci MÁCHOVĚ při petrografickém zpracování porfyrů. Zmínky o některých porfyrech krajiny mezi Mníškem a Vltavou nacházíme též v četných pracích BARVÍŘOVÝCH.[14]) BARVÍŘ uvádí poprvé výskyty porfyru na *Zlatém vršku* u *Mníšku*, pak pod *Pleší* u *Nové Vsi* a v *Hoře* u *Čisovic*.

---

[8]) Archiv pro přírodovědecký výzkum Čech, 1879.

[9]) Erläuterungen zur geol. Karte der Umgebungen von Prag, Archiv pro přírod. výzkum Čech, Praha 1879, str. 16.

[10]) R. Kettner: O některých vyvřelinách z povltavského algonkia, str. 3.

[11]) Bořický-Klvaňa: Petrologická studia porfyrových hornin v Čechách, Archiv pro přírodověd. výzkum Čech IV. díl. 1850.

[12]) R. Kettner: O některých vyvřelinách etc., str. 3—4.

[13]) O žilných horninách od Záběhlic a diabasu od Hodkoviček, Věstník král. čes. spol. nauk, Praha 1900.

[14]) Srv. zvl.: Geologische und bergbaugeschichtliche Notizen über die einst goldführende Umgebung von Neu-Knín und Štěchovic in Böhmen, Sitzungsber.

III.

Rozšíření porfyrů v krajině mezi Mníškem a Vltavou.

Rozšíření porfyrů, tak jak mnou bylo na exkursích stanoveno, znázorněno jest na přiložené geologické mapě. Podotýkám, že vzdálené a osamocené pruhy porfyrové mezi *Jiloništěm* a *Točnou* v mapu pojaty již nebyly, protože nejsem dosud hotov s geologickým výzkumem partie křemenců drabovských mezi Jiloništěm a Berounkou, a pak i z důvodů praktických. Ostatně odkazuji na přehlednou geol. mapku v měřítku 1 : 150.000 v mé práci o terasách vltavských ze Sborníku čes. společnosti zeměvědné,[15]) kde pruhy porfyrové mezi Jiloništěm a Točnou jsou schematicky vyznačeny.

Budiž připomenuto předem, že v žádném případu v oboru mé mapy nebyla shledána žíla porfyrová, která by prostupovala vrstvami napříč. Ve všech případech, kde kontakty porfyrů s břidlami a drobami byly odkryty a přístupny pozorování, zjištěna byla velmi dokonalá povaha ložních žil. Mohla by se vyskytnouti domněnka, že snad porfyry, jevící konkordantní uložení s okolními vrstvami, jsou s t a r ý m i p ř í k r o v y, čemuž by mohl nasvědčovati i starý názor KREJČÍHO, že porfyry jsou téhož stáří jako sousední azoické vrstvy. Proti této domněnce svědčí ovšem ta okolnost, že jak v podloží, tak i v nadloží porfyrů jsou sedimenty algonkické proměněny kontaktně v horniny adinolovité. Rovněž hojná přítomnost ostrohranných úlomků břidlic a drob uzavřených v porfyrech nedaleko n a d l o ž n í h o kontaktu zřejmě svědčí pro povahu žilnou.

Než přikročíme k podrobnému popisu výskytů porfyrových, třeba uvésti, že v sousedství porfyrů jsou břidlice zpravidla t e m n ě z b a r v e n é a z k ř e m e n ě l é, takže činí dojem algonkických b u l i ž n í k u. Okolnosti té povšiml si již BARVÍŘ.[16]) Jest nepochybno, že tyto buližníkové horniny jsou v genetickém vztahu k vyvřelinám porfyrovým — v jakém, vysvitne z následujícího popisu, kde budeme si všímati výskytu buližníkových hornin stejně jako výskytů porfyrových.

* * *

Jdeme-li od *Kocáby* pod „*Kolní stráni*“ k sz. údolím potoka *Bojanovického*, nalezneme poněkud nad soutokem s potůčkem od dvorce *Majorky* přitékajícím ložní žílu porfyrovou a v jejím nadloží buližníkové horniny. Směr vrstev jest zde sv.—jz., úklon mírný k jv. Žíla porfyrová se směrem k sv. záhy vykliňuje nedosahujíc již Majorky, k jz. pak lze ji sledovati přes planinu zvanou „*Na Klínku*“ do rokle pod Klínkem a po-

d. kgl. böhm. Ges. d. Wiss. Praha, 1904, str. 9—10 a Úvahy o původu zlata u Jílového, Archiv pro přírod. výzkum Čech, 1901.

[15]) l. c. [5]).

[16]) Geologische und bergbaugeschichtliche Notizen über die einst goldführende Umgebung von Neu-Knín und Štěchovic; S. 9.

sléze až ke Kocábě nad *Fafkovým mlýnem*, kdež asi končí. Jv. strana této žíly jest po celé délce od *Majorky* až ke Kocábě nad *Fafkovým mlýnem* lemována buližníkovými horninami.

Pokračujíce údolím Bojanovického potoka dále na sv. k *Bojanovicům* pozorujeme, že droby a břidlice v podloží uvedené žíly směrem k vesnici opětně nabývají podoby buližníkových hornin, až při ústí potůčku vtékajícího s levé strany do potoka Bojanovického u východního konce *Bojanovic* shledáváme opětně porfyr. Úklon vrstev a nadložní omezující plochy tohoto porfyru je obrácen opětně k jv., pouze v údolí Bojanovického potoka v podloží výše zmíněné žíly porfyrové lze stanoviti nepatrné anomalie (srv. profil č. 7.). Nejbližší okolí *Bojanovic* spočívající na porfyru zakryto jest eluvialními a svahovými hlinami tvořícími se ze zvětralého porfyru.

Sledujíce dále k sz. profil náš, přijdeme v hlubokém úvoze cesty obracející se sz. od *Bojanovic* prudce k jz. do úzkého pruhu zvětralých buližníkových hornin, jež lze směrem k sv. sledovati nepřetržitě až za obec *Hvoznici*, které však v jihozáp. pokračování záhy se v porfyru vyklíní. Sz. od tohoto pruhu buližníkových hornin následuje opětně porfyr tvořící mohutný hřbet „*Děsiny*“ (srv. prof. č. 7.).

Konáme-li souběžný profil s prvním od *Bratřínova* podél nové silnice do *Čisovic*, neshledáme více proužku buližníkových hornin (jež jsme konstatovali prve sz. od Bojanovic) majíce před sebou hned od okraje lesa u Bratřínova až téměř k výchozu silnice z lesa na sz. svahu „*Děsiny*“ proti Čisovicům samý porfyr. Pouze v zákrutech silnice, asi v místech, kde na mapě 1 : 25.000 stojí slovo „Wald“, nalezl jsem v porfyru vložku zvětralých břidlic (srv. prof. č. 8.).

Široký pruh porfyrový hřbetu *Děsiny* můžeme sledovati nepřetržitě od *Zahořan* až ke *Sloupu*. Sz. úpatí tohoto hřbetu, v němž jednak *Mlejnský potok* od *Čisovic* k *Bojovu* tekoucí, jednak i dráha poskytla pěkných odkryvů, jest tvořeno však již z břidlic a drob algonkických, a což zvláště s důrazem zde poznamenávám, zcela n o r m á l n í c h, v b u l i ž n í k o v i t é h o r n i n y n e p ř e m ě n ě n ý c h. Vrstvy zapadají do stráně, tedy k jv. Ze zubovitě vykrajované hranice porfyrů proti sedimentům vychází na jevo, že porfyry tvoří zřetelně k o n k o r d a n t n í n a d l o ž í jejich. Nebýti roklí stékajících k Mlejnskému potoku, byla by hranice téměř přímočará. Proto tím více nás překvapuje, když mapujíce ve stráních vých. od *Bojova* shledáváme najednou, že hranice náhle se nepravidelně počíná ohýbati poněkud k záp. straně, takže nahoře nad Bojovem v lesních partiích zvaných „*v Louce*“ a „*Nad Loukami*“ stále ještě jsme na půdě porfyrové.

Vysvětlení tohoto úkazu nám však poskytují zářezy železniční sev. od zastávky bojovské. Jak uvedeno, jest úklon drob a břidlic na trati mezi *Čisovicemi* a *Bojovem* k jv. (40—50°); avšak již na levém břehu Mlejnského potoka proti bojovské zastávce měříme směr v.—z., úklon mírný (10°)

k severu. V zářezu dráhy pak u *km* 23·3 pozorujeme zřetelný ohyb vrstev ze směru sv. a úklonu k jv. do směru téměř v.—z. a úklonu velmi příkrého (až 80°) k severu. Jsme zde právě v ose antiklinály, ve kterou jsou vrstvy složeny. Zároveň pak můžeme pozorovati, že v nadloží drob (normálních!) se ve svahu nad zářezem u *km* 23·3 souhlasně se sedimenty ohýbá též mohutná žíla porfyrová (srv. prof. 4. a 5.). Její spodní kontakt odkryt jest v zářezu železničním mezi *km* 23·3 a 23·4 (blíž tomuto), horní kontakt pak jest patrný u *km* 23·7. Následkem ohnutí jest porfyr značně rozpukán a jeví známky rozkladu. U *km* 23·6 jeví porfyr zřejmou strukturu brekciovitou s uzavřeninami světlejšího porfyru v temnějším porfyrovém tmelu.

Dále na sever od zmíněného antiklinálního ohybu vrstev a porfyru zjistíme v zářezech železničních mezi *Spáleným mlýnem* a tunelem 6 ložních žil porfyrových zapadajících souhlasně s drobami příkře k s. až ssz. Droby jeví tu krásné deskovité vrstvení a bývají na kontaktu s porfyry přeměněny v horniny adinolovité.

Vraťme se nyní zpět na porfyrový hřbet *Děsiny*. U *Bratřínova* jsme zjistili jediný pruh porfyrový největší šíře; viděli jsme dále u *Bojanovic*, že tento pruh se rozděluje buližníkovitými horninami ve dva pruhy užší. Buližníkovité horniny stávají se směrem ke *Hvozdnici* znatelnějšími a dosahují sev. od *Hvozdnice* již značné mocnosti (srov. prof. 4. a 5.). Jižnější z obou pruhů porfyrových jde od *Bojanovic* k sv. severním svahem *Žižkova vrchu* (cô. 400) do rokle vých. od *Hvozdnice* a jest na jv. straně lemován širokým pruhem černých zkřemenělých břidlic (prof. 4.). V hvozdnické rokli pozorujeme, že dosavadní směr vrstev a porfyrové žíly (sv.—jz.) náhle se mění ve směr s.—j., jakže vrstvy a kontaktní plocha porfyrová zapadají k východu. Porfyr poblíž nadložního kontaktu nabývá vzezření felsitického a jeví četné strukturní plochy vzniklé při ochlazení magmatu, které souhlasně s nadložními vrstvami zapadají k vých. V dolní části hvozdnické rokle zjistil jsem v drobách ještě jednu 1—2 *m* mocnou ložní žílu porfyrovou.

Porfyr, který vychází na den ve stráních levého břehu vltavského nad hřbitovem proti *Mandátu* a jižně od kostela *sv. Kiliána* jakož i vrstvy algonkické v podloží i nadloží k němu se družící jeví uložení odchylné od pruhu porfyrového mezi Bojanovicemi a hvozdnickou roklí zapadajíce příkře do stráně (srv. prof. 3.).* Jest patrno, že okolí hřbitova a kostela *sv. Kiliána*, jakož i *rokle hvozdnické* jest prostoupeno zlomy, které pravděpodobně souvisí s mohutným poruchovým pásmem údolí vltavského mezi *Štěchovicemi* a *Davlí*.

Severnější a širší pruh porfyrový oddělený u *Bojanovic*, který, jak jsme viděli, mezi *Bojovem* a *Spáleným mlýnem* se antiklinálně ohýbá v okolí *Sloupu* najednou se prstovitě rozděluje v řadu, ložních žil menší mocnosti, oddělených od sebe buližníkovitými horninami (srv. mapu a prof. č. 3—1.). Část žil se v polích jv. od

Sloupu vykliňuje a vytrácí, tři však pokračují až k *Davli* (viz obr. 1. v textu) a k cihelně sev. od Davle. V lomech u řeky jsou žíly tyto zřetelně odkryty. Úklon vrstev a ložních žil měřený v úbočích vltavských nad Davlí obnáší 30—40° a jest obrácen na jv. Avšak již v zářezu staré silnice z *Davle* do *Sloupu* (ještě na sz. konci Davle) zjistíme úklon odchylný, totiž 20° k východu. Dále na severu u samoty „*U Jaborka*" pozorujeme pak zřetelně úklon 40—50° na sz., jenž pokračuje nepřetržitě (nepřihlížíme-li k lokálnímu svraštění vrstev na silnici jižně od Měchenic) až k bojovskému potoku.

Z toho jest tedy patrno, že podobně, jako jsme konstatovali v železničním zářezu u *km* 23·3 u *Bojova*, i zde tvoří vrstvy anti-

Obr. 1. **Lom porfyrový v Davli**, v němž zřetelně vystupuje dokonalá konkordance porfyrů (P.) a algonkických břidlic (Bř.). Hl. z svahové hlíny.
(Fotogr. autor.)

klinálu a sice u Vltavy dosti příkrou. Povšimneme-li pak si na geolog. mapě partie u *Sloupu*, poznáváme z anomalií směru a úklonu vrstev u této vesnice, jakož i z omezení porfyrových žil, že tudy právě prochází osa sedlová. Pak si též snadno vyložíme výskyt jednotlivých ložních žil v údolí bojovského potoka u *Spáleného mlýna* jako pokračování prstovitě se rozdělivších žil u *Sloupu* a *Davle* v severním křídle antiklinály (viz profily).

Žíly porfyrové vystupující v odkryvech železničních u *Spáleného mlýna* přestupují bojovský potok na levý břeh, ale jsouce jen málo mocné záhy se vykliňují. Pouze ona žíla mezi *km* 23·3 a 23·7, která zřejmě souvisí

s ústředním tělesem porfyrovým lesního hřbetu *Děsiny* a na níž jsme konstatovali antiklinální ohyb, rozšiřuje se značně na levém břehu bojovského potoka budujíc lesnaté kopce jižně od *Lišnice*. Její severní hranice lemována jest buližníkovými horninami. Ze značné šíře její lze souditi, že úklon její, k severu obrácený, jest mírný.

Vršek s kotou 411 j. od *Lišnice* jest tvořen z buližníkovitých hornin a podrobným mapováním vychází na jevo, že jest to zachovaný zbytek původního nadloží porfyrové žíly (srv. mapu a profil č. 7., tab. II.). Směrem k západu se porfyrová žíla štěpí ve dvě žíly slabší, které pak od koty 400 (sev. od Čisovic) k jz. snadno můžeme v polích sledovati. Kromě uvedených žil zjistíme mapováním v mírně sklonitém svahu na levém břehu Mlejnského potoka mezi *Čisovicemi* a *Bojovem* ještě dvě ložní žíly porfyrové, podle všeho mírně k sz. zapadající.

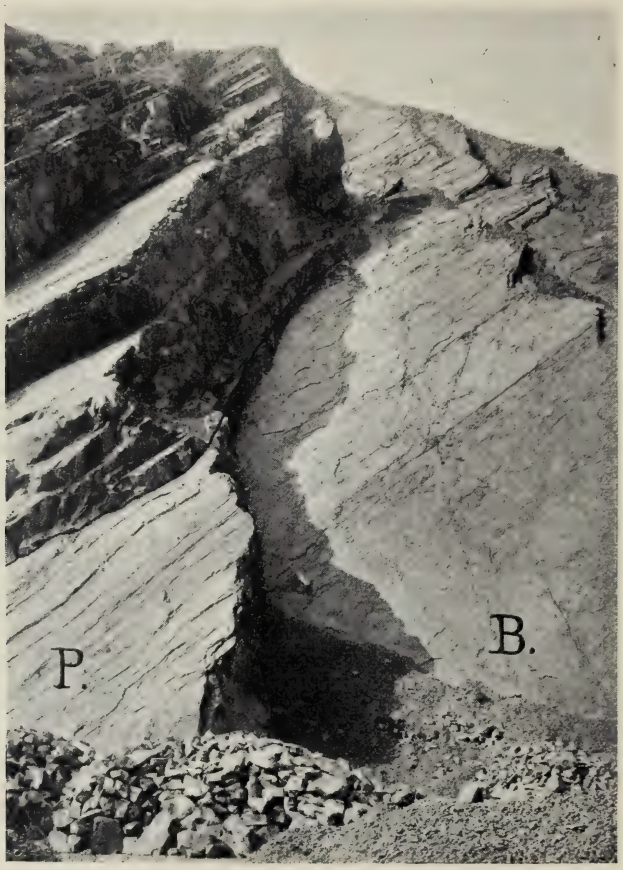
Všecky čtyři žíly porfyrové pokračují pak od *Čisovic*, přestupujíce údolí *Mlejnského potoka*, k jz. k *Rymáni* a *Zahořanům* a v nadloží jejich všude opětně vystupují buližníkové horniny. V zářezech dráhy záp. od *Čisovic* mezi *km* 17·3 a 17·5 zjistil jsem velmi zřetelně odkryté kontaktní plochy ložních žil, jež zapadají pod úhlem 40° k sz.

Ve vesnici *Čisovicích* zastihneme břidlice s úklonem 20° k jv., ale již na západním konci obce obrací se úklon na sz. Jest tedy patrno, že výše sledovaná osa antiklinály pokračuje právě *Čisovicemi*. Zřetelněji ještě vidíme to na silnici z *Čisovic* do *Mníšku* na pravém břehu Mlejnského potoka, právě asi pod severním svahem „*Hory*" (cô 414). Normální droby algonkické tvoří tu mírnou antiklinálu a v nadloží jejich souhlasně ohýbá se též nejjižnější z uvedených čtyř porfyrových žil, táž, která pokračuje vrcholem „*Hory*" do *Zahořan*. Žíla tato sprostředkuje zároveň, jak se zdá, spojení s mohutným porfyrovým tělesem *Děsiny*; vysoko ve stráni na trati u *km* 18·3 zapadá již jen zcela mírně na sz. Porfyrový vršek záp. od čisovického nádraží představuje nám pak přímé pokračování její. Podrobným mapováním vychází na jevo, že porfyr tohoto vršku, jenž na mapě činí dojem spíše malého pně, než žíly (srv. mapu), jest vlastně denudací od žíly Hory oddělená kra spočívající souhlasně na vodorovně uložených drobách, které kol dokola porfyrového vršku na den vycházejí (srv. profil č. 8., tab. II.).

Sledované porfyrové žíly od *Čisovic* se v polích mezi *Rymání* a *Zahořany* vykliňují, pouze nejjižnější přicházející od vrcholu *Hory* nabývá tu značnější šíře a zahýbá se v mapě zároveň do *Zahořan*. Zdá se, že žíla tato souvisí pod *Zahořany* s jižním koncem nejširšího tělesa porfyrového lesního hřbetu *Děsiny*, které též nápadně se zahýbá k *Zahořanům*. Spojení obou porfyrů bohužel však pozorovati nelze, jeť celé nejbližší okolí *Zahořan* zakryto svahovými uloženinami.

Celé jižní okolí *Zahořan* tvořeno jest buližníkovými horninami, které sahají až k *Senešnici* a budují vrchol *Pleše* (cô. 490). Jest nepochybno, že se vyskytují zde v nadloží porfyru v hloubi ukrytého. Porfyr zastihneme

opět na sz. svahu *Pleše* a na sev. od obce *Nové Vsi*. Na počátku nové silnice z Nové Vsi k sanatoriu na Pleši jest odkryt zřetelně kontakt porfyru s nadložními bulžníkovými horninami, na němž opětně můžeme konstatovati dokonalou konkordanci. Směr je zde v.—z., úklon 50° k j. Porfyr sev. od *Nové Vsi* je lemován koldokola bulžníkovými horninami a jest dislokován ve směru téměř s.—j. (srv. mapu a prof. č. 10.).



Obr. 2. **Porfyrová ložní žíla** (P.) **v algonkických drobách** (B.) **proti ústí Károvského potoka.** (Fotogr. autor.)

Mezi *Mníškem, Malou sv. Horou* a *Rymání* jsou vyvinuty normální břidlice a droby algonkické a z úklonů jejich jest patrno, že tvoří zde synklinálu. Sz. křídlo této synklinály jest příkře zdviženo, což zajisté souvisí s blízkým přesmykem algonkia přes vrstvy silurské. Jz. od *Mníšku* nalezneme v sev. křídle synklinály dvě ložní žíly porfyrové. Jedna jde přes *Zlatý vršek* (cô. 452), odkud byl porfyr již BARVÍŘEM [17]) uveden

[17]) Výskyt zlata u Mníšku, Hornické a hutnické listy IV, 1903, str. 59—60. Připomínám, že Barvířova udání úklonů vrstev v okolí Mníšku nesouhlasí s mým pozorováním (srov. mapu).

(jako „čok"), druhá jde hřbetem mezi *Mníškem* a *Malou svatou Horou* (mezi silnicemi dobříšskou a kytínskou) přes kotu 482. Jest zajímavo, že i zde všude vystupují v nadloží žil černomodré zkřemenělé břidlice, kdežto v podloží žil vždy nalezneme normální droby a břidlice (srv. profil č. 10.).

Tím by byly vyčerpány výskyty porfyrové zjištěné mnou mezi *Mníškem* a *Davlí* a než pozorování naše v krajině této shrneme, povšimneme si porfyrů mezi *Jiloništěm* a *Čihadlem* u *Točné*, které též, jak již uvedeno, vyznačují se povahou ložních žil. Po celé délce mezi Čihadlem a Jiloništěm možno sledovati dvě žíly, z nichž jižnější jest mocnější. Obě žíly nedosahují již samého *Jiloniště*, nýbrž vykliňují se v polích vých. od vesnice. V lomech u řeky *„na Víru"* proti Vranému, pak sev. od cihelny na *Strnadu* jsou porfyry velmi pěkně odkryty, takže můžeme měřiti na kontaktních plochách jejich směr sv.—jz., úklon průměrně 40° k jv. Na pravém břehu vltavském vystupuje jižnější z obou uvedených žil u ústí *Károvského potoka*, tedy značně severněji než na levém břehu. Jsou zde pruhy porfyrové porušeny vltavským zlomem směru s.—j., dle něhož vrstvy pravého břehu vltavského poklesly a snad též k severu byly posunuty. Dále vystupují obě žíly na *Hradišti* u Závisti, v údolí *březanského potoka* pod Nickerlovou deskou a na silnici ze *Závisti* do *Točné*. Vedle těchto dvou nejmocnějších žil vyskytují se v pruhu mezi Jiloništěm a Točnou porfyrové žíly méně mocné, jež lze jen na nepatrnou délku sledovati. Tak na př. proti ústí *Károvského potoka* otevřena jest v lomu asi 2 *m* mocná ložní žíla směrem po stráni vzhůru se vykliňující (viz obr. 2. v textu); místy jest porfyr žíly této vyvinut brekciovitě. Jinou žílu uvedl jsem v profilu jižně od výskytu spilitového na *Závisti*, jiné konečně vystupují u *Záběhlic* poblíž hlavního přesmyku algonkia přes silur. B. MÁCHA [18]) uvádí v údolí vltavském na l. břehu mezi *Strnadem* a *Záběhlicemi* 7 žil.

Také v nadloží těchto porfyrů vystupují přeměněné buližníkům podobné břidlice. Zvl. pěkně můžeme je pozorovati nad cihelnou na *Strnadu* a v zářezech silnice do *Točné* a na *Čihadle* (383) (srv. profil č. 2. v mé práci ve Verhandl. d. k. k. geol. R. A., l. c.[2])).

IV.

Souhrn části popisné (III.); způsob intruse a stáří porfyrů; buližníkovité horniny.

Podle předchozí části popisné máme v Povltaví mezi Svatojanskými proudy a ústím Berounky dvě oblasti rozšíření ložních žil porfyrových: oblast mezi Mníškem a Davlí a oblast mezi Jiloništěm a Čihadlem u Točné.

[18]) l. c. [13]).

V oblasti první pozorovali jsme jeden mohutný pruh profyrový (vlastně jednu mohutnou ložní žílu) budující hřbet *Děsiny* a celou řadu ložních žil menší mocnosti. Porfyrové ložní žíly od spojnice *Zahořany-Davle* na j. zapadají většinou k jv., porfyry severně od ní zapadají na s. až sz. Způsob prstovitého rozštěpení hlavního pruhu Děsiny v řadu menších ložních žil, jak jsme to mapováním u *Sloupu* s naprostou jistotou dokázali, antiklinální ohyb porfyrové žíly pozorovaný v zářeze železničním u *km* 23·3, spojení žíly této s hlavním pruhem Děsiny a vůbec veškeré poměry tektonické dovolují nám předpokládati, že i všecky ostatní ložní žíly porfyrové, dnes zdánlivě samostatné, před denudací souvisely s hlavní ložní žilou Děsiny vycházejíce z ní podobným způsobem, jako žíly u *Sloupu*. Podle toho pak nám představují veškeré porfyry mezi Zahořany a Davlí **jedno společné těleso eruptivní.** Nejmocnější ložní žíla budující hřbet Děsiny jest jeho ústřední částí, částí sytnou, dodávající potřebný materiál eruptivní k vytvoření žil vedlejších, méně mocných. Naopak můžeme označiti tyto méně mocné ložní žíly jako apofýsy hlavní ložní žíly hřbetu Děsiny.

Pokud se týče porfyru ze sev. svahu *Pleše* a od *Nové Vsi* a vzdálených ložních žil velmi malé mocnosti jz. od *Mníšku*, mám za to, že i tyto výskyty porfyrové jsou vázány na eruptivní těleso mezi *Zahořany* a *Davlí*. Severovýchodní omezení porfyrového tělesa sev. od Nové Vsi a Pleše dáno jest zlomem probíhajícím od *Senešnice* k *Mníšku*; podle zlomu toho buď hlavní těleso porfyrové mezi *Zahořany* a *Davlí* pokleslo, nebo území mezi *Mníškem* a *Novou Vsí* bylo vyzdviženo.

Poměry zcela analogické panují v oblasti mezi *Jiloništěm* a *Točnou*. Dvě žíly největší mocnosti, které jsme sledovali od *Jiloniště* až na *Čihadlo*, zdají se býti ústředím, na něž jsou vázány veškeré ostatní drobné ložní žíly. Na základě pozorování tektonických soudím, že porfyry této druhé oblasti povltavské, třeba že jsou geologickým útvarem stejné jakosti a snad i stejnodobým, přímo s porfyrovým tělesem Děsiny nesouvisí. Zdá se však, že porfyry obou oblastí intrudují do přibližně stejného niveau. Uvedli jsme výše v této práci výskyt slepenců mezi oběma žilami vystupujícími na silnici do *Točné*; rovněž BARVÍŘ[19]) zmiňuje se o slepencích na jižním okraji porfyru u *Davle* (srv. str. 3.).

Jest nyní otázka, jak máme tělesa porfyrová, jež jsme v Povltaví zjistili, klassifikovati po stránce geologické a jak si máme představiti způsob intruse.

Podle theorie o intrusivních tělesech eruptivních mohou tyto vnikati do souvrství dvojím způsobem. Buď prorážejí vrstvami napříč tvoříce tak pravé žíly, pně, batholithy a j., nebo vnikají po

[19]) l. c. [16]), str. 10.

plochách mezivrstevních jako klín, čímž vznikají ložní žíly a lakkolithy. Již G. K. GILBERT,[20]) jenž první vymezil pojem lakkolithu, uvádí, že mezi oběma útvary: ložní žilou a lakkolithem vlastně existují jen rozdíly graduelní a že lze mezi oběma zjistiti nejrůznější přechody. Ložní žíla zachovává zpravidla ve všech svých částech přibližně touž mocnost, naopak u lakkolithu ubývá mocnosti od centra směrem ku krajům velmi rychle, takže lakkolith má spíše podobu tělesa čočkovitého než deskovitého. Jako podstatný znak lakkolithu bývá uváděno zpravidla klenbovité vyzdvižení nadložních vrstev.

Pohledneme-li nyní na příčné profily vedené tělesem porfyrovým mezi *Davlí* a *Zahořany*, shledáváme, že nad ústřední částí jeho nejsou vrstvy klenbovitě vyzdviženy ani jinak deformovány. Zároveň jest patrno, že plošné rozměry tělesa (t. j. ve směru po vrstvách) značně převládají nad rozměry příčnými (mocností). Úhrnná mocnost části ústřední (Děsiny), obnášející něco přes 500 *m*, jest příliš nepatrná proti značné ploše, již těleso v souvrství algonkickém zaujímá, než abychom směli těleso označiti jako lakkolith. Naopak však rozštěpení ústřední části tělesa v řadu ložních žil spíše jest znakem lakkolithu než obyčejné ložní žíly. Profily naše velmi připomínají známý obraz t. zv. lakkolithu typu cedrového zjištěného v pohoří *La Plata* v Koloradu [21]); i u tohoto tělesa eruptivního vycházejí na všecky strany po prostorách mezivrstevních četné apofýsy ve formě ložních žil.

Z úvahy této jde na jevo, že porfyrové těleso mezi *Zahořany* a *Davlí* nejlépe lze geologicky označiti jakožto přechodní tvar mezi ložní žilou a lakkolithem t. zv. cedrového typu (Zederbaumtypus).

K vytvoření eruptivního tělesa takové podoby, aby všude zachovávalo dokonalou konkordanci k okolním vrstvám, jest třeba zvláštních podmínek. Předně musí vrstvy, do kterých má magma vniknouti ve formě ložní žíly nebo lakkolithu, býti prosty příčných puklin, tak aby plochy mezivrstevní byly plochami nejmenšího odporu. Aby této podmínce bylo vyhověno, jedná se zpravidla u intrusí podoby ložních žil neb lakkolithu o vrstvy, které nebyly dosud vrásněním postiženy a tudíž jsou uloženy zcela vodorovně. Druhá podmínka vzniku ložních žil jest snadná pohyblivost intrudujícího magmatu.

Tím dostáváme se zároveň k otázce o stáří povltavských ložních žil porfyrových.

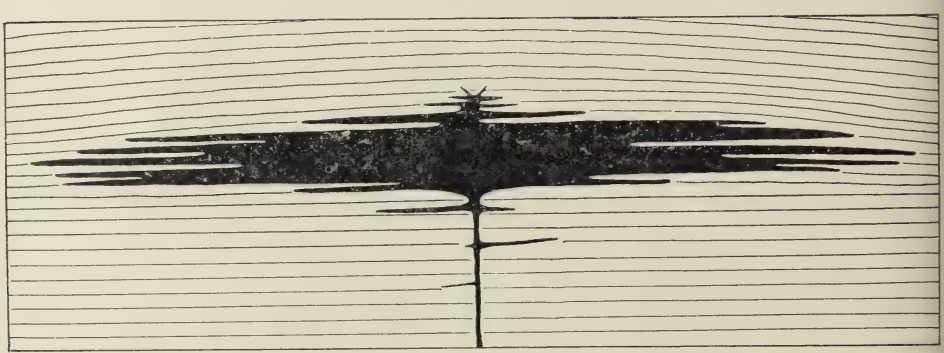
I v našem případě jest nutno předpokládati, že porfyry vnikly do souvrství algonkického ještě před hlavním zvrásněním va-

[20]) Report on the Geology of the Henry Mountains, Washington 1877; při následujících úvahách užito bylo zvl. výborného spisu F. v. Wolffova: Der Vulkanismus I. Bd., Algemeiner Teil, str. 214—236 Stuttgart 1913.

[21]) Whitman Cross: The Laccolithic Mountain Groups of Colorado, Utah and Arizona, 14 Ann. Rep. U. S. Geol. Survey II. 1894, S. 157—241.

risským. Jest nemyslitelno při mnohonásobném rozpukání algonkických vrstev, jež všude v Povltaví, a zvláště v poříčí Kocáby tak výrazně vyniká, aby magma porfyrů do vrstev intrudující raději si volilo mezery mezivrstevní než příčné diaklasy[22]) menší odpor mu stavící. Diaklasy tyto musí býti tudíž mladší než intruse porfyrů, což ostatně možno přímým pozorováním v přírodě dokázati. Ložní žíly porfyrové jsou namnoze prostoupeny příčnými puklinami v témž směru, jako okolní vrstvy (zvl. dobře jest to patrno v údolí potoka tekoucího od Bojanovic do Kocáby). Druhý důkaz o větším stáří porfyrů jest zřetelné zvrásnění porfyrového lakkolithového tělesa, na něž jsme v části III. této práce vícekrát upozornili.

Podle předchozích vývodů představuji si intrusi porfyrů způsobem, jak jest na schematickém obrazci č. 3. znázorněno. Přívodný kanál arci není v přírodě nikde učiněn přístupným pozorování, jest však nutno ho



Obr. 3. Ideální průřez porfyrovým lakkolithovým tělesem před jeho zvrásněním.

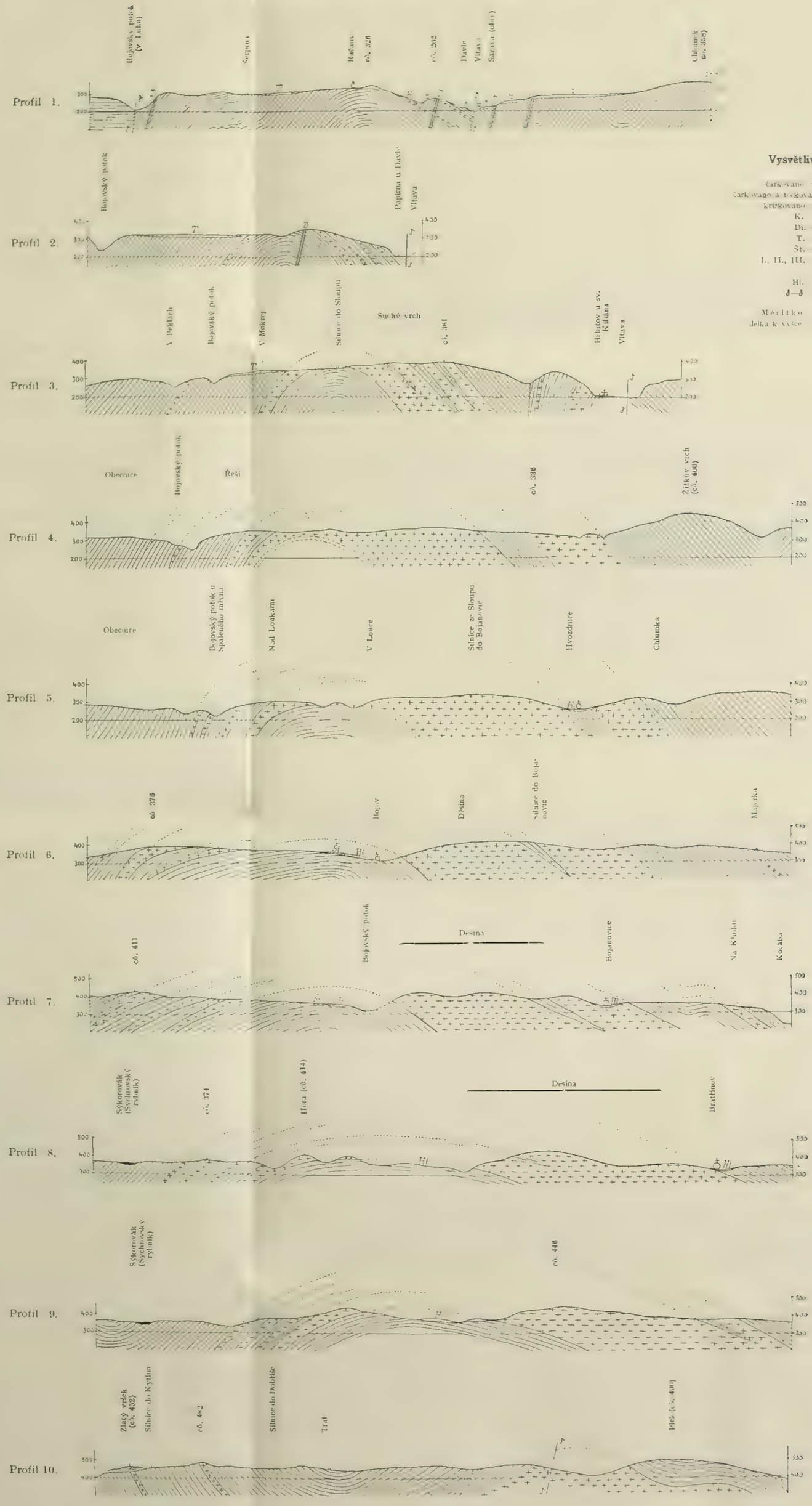
z theoretických důvodů předpokládati. Jak bylo lakkolithové těleso porfyrové při zvrásnění deformováno, vysvítá zřetelně z profilů 1—10 na tab. II., ostatně podrobnosti o tom budou ještě ke konci této práce vyloženy.

Vedle porfyrů jest algonkické souvrství mezi Mníškem a Davlí prostoupeno místy žilami d i a b a s o v ý m i. Diabasy tyto prorážejí vrstvami napříč, zpravidla téměř svisle a volí si obyčejně diaklasy směru ssv.—jjz. Největší počet diabasových žil v sousedství porfyrů najdeme v okolí *Davle* a právě zde na porfyrovém vršku (cô. 262) nad *Davlí* podařilo se mi dokázati, že diabas porfyrem prostupuje (srv. profil č. 1. a mapu).

Jsou tedy l o ž n í ž í l y p o r f y r o v é v krajině mezi *Svatojanskými proudy* a *Zbraslaví* vedle spilitu závistského, jenž jest stáří algonkického, n e j s t a r š í m i e r u p t i v n í m i h o r n i n a m i. Podle

[22]) Prv. R. K e t t n e r: O příčné břidličnatosti v oboru vrstev praekambrických mezi Štěchovicemi a Novým Knínem. Sborník klubu přírodovědeckého v Praze r. 1911.

A.



Vysvětlivky k profilům:

čárkováno	algonkické břidlice a droby
čárkováno a tečkováno	buližníkovité horniny,
křížkováno	porfyry
K.	algonkické slepence
Di.	diabasy
T.	třetihorní štěrky u Sloupu
Št.	diluv. štěrky
I., II., III.	svrchní, střední a spodní terasa vltavská
Hl.	hlíny
δ—δ	zlomy
Měřítko	1 : 25 000
délka k výšce	4 : 5

prací J. L. BARVÍŘOVÝCH jsou veškeré žilné vyvřeliny povltavské a tudíž i naše ložní žíly porfyrové (BARVÍŘ cituje na př. MÁCHOU popsané porfyry od *Záběhlic*) vázány na společný magmatický bassin středočeské žuly, z něhož část žil odštěpila se před, část až po vystoupení středočeské žuly. Vystoupení hlavního magmatu žuly lze klásti podle BARVÍŘE [23]) do doby největších převratů tektonických v oboru komplexu etáží Barrande-ových, tedy pravděpodobně do pozdější doby devonské.

Vrásnění palaeozoické (varisské) započalo v Čechách velmi záhy, pravděpodobně již počátkem svrchního devonu (svrchní devon v Čechách schází) a lze rozeznati u něho několik fasí. Již J. KREJČÍ a K. FEISTMANTEL [24]) rozlišovali tři systémy v různých dobách vzniklých rozsedlin a zlomů v českém palaeozoiku a novější dobou zvl. podrobným výzkumem K. HINTERLECHNEROVÝM[25]) v Českomoravské vysočině ještě více fasí vrásnění palaeozoického bylo seznáno. K jedné z těchto fasí náleží též vystoupení žulových massivů. Jednotlivé fase vrásnění palaeozoického v Českomoravské vysočině zdají se býti analogickými oněm, jež lze zjistiti ve středočeském palaeozoiku nepřeměněném a proto soudím, že výsledků HINTERLECHNEROVÝCH lze dobře i použíti pro území naše. Protože přesnější známost stáří středočeské žuly a zvláště poměru jejího k celé stavbě okolních území má nemalou důležitost při řešení nejednoho geol. problému, zvl. v Povltaví, vyžádal jsem si od pana Dra K. HINTERLECHNERA mínění jeho o stáří žulových massivů středočeského a Českomoravské vysočiny a poměru jejich ke stavbě Českomoravské vysočiny. Laskavostí jeho dostalo se mi asi tohoto vysvětlení:

Mezi žulovými massivy středočeským a Českomoravské vysočiny není vlastně podstatných rozdílů. Granity Českomoravské vysočiny postiženy jsou poruchovými pásmy (Quetschzonen) a zlomy, které stojí přibližně kolmo na tangentách vedených k vrstevním obloukům a sigmoidám, jež HINTERLECHNER [25]) dokázal. Jsou tudíž starší než tyto zlomy. Všecky tyto zlomy jsou mladší než oblouky. Naopak však musí býti granity mladší než vznik oblouků a sigmoid; kdyby byly starší, musily by nésti stopy horotvorného tlaku. To však dosud dokázáno nebylo. Pravděpodobně vznikem horizontalních vrás (oblouků a sigmoid) bylo vystoupení žulových massivů uspíšeno (ne však přímo způsobeno).

Z uvedeného obsahu dopisu p. Dra HINTERLECHNERA a vůbec na základě jeho prací soudím, že vystoupení žulových massivů jest vlastně zakončením nejmohutnějších fenomenů tlakových (vlastního vrásnění);

[23]) Úvahy o původu zlata u Jílového, Archiv pro přírod. výzkum Čech, 1901, str. 57 a 98.

[24]) Orografický a geotektonický přehled etc.

[25]) Geologische Mitteilungen über ostböhmische Graphite und ihre stratigraphische Bedeutung für einen Teil des kristallinen Territoriums der böhmischen Masse; Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanstalt, 1911, S. 365—380.

zlomy příčné jsou pak zjevy, které vrásnění bezprostředně následovaly a vyrovnávaly nestejná napjetí v nově vzniklém útvaru tektonickém dosud panující.

Pokud mi jest známo z mého pracovního území, panují v Povltaví u Svatojanských proudů poměry zcela podobné. Kdežto ještě pásmo jílovské, t. j. komplex vyvřelin, jenž podle BARVÍŘE[26]) odštěpil se z původního magmatického bassinu z největší části nedlouho před vystoupením žuly, nese zřetelné stopy mohutného tlaku horotvorného jsouc namnoze zbřidličnatěno ve směru ssv.—jjz., neshledal jsem dosud známek tlakových na žule.

Vraťme se nyní k ložním žilám porfyrovým. Porfyry ty prodělaly veškeré fase vrásnění varisského: byly zvrásněny, byly prostoupeny diaklasami směru ssv.—jjz. (odpovídajícími tlaku, jímž jest zbřidličnatěno „pásmo jílovské") a posléze dislokovány. Do které epochy spadá tudíž jejich intruse? Možnosti jsou dvě. Buď se tu jedná o eruptivní tělesa samostatná, na bassin středočeské žuly nepoutaná, a pak jsou to vyvřeliny velmi staré, jichž intrusi lze v té nesmírně dlouhé periodě od usazení vrstev algonkických až do jich zvrásnění zajisté velmi těžko vymeziti. Druhá možnost — a k té bych se nejspíše klonil — jest, že porfyry povltavské jsou, jak BARVÍŘ soudí, vázány na společný magmatický bassin středočeské žuly. V tom případě nutno položiti intrusi porfyrů do konce středního devonu, na nejvýše na počátek svrchního devonu. Pak by byly ložní žíly porfyrové v Povltaví snad současnými útvary s některými ložními žilami diabasovými v pásmu Ee_1 českého siluru. Několikeré erupce rozličných žilných vyvřelin, které v různých dobách před vystoupením žuly středočeské, i po ní v okolí *Jílového, Nového Knína* a j. se odehrávaly, jsou svědectvím nesmírně dlouhého trvání činnosti magmatického bassinu středočeské žuly. Z toho důvodu lze pohlížeti na povltavské ložní žíly porfyrové jako na předvoj rojů vyvřelin, které v době největších tektonických poruch vystupovaly a zároveň snad jako na počátek nebo úvod celého ohromného a dlouho trvajícího horotvorného a erupčního processu palaeozoického.

* * *

V části této třeba vzpomenouti ještě černých, buližníkům podobných zkřemenělých břidlic v sousedství porfyrů se vyskytujících, jež jsme v části popisné všude uváděli, a vysvětliti jejich vznik i poměr k porfyrům.

Výskyt jejich jest všude nápadně omezen pouze na nadloží porfyrových žil, z mapy pak jest patrno, že mocnost jejich jest odvislá od mocnosti žil. Výslovně podotýkám, že v podloží žil

[26]) O výskytu zlata na některých důležitějších naleziskách českých se stanoviska petrograficko-geologického, Věstník král. čes. spol. náuk, 1896, str. 22.

všude vyskytují se droby a břidlice algonkické v buližníkovité horniny nepřeměněné. Dokladů pro to bylo uvedeno v části popisné s dostatek. Objevují-li se buližníkovité horniny též v podloží nějaké žíly, pak nejsou vázány na tuto, nýbrž tvoří nadloží žíly jiné. Odchylek od tohoto konstatovaného fakta jsem nikde neshledal a výskyt buližníkových hornin, na čerstvě zoraných polích vždy zřetelně patrných, byl mi vždy dobrým vodítkem při mapování porfyrů.

O obyčejnou kontaktní přeměnu vrstev se tu nejedná. Produkty kontaktní přeměny jsou horniny adinolovité, šedé barvy a rohovcovitého vzhledu, které všude, jak na místech, kde jsou kontakty porfyrových žil přístupny, bylo lze dokázati, v úzkých proužcích lemují nadloží i podloží porfyrů. Buližníkové horniny však, jak jsme viděli, omezují se výhradně na nadloží a tvoří mnohdy pruhy velmi mocné.

Soudím tudíž na základě učiněných pozorování a z kyselé povahy porfyrů, že zkřemenělé černé břidlice v nadloží porfyrových žil jsou produkty jakési přeměny pneumatolytické. V době tuhnutí do prostor mezivrstevních vniklého magmatu vycházely z tohoto do nadloží horké roztoky přinášející kyselinu křemičitou, jíž sedimenty byly impraegnovány.

V.

Podrobnosti tektonické a morfologické odvozené z učiněných pozorování.

Zvrásněné lakkolithové těleso porfyrové mezi *Zahořany* a *Davlí* jeví se na geologické mapě jako ellipsa. Vrstvy v nadloží jeho nezachovávají koldokola pravidelný směr sv.—jz., nýbrž ukazují zřetelné odchylky. Obvyklý směr sv.—jz. zachován jest na sz. od tělesa pouze mezi *Rymání* a *Lišnicí* (s úklonem k sz.), na jv. od tělesa pak mezi *Bratřínovem* a *Hvozdnicí* (s převládajícím úklonem k jv.). Na sev. od *Bojova* však jsme pozorovali směr vsv.—zjz. až čistě v.—z., úklon příkrý (až 80°) k severu; též u *Zahořan* zdá se, že směr vrstevní se točí. V *Davli*, na staré silnici do *Sloupu* byl zjištěn směr s.—j., úklon 20° k východu.

Podle měření těchto nečiní tudíž lakkolithové těleso mezi Zahořany a Davlí obyčejnou antiklinálu, nýbrž spíše klenbu ve směru sv.—jz. ellipticky protaženou.[27]) Výklad takového tektonického útvaru jest velmi jednoduchý. Porovnáváme-li mezi sebou jednotlivé příčné profily vedené porfyrovým tělesem, vidíme, že antiklinála, jíž nám profily představují, není všude stejně příkrá. Kde jest profil veden napříč ústřední žilou *Děsiny*, jest antiklinála mírnější, naopak v místech, kde hlavní žíla se rozštěpuje v řadu žil menší mocnosti, jest antiklinála příkřejší. Nej-

[27]) Útvar takový bývá označován zpravidla jako „brachyantiklinála"; srv. O. Wilckens: Grundzüge der tektonischen Geologie, Jena 1912, str. 24.

příkřejší antiklinální ohyb vrstev lze pozorovati konečně na levém břehu vltavském mezi *Davlí* a *Měchenicemi*. Jest tedy klenba (brachyantiklinála) mezi *Zahořany* a *Davlí* útvarem podmíněným nestejnou vrásnitelností hornin. Ústřední 500 *m* mocná ložní žíla porfyrová stavěla vrásnícímu tlaku značný odpor — tudíž se vrásnění na ní zaráželo, méně mocné ložní žíly byly podajnějšími a byly proto zvrásněny intensivněji.

Konstatováním klenbové stavby krajiny mezi Zahořany a Davlí jest podán klíč k vysvětlení značně odchylných poměrů úložných vrstev na pravém břehu vltavském u *Březové, Oleška,* ústí *Zahořanského potoka* a *Sázavy,* a zároveň i k objasnění povahy zlomu vltavského mezi *Davlí* a *Měchenicemi*. Kdežto na levém břehu vltavském sev. od *Sloupu* a *Davle* převládá směr vsv.—zjz. a úklon k s., jižně od *Davle* pak směr čistě sv.—jz., úklon k jv., jest směr vrstev na pravém břehu vltavském u *Sázavy* ssv.—jjz., u ústí *Zahořanského potoka* skoro s.—j., a u *Oleška* a *Březové* dokonce ssz.—jjv. ba i sz.—jv. Úklony obráceny jsou většinou na východní stranu. Teprve směrem k *Okrouhlu* a *Libři* anomalie se vyrovnávají a dostavuje se opětně pravidelný směr ssv.—jjz. až sv.—jz. Z uvedených měření vrstev na pravém břehu jest vidno, že směr vrstevní se tu točí. Po mém soudu jedná se tu o pokračování klenby (brachyantiklinály) konstatované na levém břehu. Příkřejší přechod vrstev na levém břehu vltavském ze směru sv.—jz. a úklonu k jv. ve směr vsv.—zjz. a úklon k ssz., než přechod vrstev pravého břehu ze směru ssv.—jjz. do směru sz.—jv. lze vyložiti tím, přijímáme-li, že vrstvy levého břehu jsou spodnější (t. j. vnitřnější) částí klenby (brachyantiklinály) než vrstvy pravého břehu, čili že vrstvy levého břehu jsou starší než vrstvy pravého břehu. Jinými slovy vznikl zlom vltavský mezi *Davlí* a *Měchenicemi* poklesem vrstev pravého břehu.

Dalo by se očekávati, že během vývoje elliptické klenby (brachyantiklinály), ve kterou lakkolithové těleso porfyrové i obalující je vrstvy algonkické byly zvrásněny, vznikly příčné zlomy. Takových jsem však v území mezi *Zahořany* a *Davlí*, přes to, že jsem po nich bedlivě pátral, neshledal nikde. Veškeré zlomy, jež se mi podařilo konstatovati, jsou vůči elliptické klenbě porfyrové spíše zlomy tangentiálními, periferickými. Jest to na př. zlom probíhající od *Mníšku* k *Senešnici*, dále zlom sv.—jz. směru u ústí bojovského potoka a zvl. zlomy vltavské. Horizontalního posunu vrstevního mezi *Mníškem* a *Čisovicemi* podél údolí Mlejnského potoka, jak ho BARVÍŘ[28]) uvádí, jsem zjistiti nemohl.

Údolí *Mlejnského* (*Bojovského*) *potoka*, přes to, že jednotlivé části jeho při pohledu na topografickou mapu zdály by se tomu nasvědčovati, nemohu zváti údolím tektonickým. Jedině jeho nejdolejší část mezi mlýnem „*v Luhu*" a ústím do Vltavy sleduje zlom směru sv.—jz., zřejmý

[28]) Výskyt zlata u Mníšku, Hornické a hutnické listy IV, 1903.

z nestejného uložení vrstev po obou březích. Na l. břehu zapadají vrstvy mírně k sv., na pravém příkře k ssz. Příčný průlom Bojovského potoka porfyrovými žilami mezi bojovskou zastávkou a *Spáleným mlýnem* zdá se býti podmíněn epigenesí, pro niž máme důvody v nedalekých uloženinách miocenních u *Sloupu* a *Klince*.[29]) Uloženiny tyto musily před zaříznutím dnešních údolí býti v krajině naší daleko rozšířenějšími než dnes, jak svědčí porůznu roztroušené valounky křemenné v okolí *Lišnice* a j. Též vých. od *Bojova* v lesích pod *Babkou* (cô. 397) nalezl jsem ve vývratu lesním křemenný štěrk totožný s nánosy klineckými.

Třeba vzpomenouti ještě jedné okolnosti, která by snad mohla býti uvedena jako námitka proti našemu pojímání porfyrů jako jednoho lakkolithového tělesa. Jest nápadno při pohledu na geologickou mapu, že rozštěpení ústřední ložní žíly Děsiny děje se pouze jednostranně, totiž k sz. Na základě pozorování mých v údolí *Kocáby*, vykonaných před početím soustavného výzkumu ložních žil porfyrových, domníval jsem se, že souvrství algonkické mezi žulou slapskou a pásmem jílovským a porfyrovým pruhem Děsiny tvoří jednoduchou synklinálu. Dalo se tudíž očekávati, že bude nalezeno pokračování ložních žil porfyrových též v kopcovité krajině mezi Kocábou a slapskou žulou a pásmem jílovským. Přes to, že území toto jest mi do největších podrobností známo, nikde neshledal jsem tu porfyrů.

Nechceme-li tudíž předpokládati u našeho lakkolithového tělesa hned od počátku podobu assymmetrickou (tedy útvar podobný „hemilakkolithu" STARKOVU[30])), nutno dedukovati z uvedených fakt veliký zlom, či snad soustavu zlomů údolím Kocáby probíhajících, podle nichž udál se pokles kry algonkických sedimentů mezi Kocábou a žulou i jílovským pásmem. Tomu zdál by se nasvědčovati celkový průběh údolí Kocáby a i celá řada jiných důvodů, z nichž některé uvádím: Na některých místech nepřestupují diabasové žíly v údolí Kocáby z jednoho břehu na druhý[31]); pásmo roubíkových břidlic mezi *Velkou Lečicí* a *Malou Lečicí*; lokální svraštění vrstev (zvl. pod *Malou Lečicí*) a nestejné úklony vrstev na obou březích pozorované na mnoha místech; konstatovaná porucha vrstevní ve srázu mezi *Kolní stráni* a *Fafkovým mlýnem*[31]), výchoz poruchového pásma ve srázu levého břehu vltavského sev. od *Štěchovic* (poblíž přístaviště parníků). Možná, že i mnohonásobná příčná břidličnatost v údolí Kocáby tak nápadně vystupující souvisí s předpokládanými vrstevními poruchami.

Podrobné vyšetření průběhu i povahy celého poruchového pásma podél Kocáby odvozeného z prozkumu ložních žil porfyrových bude dalším

---

[29]) Radim Kettner: O uloženinách třetihorních štěrků a jílů u Sloupu a Klince ve stř. Čechách, Věstník král. čes. spol. nauk, Praha 1911.

[30]) Michael Stark: Formen und Genese lakkolithischer Intrusionen, Festschrift d. naturwiss. Vereins a. d. Univ. Wien 1907.

[31]) Srv. R. Kettner: O příčné břidličnatosti etc. l. c.[22]).

tektonickým problémem zajímavého a geologicky dosti složitého okolí Štěchovic a Svatojanských proudů.

* * *

Ke konci této geologické části práce o ložních žilách porfyrových v povltavském algonkiu jižně od Zbraslavi budiž mi dovoleno vzdáti vřelé díky slavné správní komisi Barrandeova fondu při Museu král. Českého za udělenou podporu, zvláště pak panu profesoru CYRILLU RYTÍŘI PURKYNI, jenž vždy se zájmem práci mou sledoval a všemožně radou i poskytnutím ústavních pomůcek mne podporoval. Nemenším díkem zavázán jsem za přečetné pokyny i panu profesoru Dru FRANT. SLAVÍKOVI.

Hlavní výsledky práce.

1. V povltavském algonkiu mezi Svatojanskými proudy a ústím Berounky lze rozeznati dva typy porfyrových vyvřelin s geologického stanoviska naprosto odlišné: první prorážejí vrstvami napříč a tvoří útvary podobné pňům neb pravým žilám (kozohorský porfyr u Nového Knína, porfyry pásma jílovského), druhé vyskytují se vždy v podobě dokonalých ložních žil.

2. Ložní žíly porfyrové omezují se tu na dvě oblasti: na krajinu mezi Mníškem a Davlí a na pruh mezi Jilovištěm a Čihadlem u Točné.

3. V oblasti mezi Mníškem a Davlí bylo určitě dokázáno, že ložní žíly porfyrové mezi sebou souvisí a tvoří vlastně jedno jediné společné těleso eruptivní. Nejmocnější ložní žíla budující hřbet Děsiny jest jeho částí centrální, z níž ostatní méně mocné ložní žíly vycházejí prstovitě jako apofýsy.

4. Konstatováním tohoto fakta zdá se, že i ložní žíly porfyrové v oblasti mezi Jilovištěm a Točnou podobným způsobem mezi sebou souvisí.

5. Tato eruptivní tělesa porfyrová lze označiti s geologického stanoviska jako přechodní tvar mezi ložní žilou a lakkolithem typu cedrového.

6. Z nálezu slepencových vrstev v těsném sousedství porfyrů obou oblastí zdá se, že obě lakkolithová tělesa porfyrová intrudují do přibližně stejného niveau, totiž v niveau slepencového horizontu.

7. Obě lakkolithová tělesa porfyrová byla zvrásněna a dislokována, dlužno tudíž položiti intrusi jejich do doby, kdy vrstvy algonkické byly dosud vodorovně uloženy, tedy na nejvýše do počátku svrchního devonu.

8. Jest pravděpodobno, že ložní žíly porfyrové jsou již vázány na společný magmatický krb středočeské žuly. V tom případě nutno pohlížeti na tyto porfyrové ložní žíly jako na předvoj rojů vyvřelin z krbu toho odštěpených a jest pak intruse magmatu porfyrového ve formě ložních

žil úvodem k ohromnému a dlouho trvajícímu horotvornému a eruptivnímu processu palaeozoickému.

9. Černé, zkřemenělé, buližníkům podobné břidlice vyskytující se vždy v nadloží porfyrových ložních žil nejsou produkty obyčejné kontaktní metamorfosy, nýbrž vznikly působením horkých roztoků obsahujících kyselinu křemičitou, které v době tuhnutí vniklého porfyrového magmatu do nadloží porfyrů vycházely.

10. Lakkolithové těleso porfyrové oblasti mezi Mníškem a Davlí bylo následkem nestejné vrásnitelnosti hornin zvrásněno v klenbu ve směru sv.—jz. ellipticky protaženou, čili ve tak zv. brachyantiklinálu.

11. Zlomy vltavské vznikly většinou poklesem vrstev pravého břehu.

12. Údolí Mlejnského (Bojovského) potoka procházející porfyrovými ložními žilami oblasti mezi Mníškem a Davlí jest z největší části původu epigenetického, nikoliv tektonického.

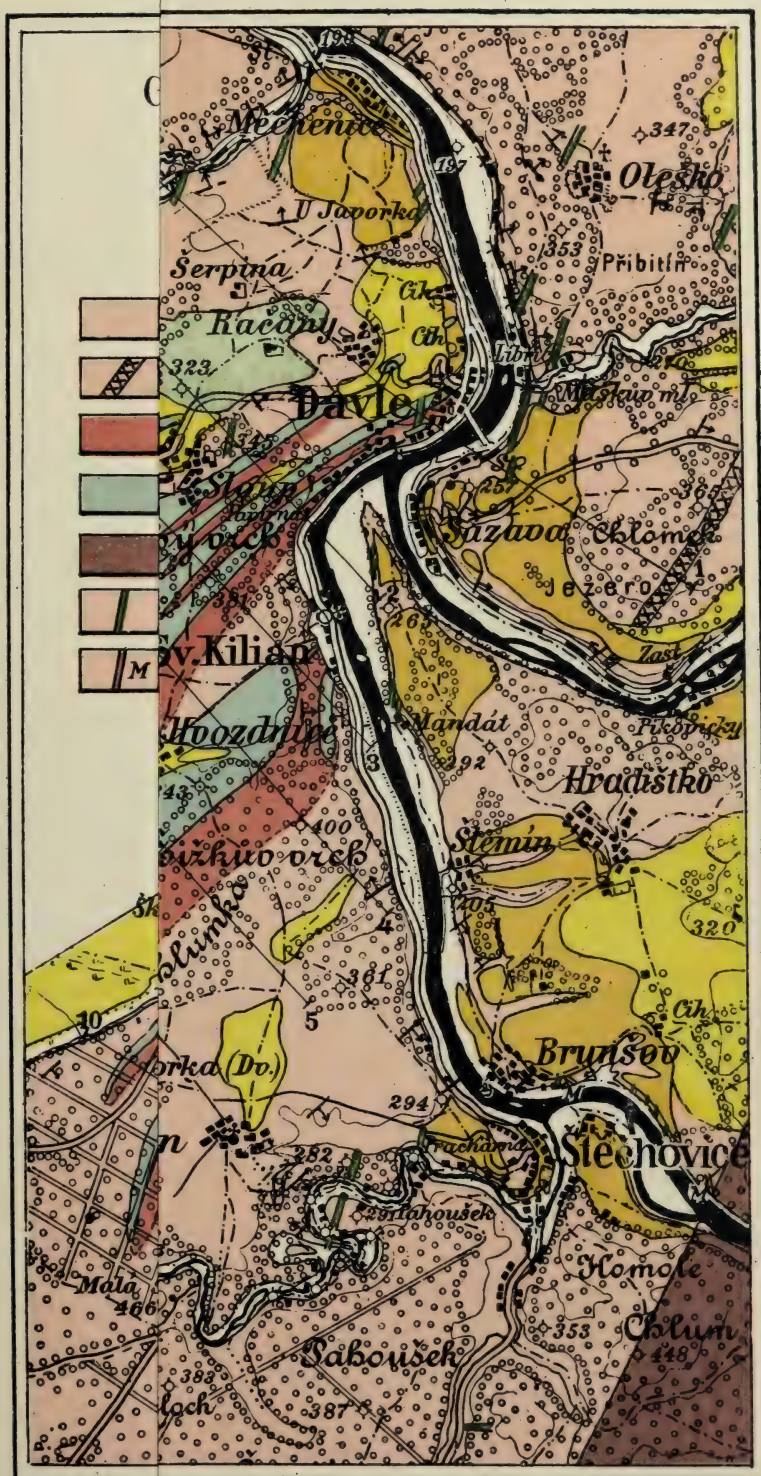
13. Z okolnosti, že ústřední část lakkolithového tělesa porfyrového krajiny mezi Mníškem a Davlí rozštěpuje se v řadu ložních žil menší mocnosti pouze jednostranně, t. j. k sz., nutno odvoditi veliké poruchové pásmo probíhající údolím Kocáby, podle něhož kra algonkických vrstev mezi Kocábou a středočeskou žulou i pásmem jílovským musila poklesnouti.

Mineralogicko geologický ústav c. k. české vysoké školy technické v Praze.

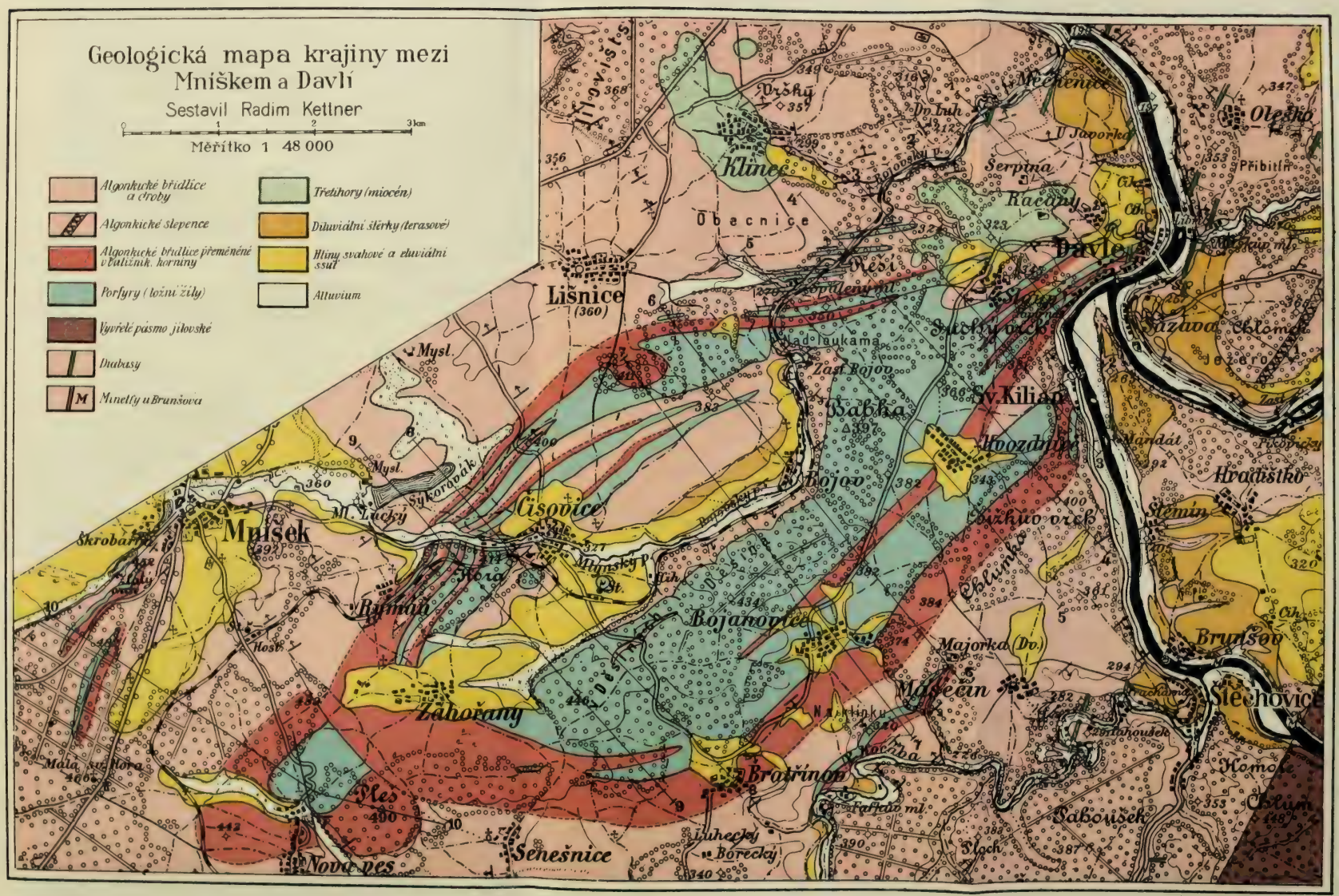
Připomenutí k mapě.

Přiložená geologická mapa, v níž hlavní zřetel byl brán k rozšíření ložních žil porfyrových, má za topografický podklad zmenšený negrografický otisk (1 : 25.000) barevných „Podrobných map zemí koruny České" Dra Bělohlava, vydávaných nákladem F. Topiče v měřítku 1 : 75.000. K účelu naší mapy určeno bylo původně měřítko 1 : 50.000; nedopatřením však nebylo udané zmenšení v reprodukčním ústavě provedeno správně, čímž vysvětluje se nezvyklé měřítko 1 : 48.000 naší mapy. Mapa sestavena byla podle původních výzkumů autorových, provedených v létech 1912—13.

Omezení buližníkových hornin jest jen subjektivní, jelikož přechody jejich do normálních algonkických drob a břidlic jsou zcela povlovné. Z diabasových žil, které dosahují mnohdy jen zcela nepatrné mocnosti, byly v mapě vyznačeny jen nejdůležitější. Jednotlivé diluviální terasy vltavské nebyly na mapě zvlášť rozlišeny, na některých místech však, t. zvl. u Sázavy a Brunšova, lze všecka 3 niveau diluviálních nánosů snadno rozeznati. Pokud se týče průběhu hlavních zlomů, odkazujeme k práci autorově ve Sborníku čes. společnosti zeměvědné 1913, roč. XIX.



LIT. V. ŠTUMPER PRAHA.


Geologická mapa krajiny mezi Mníškem a Davlí
Sestavil Radim Kettner
1 2 3km
Měřítko 1 48 000
Algonkické břidlice a droby
Algonkické slepence
Algonkické břidlice přeměněné v ulit. horniny
Porfyry (ložní žíly)
Vyvřelé pásmo jilovské
Diabasy
M Minetty u Brunšova
Třetihory (miocén)
Diluviální sĕrky (terasové)
Hlíny svahové a eluviální sut
Alluvium
Mníšek
Lišnice (360)
Klínec
Davle
Čisovice
Zahořany
Nové Ves
Senešnice
Bojanovice
Bratřínov
Sázava
Brunšov
Stěchovice
Sv. Kilián
Babka
Bojov
Majorka (Do.)
Mašťan
Zahořanský
Mysl.
Sykorovák
Myslivský
Dubecký
Jahodnický
Jalovišťský
Borecký
Kocába
Zahořanský p.
Mlýnský p.
Dubecký p.
Jahodnický p.
Borecký p.
Kocába p.
Mechenice
Oleško
Přibitín
Serpina
Racanly
Hvozdnice
Hradištko
Stěmín
Homole
Sahoušek
Slach
Obecnice
Vršky
Do luh
U Javorka
Zast. Bojov
Na Hlinky
Hrachárna
Lit V. Štumper Praha.

Funkcionální architektura sklovité chrupavky žeberní u člověka.

Napsal

Prof. Dr. OTOKAR V. SRDÍNKO v Praze.

Z ústavu pro histologii a embryologii české lékařské fakulty; přednosta prof. Dr. J. V. Rohon.

Se 4 tabulkami.

Podporou II. třídy České akademie císaře Františka Josefa v Praze.

(Předloženo dne 16. ledna 1914.)

Ze tří skupin podpůrných tkání v těle živočišném byla nejprve *tkáň kostní* podrobena studiu vzhledem k otázce, existuje-li nějaký vztah mezi strukturou nebo architekturou tkáně a funkcí její. Bourgery ve své francouzské anatomii z r. 1832 kreslí průřez horním koncem femoru a soudí, že v „čáře tlaku" jsou trámce spongiosy zvláště husté a pevné, kdežto mimo onu čáru jsou trámečky jemnější.

O *vazivu* naznačil r. 1865 His, že při jeho vývoji hrají mechanické momenty značnou roli, neboť působí i na uspořádání elementů i na růstové pochody v nich. Kde působí trvalý tlak na vazivo (nebo tah často se opakující), tvoří se fibrosní pruh, šlacha, v níž směr vláken jest shodný se směrem tahu. Kde působí tlak, tvoří se fibrosní ploténka vrstevnatá, v níž vlákna se kříží v rovině, která stojí kolmo na směr tlaku. Kde konečně působí na vazivo napětí — v různém směru po sobě, vyvine se vazivo řídké se skříženými vlákny, v němž je hojně hmoty hlenovité nebo tuku.

Chrupavka byla podrobena studiu v tomto směru teprvé v době přítomné, neboť starší autoři byli celkem toho náhledu, že „chrupavka není schopna vytvořiti architekturu" (Dekhuyzen). Chci zde podati obraz přítomného stavu otázky o funkcionální struktuře podpůrných tkání, při čemž stručněji to učiním o kosti a vazivu, zevrubněji však o chrupavce sklovité, protože touto jsem se delší dobu obíral a došel k výsledkům, které jednak jsem již publikoval jednak v této práci sdělím.

Funkcionální struktura fibrosní tkáně.

O této otázce poprvé souborně pojednal r. 1892 Solger. Vedle názoru Hisova, nahoře uvedeného, referuje Solger o práci Rouxově, která jedná o vazivové struktuře v ocasní ploutvi *delphina*. Vazivová struktura, Rouxem popsaná, spočívá v systemech vláken, které se pod pravým úhlem kříží a typicky jsou zakřiveny. Vznik oné komplikované struktury vysvětluje Roux domněnkou, že specifický funkcionální popud každé tkáně nebo vykonávání funkce má zároveň trofický účinek, neboli, jinými slovy, povzbuzuje k hypertrofii resp. k hyperplasii a že naopak, není-li popudu nebo funkce, mizí části tkáňové. Specifickou funkcí vlákna vazivového jest podle Rouxe odpor vláken proti tahu, působícímu ve směru vláken a proti tlaku, kolmému na směr vláken. Při trofickém účinku funkce nastoupí v tom směru, ve kterém síly nejsilněji účinkují, aktivní hypertrofie, kdežto vlákna uložená v jiných směrech pozvolna mizejí. Tento princip má platnost s malými změnami označení právě tak pro útvary z kosti, jako z chrupavky nebo jiné tvary podpůrných tkání. Ač o normálním životě tkaniv málo dosud se zná, považuje Roux za pravděpodobné, že k vytvoření fibrill jest třeba tahu ze zevnějška působícího.

Funkcí fibrosní tkáně zabýval se dále Thürler a vysvětluje skladbu jednostranně mechanicky, nevšímaje si ani histogenesy ani buněk vaziva. Jako v chuchvalci vaty se tahem dají různosměrná vlákna přivésti do polohy přibližně navzájem rovnoběžné, tak vzniká tahem paralellní uspořádání vláken vazivových.

Solger sám soudí, že ve fibrosní tkáni vystupuje zřejmě funkcionální struktura, kterou lze viděti jak na tkáni mezibuněčné tak i v uložení buněk.

Funkcionální struktura byla popsána kromě ve šlaše ještě ve fasciích, perimysiu vnitřním, ligamentech, ploténkách meziobratlových, bubínku ušním, chlopních semilunárních a v ocasní ploutvi *delphina*, jak nahoře bylo již blíže uvedeno.

Z novějších prací spadají sem dvě experimentální studie žáků *Rouxových*, a sice Levyho *„o vlivu tahu na tvoření vláknitého vaziva“* a Kanekova o *umělém vytvoření margines falciformes a arcus tendinei* (obě práce z r. 1904).

Levy prováděl různě modifikované tenotomie šlachy Achillovy králíka a došel k těmto závěrům:

Po jednoduché tenotomii vzniká z mladého bujícího vaziva za vlivu silného intermittujícího tahu svalstva s počátku komplikovaně propletená jizva, která však později jest přetvořena v strukturu pravidelně, podélně a rovnoběžně vláknitou.

Při tenotomii spojené s neurektomií nervi ischiadici, jest differencování buněk s počátku opozděno, protože chybí tah svalu, později však, když

se sval smršťuje, vzniká jizva jako při jednoduché tenotomii pravidelně podélně a rovnoběžně vláknitá.

Při tenotomii a exstirpaci části svalu jest differencování buněk tkáně v ráně opozděno a vlákna, která se později vytvoří, jsou navzájem nepravidelně propletena.

Jestliže na mladou tkáň předešlého pokusu působil umělý tah příčně na osu šlachy, vznikl vazivový provazec mladých vláken, uložených napříč průběhu šlachy.

Ze všeho toho soudí Levy, že mechanický tah podporuje differencování vláknitého vaziva, že dále má vliv na směr vláken vazivových a že konečně zachovává při životu vlákna již vytvořená.

Pro všecky tyto zjevy hodí se Levymu k výkladu nejlépe theorie Rouxova, spočívající na trofickém působení funkcionálního dráždidla; Levy opakuje na počátku své publikace (str. 185—194) hlavní věty Rouxovy o funkcionálních strukturách.

Kanekovi se podařilo uměle na libovolně zvoleném místě vytvořiti vazivové útvary typické struktury. Buňky granulací, které jsou v ranách fascií a svalů, differencují se v směru převládajícího silného tahu a jest proto možno docíliti z indifferentní nebo ještě mladé granulační tkáně účelným umělým dráždidlem utvoření libovolného uspořádání. Kde differencování tkáně jest již skončeno, tam vytvoření nového útvaru se nedosáhne, nýbrž tkáň působením silného dráždidla atrofuje. — Působí-li na řídké vazivo konstantní mechanické dráždidlo, jest ono vazivo nahrazeno pruhem vláken, differencovaným cním dráždidlem. Kaneko soudí, že by se daly uměle vytvořiti všecky vazivové útvary, kdybychom dovedli napodobiti věrně dráždění, jež organismus sám provádí.

Funkcionální struktura kosti.

První kresby o vnitřní architektuře kostí nalézají se ve francouzské anatomii Bourgeryově z r. 1832. Ward ve své osteologii z r. 1838 kreslí rovněž obraz vnitřní architektury koxálního konce femoru a první připomíná podobnost jeřábu s horním koncem femoru, v němž popisuje trojí různé skupiny trámců. Architekturou femoru, obratlů, talu a kalkaneu obírá se dále Američan Wyman r. 1849 a 1857.

V německé literatuře poprvé obírá se architekturou kostí (femoru a tibie) J. Engel, professor anatomie v Praze r. 1851. Dále sluší uvésti Angličana G. M. Humphryho (1858) a Němce W. A. Freunda (1861), kteří oba, studujíce architekturu kostí, v mnohých bodech správně posoudili význam trámců spongiosy.

Po těchto předběžných pracích přišli v r. 1867 Hermann šl. Meyer společně s Culmannem se svými přesnými pozorováními, podepřenými matematickými podklady grafické statiky, kterou Culmann založil. Wolff v r. 1870 upozorňuje na práci Meyrovu a zdůrazňuje

objev Culmannův, že architektonické uspořádání v některých kostech se shoduje s theoretickými čarami grafické statiky. Wolff zabývá se hlavně horním koncem femoru a kalkaneem a zjišťuje kromě jiného, že trámce spongiosy se kříží pod pravým úhlem. Po roce 1870 zabývali se architekturou kostí Wolfermann, Zaaijer, Aeby, Bardeleben, Langerhaus, Bigelow, Dwight a Meyer. R. 1892 vydal Wolff velkou publikaci s názvem: „*Das Gesetz der Transformation der Knochen*," ve které shrnuje jednak výsledek dosavadních prací, jednak vyslovuje zákon o transformaci kostí. Wolff dokazoval na základě architektury kostí normálních i pathogicky změněných nejprvé, že následkem všech změn zevní formy a statického zatížení kostí vzniká také změna vnitřní architektury. Naopak také změna vnitřní architektury přináší sebou sekundární změny zevní formy kostí. R. 1884 dokazoval Wolff, že změny funkce kostí mají za následek i změnu architektury spongiosy i změnu zevního tvaru kosti, ať jsou to změny funkce samy vzniklé následkem pathologických poruch, nebo změny funkce uměle vyvolané; konečně dokazoval Wolff, že lze tvar kostí deformovaných přivésti ve tvar normální, zavede-li se normální statická funkce kostí. Všechna tato svá pozorování shrnul Wolff v *zákon o transformaci kostí*, čímž se rozumí zákon, podle kterého následkem primárních změn tvaru a funkce nebo také pouze následkem změny funkce vznikají určité změny vnitřní architektury kostí, které se dají matematickými pravidly předem určiti, a určité sekundární změny zevní formy kostí podle těchže matematických pravidel.

Křivky tahu a tlaku realisované v trámcích spongiosy (t. zv. trajektorie) mají tyto vlastnosti: Tlak a tah není v nich konstantní, nýbrž od jednoho konce k druhému tahu neb tlaku ubývá v křivkách. Kde jest minimum tlaku neb tahu, tam stojí křivky normálně k neutrální ose; kde jest maximum tlaku a tahu, tam jsou křivky rovnoběžny jednak s neutrální osou, jednak vespolek. Křivky protínají neutrální osu pod úhlem 45° a navzájem se kříží pod pravým úhlem. Ve směru křivek není žádných sil střižných.

Wolff zamítá theorii tlakovou (že pod tlakem kosti ubývá) a staví nauku o funkcionálním tvaru normálních i pathologicky změněných kostí. Tvar kosti nezávisí na poloze kosti a na tlaku okolních částí, nezávisí na vlastní intensitě růstu kosti na povrchu neb uvnitř, nezávisí na kloubním tlaku, nezávisí na elasticitě, stlačitelnosti neb povolnosti tkáně kostní, nýbrž na statickém upotřebení t. j. na funkci. Pouze statická upotřebitelnost a nutnost nebo statická zbytečnost rozhodují o existenci a uložení každé částečky kosti a tudíž i o celém tvaru kosti. Apposice, interposice, scvrkání, mizení expanse a resorpce, to jsou všecko děje, kterými se změny tvarů dějí a tyto děje jsou projevy funkcionálního přizpůsobení kostí. Důsledky ze zákona o transformaci kostí pro ostatní tkáně jsou, že funkcionální dráždění vytváří funkcionální strukturu t. j. strukturu, při které se vytvoří pouze čáry silnější funkce a při které daná funkce se vyko-

nává minimem materiálu nebo podle Roux e daným materiálem se vykonává maximum funkce. Forma tkání není stabilní a normální, nýbrž existuje schopnost tkání přijmouti účelnou formu, která odpovídá úkonu.

Proti Wolffovi vyslovili řadu námitek šl. Recklinghausen, Solger, Zschocke a Bähr. Wolff r. 1899 se hájí proti námitkám, připouští, že není všude orthogonalita trámců spongiosy a že některé trámce nespadají v trajektorie. Uzavírá však opětně, že tvar kosti za poměrů normálních i pathologických jest jaksi matematickým obrazem všech požadavků, které na onu kost mohou býti kladeny při činnosti různých svalů a při různém zatížení oné části těla.

Gerbhardt (1901) studoval význam uložení fibrill v zubech. Dochází k závěru, že i mikroskopická struktura kostí jest přizpůsobena funkci. Autor však klade váhu také na pochody a zákony vývoje. Konečná architektura jest resultátem fysiologické reakce tkáně na trofické dráždění funkce.

V r. 1900 vyšla řada prací Albertových, ve kterých popsal autor architekturu ulny, radia, humeru, femoru, tibie a fibuly na základě důkladnějšího studia než se dosud dělo. Albert vykonal jmenovanými kostmi jak celé serie řezů ve všech třech hlavních směrech, tak také řezy v rovinách šikmých a váhu kladl na studium této otázky na podkladě srovnávací anatomie a vývoje.

Triepel (1904) nesouhlasí s Wolffem a považuje názor jeho, že zevní i vnitřní struktura kosti spočívá na funkci, za jednostranný. Triepel praví, že důkaz o shodě trámců spongiosy s trajektoriemi mechaniky chybí. Připouští možnost, že v mnohých případech Wolffových maximální napětí jest insubstancováno, že však jest třeba podati důkaz pro každý případ zvláště. Již Solger upozornil, že stavba kostí po změně funkce může zůstati za některých okolností po léta ve starém tvaru. Reakce kosti na změnu napětí nastupuje velmi zvolna.

Dále upozorňuje Triepel, že při transformaci třeba přihlížeti nejen ku tkáni intercellulární, nýbrž také k buňkám, které vykonávají činnost kost rušící nebo tvořící a že třeba přihlížeti také k výživě buněk. Trajektorielní strukturu uznává Triepel pouze pro hlavičku a krček femoru. Jindy jest často struktura ona zastřena zaokrouhlením úhlů na prusečných bodech trámců. Podmínkou trajektoriální struktury jest Triepelovi orthogonalita trámců; kde ta chybí, nelze mluviti o trajektoriální struktuře. — Při změně struktury jdou vedle sebe dva děje: snaha po zachování starého tvaru a jeho přeměna. Snad věk má vliv na intensitu jednoho nebo druhého pochodu. Triepel uzavírá takto: Po nastalé změně funkce kostí mohou se části staré struktury uchovati po léta. Nastupuje však také řada transformací, která aspoň částečně závisí na změně funkce. Na některých místech jest možno, že nastupuje trajektoriální struktura spongiosy kostní, dokázati přímo se to však nedá; na jiných místech se trajektoriální struktura jistě nevytvořuje. Architektura spongiosy se

celkem vzato nedědí. Trajektoriální struktura, známá na středním řezu hlavičkou a krčkem femoru jest zjednána během individuálního vývoje. Vznik trajektoriální architektury spongiosy v normalním skeletu jest následek funkce. Funkce však není to jediné, co působí na uspořádání elementů spongiosy.

Otázce, jak se chovají elementy tkáně kostní v trámcích spongiosy, věnoval pozornost již S o l g e r ve své práci z r. 1892. S o l g e r odpovídá k otázce, zda se buněčné elementy kosti chovají jako ve šlaše, ve vazivu, záporně. Trámec kostní se chová jako celek, jehož elementy jsou hmotou tmelovou spojeny v jednolitou massu. Buňky kostní jsou podle S o l g e r a uloženy v částečce trámce v různých směrech a rovněž fibrilly. S o l g e r soudí, že funkcionální struktura kosti neexistuje v tom smyslu jako ve vazivu. Fibrilla kostní se chová v kostěné hmotě interfibrillární jinak než fibrilla vazivová. Tmelová hmota mezi fibrillami různých druhů pojiv má různou konsistenci a fibrilly jsou ve vazivu, chrupavce a kosti tak různě upevněny, že síly tahu a tlaku musí různým způsobem míti vliv na strukturu těch tkání.

Funkcionální struktura chrupavky sklovité.

D e k h u y z e n soudil, že chrupavka není schopna vytvořiti architekturu. R a u b e r vyslovil náhled, že na koncích kloubních jsou vytvořeny koncentrické ploténky mezibuněčné hmoty a ty že nesou tlak na příslušnou část skeletu působící; pro svou větší měkkost, než má kost, připouští chrupavka vytvoření architektury jen v obmezené míře. Tito i jiní badatelé vyslovovali se tímto způsobem vzhledem k chrupavce dospělé. Jiní však všímali si chrupavky provisorní, totiž té, která se přetvoří v kost a shledali v ní záhy určité uspořádání jak buněk, tak hmoty základní. R o s e n t h a l popsal poprvé na tibii králičího embrya divergenci sloupců chrupavkové hmoty. Na podélných řezech jsou dle jeho popisu postranní sloupce v lehkých obloucích nakloněny k jádru epifysy, uprostřed probíhají sloupce přímo. Kolem jádra epifysy jsou buňky chrupavkové uspořádány v kruhy event. v elipsy. R o s e n t h a l vysvětluje uspořádání buněk přítažlivými silami, které vycházejí z ossifikačního centra a soudí, že jest možno, že tyto architektonické křivky jsou právě tak typickými pro chrupavku, jako uspořádání spongiosy pro kosti.

K a s s o w i t z soudí, že v prvních stadiích vzniku kosti nelze mluviti o zvláštní architektuře, kterou by bylo možno nazvati *funkční*, že však existuje pro každou část skeletu zvláštní *architektura růstu*.

S o l g e r udává tři vrstvy v chrupavce kloubní a soudí, že nejsou podmíněny funkcí. Rovněž uspořádání hmoty mezibuněčné nedá se vysvětliti mechanickým vlivem ba ani struktura základní hmoty t. j. uložení fibrill není takové, aby z toho bylo lze souditi na funkční strukturu. S výkladem R o s e t h a l o v ý m o atrakčním centru při ossifikaci S o l g e r nesouhlasí a míní, že pravidelné uspořádání buněk chrupavkových má jinou morfo-

logickou cenu než uspořádání spongiosy kostní. Uspořádání ono jest podmíněno růstem buněk od zárodečného centra, tedy že jest to *architektura rostová*, jak ji naznačil Kassowitz.

Hultkrantz zkoumal chrupavky kloubní a shledal, že povrchní vrstvy základní hmoty jsou rovnoběžné s povrchem a sice buď v jednom hlavním směru, nebo se snopce křižují. Zkoumal dále soudržnost hmoty chrupavek kloubních a shledal, že trhliny vznikají paralellně se silami, které za normální funkce na chrupavku působí a naznačují, kde jest větší pevnost chrupavky na tah.

Triepel zkoumal hyalinní chrupavku na tah, tlak a jiné síly. Tah působí na chrupavku ve formě tření v kloubech; tato síla však jest nepatrná, takže sice může míti vliv na vytvoření jemnějších struktur, ale nezpůsobuje patrnějších změn tvaru. Tah dále působí na jednotlivé chrupavky hrtanové na místech, kde se inserují svaly. Důležitější jest tlak. Ten způsobují hlavně jednak svaly, které táhnou přes kloub; při kontrakci jich působí pravidelně určitá komponenta jako tlak na kloub. U chrupavek kloubních dolní končetiny jest důležitý tlak celého hořejšího dílu těla. Tah i tlak zároveň účinkují při různých ohnutích chrupavek tracheálních a žeberních. Chrupavka žeberní při dýchání podléhá komplikovaným silám. Jednak jest otáčena podél své dlouhé osy, jednak ohýbána. Chrupavky tracheální jsou ohýbány tahem svalů na svých koncích a rovněž tak chrupavka štítná.

Na tah projevuje chrupavka sklovitá větší elasticitu než vazivo vláknité ale menší než šlachy. Na tlak jest chrupavka sklovitá velmi pojištěna. Triepel podle svých výpočtů soudí, že pevnost chrupavky na tlak jest 10kráte větší, než jest největší možný tlak za života.

Friedländer na popud Albertů v studoval vztah architektury kostní k struktuře chrupavky; došel však k náhledu, že nelze zachytiti žádného vodítka při řešení této otázky ani v uspořádání buněk ani v uspořádání chrupavkové hmoty základní. Za to popisuje určitou pravidelnost v uspořádání cev krevních při ossifikaci chrupavky.

Mörner r. 1888 našel v tracheální chrupavce starších individuí hovězích barevné differencování, na mladších chrupavkách nikoliv. Mörner nazval hmotu ležící při buňkách „*Choudrinballen*“ (barví se methyl. violetí, fuchsinem), kdežto ostatní základní hmota, která se nebarví oněmi barvivy, tvoří síť trámců (Balkennetz). Další práce Mörnerovy, Schmiedebergovy a Hansenovy obírají se podrobně chemickou skladbou chrupavky sklovité a všeobecnou histologií chrupavky; o otázce funkční struktury se nerozšiřují.

Hansen se zmiňuje rovněž o síti trámců, nevšímá si však její architektury blíže a pouze o této otázce soudí všeobecně takto:

„Zvláštní architektonický obraz, který tvoří červená trámčina v chrupavkách, pozorovaných jako celek, vzbuzuje samoděk myšlenku, že různý celkový tvar trámčiny v periferních a hlubších vrstvách chrupavky má také význam mechanický (analogie architektuře spongiosy

v kostech). Červená trámčina označuje umístění (Lokalitäten) nezakrytého (nemaskovaného) a lehčeji odkrytelného kollagenu, dá se zjistiti v uspořádání, které v podstatě souhlasí dokonce v těch chrupavkách a v těch partiích, kde ji basofilie normálně zakrývá; a ona místa nezakrytého neb nejsnadněji odkrytelného kollagenu jsou dále ty partie základní hmoty, v níž vazivové fibrilly, absolutně vzato, jsou nejhustší, v nichž je nejvíce kollagenu. Uspořádání trámčiny v chrupavce kloubní vedle celého způsobu, jak se trámčina různí podle tvaru a mechanického vztahu chrupavky, dílem navzájem, dílem k okolním tkáním (svalům, kostím, vazům atd.), dále průběh fibrill v trámčině, o čemž později bude mluveno, poukazují rovněž rozhodně k tomu, že mechanické poměry ve svých hrubých rysech, přece však nikoliv výhradně, jsou spolu rozhodnými pro uspořádání trámčiny. Totéž platí o poměru trámčiny k buňkám a skupinám buněčným, jichž uspořádání (rovněž jako hlavní směry fibrill v různých vrstvách chrupavky) souhlasí jak povědomo v celku s mechanickými principy. Pravím výslovně, že mechanický princip nerozhoduje sám, neboť vlastní „formativní schopnosti" buněk a základních hmot jsou rozhodujícími, jak to jemné histologické poměry dosti jasně ukazují, pro růst a primární poměry tkaniva, kdežto akkomodace vzhledem k mechanickým požadavkům a úlohy, které vedle toho nacházíme, jsou kompromissem (resultantou) mezi mechanickými „ohledy" a mezi ostatními histologickými a histochemickými poměry tkaniva. Bylo by jednostranné považovati nějaký princip za jedině ovládající, ježto vše nasvědčuje tomu, že poměry, jak je nalézáme, značí harmonické rozluštění četných různých, mezi nimi také čistě mechanických úkolů, jež jsou kladeny na tkáň. Jest ovšem něco jiného, že mechanický ohled často nejvíce bije do očí, kdežto jeho úkol rovněž tak často ve skutečnosti jest přiřazen jiným úkolům a jest rozhodujícím pouze pro hrubé obrysy. Chtěl jsem pouze naznačiti mechanické hledisko, které vskutku přehlédnouti se nesmí, nebudu se však blíže zabývati speciálním vyšetřováním o chrupavce, které by si všímalo její stavby, směru skulin a pod. přihlížeti k mechanickým úkolům chrupavky (kloubní chrupavky) nebo k významu, jaký mají pro histologii tkaniva."

„Lze s klidem předpověděti, že zde jest široké pole pro budoucí, důležitá badání mezi jiným s poukazem na velmi zajímavé a význačné výsledky, které přineslo vyšetřování J. W. Hultkrantzovo o směru skulin kloubních chrupavek a o závislosti směru fibrill na mechanických poměrech kloubu."

„Ovšem okolnost, že určité strukturní poměry chrupavky zobrazují akkomodaci (účelnost) na mechanické principy, nám prozatím nikterak neosvětluje pochodů, kterými ony zvláštní strukturní poměry v první řadě vznikají. S druhé strany poukazují histiologické a histiochemické poměry chrupavky k velké úloze, kterou hraje vztah základní hmoty k buňkám. Jednak jsou základní hmoty chrupavky, o čemž jinde budu mluviti, aspoň z velké části v určitém genetickém vztahu k buňkám, ačkoliv některá

základní hmota během určitých period jest tvořena extracellulárně; jednak zdá se, že má význam odlehlost od buněk neb skupin buněčných.“

„Rovněž průběh fibrill jest resultantou jednak mechanických vlivů, jednak zvláštních poměrů růstu, vývoje a výměny látek živé tkáně.“

Co se speciálně týče mechanických poměrů, získal H a n s e n pro svou osobu náhled, že „ohled na mechanické požadavky jest značně rozhodujícím pro makroskopické, hrubé poměry při rozdělení elementů a hustotě podpůrných tkání speciálně fibrill. Rovněž jako se jeví mechanický princip v kostech, v organisované tkáni kostní, nejjasněji v uspořádání trámců spongiosy a v podobných hrubých stavebních poměrech, kdežto jemné poměry strukturní poukazují na zvláštní strukturní růst a t. d. kostní tkáně a určité části tkáně kostní, na př. obsah dutin spongiosy jakož i výstelka osteoblastů s primárním tvořením tkáně vazivové jakož i buňky dřeňové a ostatní obsah dřeně teprve v třetí neb čtvrté řadě se řídí mechanickými ohledy – právě tak děje se v chrupavce: v jemných poměrech a v prostorech, v mechanickém ohledu více indifferentních, mohou se vlastní děje životní tkáně nejjasněji a nejvolněji manifestovati, kdežto mimo tyto prostory působí mechanické ohledy, které opět pro své vyrovnávající působení mohou simulovati zdánlivou jednoduchou odvislost od mechanického principu.“

T h o m a (1907) připisuje chrupavce podobnou pevnost, jakou má kost, ale menšího stupně. Chrupavkový primordiální skelet foetu podléhá zvláště při pohybech svalových v podobné míře mechanickým silám, jako kosti dospělého a lze ono zatížení sklovité chrupavky, jejíž homogenita jest rušena pouze přítomností chrupavkových buněk, stejným způsobem rozložiti v systemy car tlaku a tahu, které se navzájem křižují pod pravými úhly, jak to učinili M e y e r a C u l m a n n pro kosti. Při silnějším zatížení a při větších rozměrech, nestačí dále malá, třebas dokonalá elasticita chrupavky a proto na místo chrupavky nastupuje materiál stejně dokonalé, ale vyšší elasticity, totiž pevná hmota kostní. V dalším dochází však T h o m a k omezení úplné homogenity chrupavky, neboť jsou v ní dutiny a skuliny vyplněné buňkami. Proto není rozdělení trajektorií tlakových v chrupavce docela stejnoměrné, což právě jest patrno na uložení buněk. T h o m a soudí, že i růst tkáně chrupavkové jest závislý na tlaku. Co se růstu buněk týče, rozšiřuje rostoucí buňka dutinku buněčnou vždy ve směru nejmenšího odporu tak daleko, až tlak a protitlak na každý průměr dutinky buněčné jest stejně velký. Tím dáno jest postavení buněk chrupavkových do řad, neboť převládá-li napětí podélné, dosáhne se tlakové rovnováhy teprve tehdy, seřadí-li se buňky v řady rovnoběžné s podélnými trajektoriemi. Pak jest rozdělení tlaku v bezprostředním okolí každé buňky symetrické k ose, která jde středem řady buněčné. Tvar buňky chrupavkové jest přizpůsoben struktuře a funkci hmoty mezibuněčné jako tvar buňky vazivové. T h o m a soudí, že existuje také vztah mezi proliferací buněk chrupavkových a zatížením chrupavky. Nemůže však udati, je-li to vztah

přímý, či nepřímý a jak se utváří. Postavení buněk chrupavkových do řad jest následek té okolnosti, že longitudinální, radiální a tangentiální napětí v chrupavce jest převážně neseno v chrupavce hmotou mezibunečnou.

Nastoupení ossifikace vykládá Thoma takto: Když při vzrůstajícím zatížení kloubních ploch napětí podélné dosáhne uprostřed diafysy určité horní meze, nastoupí za normálních poměrů zvápenatění hmoty mezibuněčné. To způsobí zvýšení pevnosti chrupavkové hmoty mezibuněčné na tlak, což chrání nerušený průběh tvoření kosti v oddílu chrupavky, jehož hmota mezibuněčná jest zatížena až na hranice svých existenčních podmínek. Rovněž ossifikace v epifysách počíná na místě největšího zatížení nebo napětí a postupuje na všecky strany ovšem ne stejnou rychlostí. Také zakončení ossifikace na hranicích diafysy a epifys závisí na podmínkách mechanických.

Mollier (1910) referuje o práci Romeisově, který studoval vztah architektury kosti a chrupavky při ossifikaci dlouhých kostí králíka, žáby a kalkaneu králíka. První trámce kostní souhlasí svým průběhem s trámci základní hmoty chrupavkové. Molier to považuje za odkrytí „mechanické struktury v chrupavce," o níž Wolff, Albert, Triepel, Friedländer a j. pochybovali."

Romeis (1910) se nejprvé zmiňuje o tom, že na otázku, zda architektura kostí jest naznačena již v embryonální době, či zda vzniká teprve později z materiálu indifferentního, odpovídali dosud badatelé různě. Tak Wolff soudil, že ona architektura se zakládá již v kostech intrauterinně, tedy před funkcí a že jest tedy zděděna. Kassowitz vystoupil proti Wolffovi a tvrdil, že v prvních stadiích růstu kostí není stopy po funkční architektuře a že lze pouze mluviti o architektuře rostové. V diafyse rourovité kosti je centrum růstu, od toho se počíná ossifikace a děje se růst kosti a proto zbytky chrupavkové hmoty i řady buněk od tohoto místa směrem k epifyse divergují. Roux soudil, že je možno, že funkcionální struktura v kosti vzniká tak, že kost skládající se s počátku z nepravidelného sítiva, jest vystavena tlaku a tahu a že trámce, které spadají do směru sil, zmohutní, kdežto trámce ostatní atrofují z nečinnosti. Roux rozeznává při vývoji dobu první, kde části se vyvinují na základě potencí zděděných a při tom současně vyvinují něco funkcionální struktury, a periodu druhou, kde funkce vytvoří strukturu funkcionální a kde k udržení té struktury je třeba funkce co dráždidla. Schmidt soudí, že spongiosa kostí embryonálních jest pouze v hlavních tazích podobna kostem dospělým. Albert považoval za důležité hledati souvislost mezi hotovou architekturou a jejím vývojem. Friedländer došel k negativnímu výsledku, hledaje souvislost onu na popud Albertův, zato však shledal, že embryonální chrupavka jest záhy prostoupena cevami, které mají týž směr, jako později lamelly kostní.

Romeis studoval ossifikaci tibiae a kalkaneu králíka až do konce embryonálního života. Na onom stupni vývojovém, kde celá pozdější

kost se skládá z malého chrupavkového základu, obklíčeného silným obalem mesenchymu, nepozoruje se nic více, než že většina buněk chrupavkových jest uložena svou dlouhou osou napříč dlouhé osy základu. Tím vzniká zvláště při menším zvětšení dojem, že jsou tam určité, ale nepravidelné pruhy, směřující od jedné podélné strany chrupavky k druhé. U staršího stadia (embryo králika 16 dnů) jsou příčné pruhy buněčné patrnější, ježto základní hmoty přibylo; pruhy ony jsou však prohnuté, konkávní směrem k diafyse. U embrya 18 dnů starého vytvoří se perichondrální kostěný obal, uvnitř kterého jest v diafyse velkobuněčná chrupavka t. j. velké, světlé dutiny s degenerovanými buňkami chrupavkovými. Směrem k oběma koncům diafysy následuje chrupavka sloupcová s buňkami stlačenými, jichž dlouhá osa křižuje dlouhou osu chrupavčitého základu. V okrsku chrupavky velkobuněčné nemohl R o m e i s nalézti žádné architektury, za to v chrupavce sloupcové jsou zřetelné příčné pruhy, k diafyse konkávní. U embrya 20 dnů starého zaujme dutina s jemným vazivem a cevami místo, kde byla chrupavka velkobuněčná. V chrupavce, která následuje od dutiny k jednomu i druhému konci diafysy, jest nejprve vrstva velkobuněčná a pak vrstva chrupavky sloupcové, ve které jsou vytvořeny dva systemy pruhů: jedny jsou parabolické oblouky podélné, které konvergují k střední podélné ose chrupavky, druhé jsou oblouky příčné, konvexitou obrácené k diafyse. Příčné oblouky jsou zřejmější a četnější ale užší než oblouky podélné. Kříží se často pod pravým úhlem navzájem. Tato architektura jest nejpatrnější v doleních dvou třetinách okrsku chrupavky sloupcové.

U embrya 24—26 dnů starého v proximální epifyse tibiae jsou podélné pruhy, ve skutečnosti lamelly hmoty chrupavkové, rovnější a příčné lamelly plošší, tedy rovněž rovnější. Zbytky základní hmoty chrupavkové, trčící volně do dutiny dřeňové, považuje R o m e i s za podpůrné sloupce pro ploché, příčné oblouky a za podklad pro primární enchondrální trámce kostní. Směr těchto trámců jest od osy šikmo dolů k plášti perichondrálnímu. Kromě trámců podélných a příčných nalezl autor na příčných řezech třetí systém lamell radiárních.

Rovněž nad ossifikačním bodem v kalkaneu králíka 24 dnů starého popisuje R o m e i s tři systemy lamell podélných, příčných a radiárních.

Popsanou architekturu nalezl s různými modifikacemi R o m e i s také u kočky, ovce a člověka a uzavírá svou práci takto: Chrupavkový základ, který předchází kosti, má určitou konstrukci, kterou lze nazvati architekturou chrupavky, která ušla dosud pozornosti badatelů, ač theoreticky byla předpokládána. Přehlédne-li se vývoj některé kostěné části skeletu, která má nejprve vazivový a potom chrupavkový základ, sezná se, že při změně materiálu a tvaru, funkce zůstává stálou; autor z toho soudí, že pro funkci nutné technické zařízení je stejné při všech třech druzích materiálu. Již ve stadiu vazivovém by se mělo nalézti řešení technické úlohy, autor však soudí, že asi by bylo obtížno poznati zde konstruktivní princip. Ve

stadiu chrupavkovém vede vývoj k jasnému vytvoření konstruktivního principu a tento jest konečně převzat od následné tkáně kostní a přiměřeně funkcí dále vyvinut. V embryonální chrupavce objevují se určité struktury, které z větší části pravděpodobně jsou vyvolány mechanickou funkcí. Autor vyšetřoval také permanentní chrupavku u *Selachií* a našel v chrupavkovém skeletu jejich určité architektonické struktury, o nichž slíbil podati zprávu. Popsané struktury odvozuje autor z části zděděním, z části z vlivů mechanických, čehož potvrzení očekává od pokusů.

Schaffer vystoupil proti výkladům Romeisovým v „Anatomické společnosti" r. 1911. Avšak již v dřívějších pracích tohoto autora nalézáme zmínky o architektuře chrupavky. Tak r. 1901 popisuje syncytiální základ chrupavky a praví, že hranice buněčné tvoří sítivo, jehož mezery jsou vyplněny těly buněčnými. Toto sítivo, které má funkcionální uspořádání, odpovídající tlaku rostovému, tvoří prochondralní základní nebo tmelovou hmotu. Dále popisuje morfologické a mikrochemické změny v chrupavce ocasní ploutve *mihule říční* a podklad oněch změn vidí v „mechanicko-funkcionálních momentech". Romeisův náhled, že architektura chrupavky jest předběžným stupněm architektury kostní, Schaffer nesdílí, nýbrž soudí, že architektura Romeisem popsaná nemá nic společného s pozdější funkcionální strukturou kostí; již proto ne, protože architektura kostí vystupuje relativně pozdě a pod vlivem funkcionálního upotřebení v době, kdy původní embryonální a foetalní chrupavkový skelet jest úplně zrušen.

To, co Romeis nalezl, jest správně popsáno, ale výklad třeba hledati jiný. Ten podává Schaffer, přihlížeje k poměrům růstu chrupavky. Z počátku mají buňky chrupavkové schopnost ve všech třech směrech stejnoměrně se děliti a rozestupovati od sebe (Lankaster). V každém chrupavkovém základu krátké neb dlouhé kosti vidíme buňky stejnosměrné hustě uspořádány. Růst děje se od středu ve směru radiárním, centrifugálním, později, když střed zvápenatí, jsou buňky v něm veliké a základní hmota jest uspořádána ve tvar koncentrických kulovitých ploten, které jsou spojeny radiárně uloženými stěnami. Již zde jest tedy architektonická struktura, která však není vyvolána nějakým mechanickým zatížením, nýbrž jedná se zde o architekturu rostovou, vyvolanou tlakem expansivního centra. Jakmile přestane možnost ve všech směrech stejnoměrně se děliti a rozestupovati, mění se architektonický obraz. K tomu dojde v chrupavce skeletních základů, jakmile zvápenatělé centrum dojde až k perichondrální vrstvě, kde jest utvořen kostěný plášť. Pak nemůže chrupavka růsti do tloušťky a následek toho jest, že řady buněk a lamelly původně v oblouku napříč kosti uložené se vzpřimují, takže probíhají víc a více podélně v kosti. Současně původní zvápenatělé centrum po resorpci se stane dutinou dřeňovou a na jeho místo nastupují dvě centra uložená směrem k oběma koncům v podélné ose; centra tato postupují stále dál a dále od středu kosti a hranici jejich tvoří oblouk jednak kon-

vexní na jedné straně k dutině dřeňové, jednak konvexní na druhé straně k epifyse. Tak vznikají pruhy nebo lamelly základní hmoty chrupavkové, které Mollier a Romeis popsali jednak jako systém pruhů příčných, jednak system pruhů podélných. Schaffer soudí, jak již r. 1889 se vyslovil, že význam embryonální transitorní chrupavky spočívá v tom, že roste stejným krokem jako okolní měkké části a že tak zanechává, tvoříc model, prostor zvolna rostoucí tkáni kostní. Funkcionální architektura v embryonální chrupavce neexistuje, nýbrž toliko architektura rostová. Za to v chrupavce permanentní připouští Schaffer funkcionální architekturu, kterou lze srovnati s architekturou kostí. To zvláště vystupuje v chrupavkách, kde je málo základní hmoty. Autor popsal již r. 1896 v chrupavkách žaberních *ammocoeta* morfologickou stavbu vyvolanou mechanismem funkce a upozornil, že i na chemickou skladbu má vliv funkce. Architektonické uspořádání základní hmoty v chrupavce žeberní *ammocoeta* podmiňuje elasticitu při ohybu. Rovněž v ploutevních paprscích 9½ cm dlouhého *ammocoeta* popisuje Schaffer architekturu chrupavkové základní hmoty a vysvětluje její vznik mechanismem funkce. Konečně se zmiňuje Schaffer o konstrukci chrupavkové hlavičky humeru žáby. Jsou v ní territoria buněčná a substance interteritoriální v trajektorielním uspořádání. Odporučuje studovati tento objekt polarisačním mikroskopem. Gebhardt sdílí náhled Schafferův a klade váhu na poměry napětí, vyvolané růstem.

Vlastní pozorování.

Ve sklovité chrupavce embryonální i dětské pozorují se dva typy dělení buněčného: dělení buňěk do skupin a dělení buněk do řad. Upozornil jsem na to již ve své práci „*O histologii a histogenesi chrupavky*“ r. 1902[1]) a podrobněji zabýval jsem se tímto zjevem v pozdější práci z r. 1911,[2]) kde pokusil jsem se o výklad, proč nově vznikající buňky chrupavkové se někdy seskupují do okrouhlých skupin, jindy do podélných řad. Materiálem, na kterém jsem tuto otázku studoval, byly mi věsmes chrupavky lidské; chrupavek jiných obratlovců použil jsem jen ke srovnání. Z lidských chrupavek zvláště se hodí chrupavka patelly a chrupavka žeberní z periody embryonální, dětské i pozdější. Výsledek mých zkušeností možno shrnouti takto: V sklovité chrupavce patelly a žeber nelze poznati v první polovici embryonálního života žádného určitého uspořádání buněk. Tyto jsou tvaru oválního, polygonálního, vřetenovitého nebo jehlancovitého a jsou nepravi-

[1]) O. Srdínko: Studie o histologii a histogenesi chrupavky II. Rozpr. čes. akademie, tř. II. roč. XI., č. 23, v Praze 1902; Beitrag zur Histologie und Histogenie des Knorpels. Anat. Anz. B. XXII., No. 20 u. 21, pag. 442. 1903.

[2]) O Srdínko: O významu isogenetických skupin a řad buněčných v hyalinní chrupavce. Věstník kr. č. společnosti nauk v Praze, 1912. (Předloženo 24. listopadu 1911.)

delně rozloženy v základní hmotě na řezech, jakýmkoliv směrem vedených. Teprve v druhé polovici embryonálního života začnou se objevovati v chrupavce patellární i žeberní buňky vřetenovité nebo jehlancovité orientované svými dlouhými osami stejnosměrně. Tím vznikají zony nebo pásy (pruhy) stejnosměrně uložených buněk, mezi kterými jsou buňky neorientované. V dětském věku jest tato orientace buněk do zon ještě patrnější, takže možno na př. na řezu horizontálním z chrupavky žeberní rozeznati určitě pět vrstev lišících se směrem uložení buněk. Povrchní vrstva pod perichondriem přední plochy chrupavky žeberní má buňky uložené rovnoběžně s povrchem. V druhé vrstvě směr dlouhých os buněk se křižuje, jsa šikmo postaven k perichondriu a ve vrstvě třetí, nejširší, jsou buňky uloženy dlouhou osou kolmo na povrch chrupavky, směřujíce od přední plochy žebra k zadní. Směrem k zadní ploše přechází tato třetí vrstva s orientovanými buňkami do vrstvy uspořádané jako vrstva druhá a za touto následuje tenká vrstva buněk rovnoběžných s povrchem, jako tomu jest ve vrstvě první pod perichondriem přední plochy chrupavky žeberní. V chrupavce patellarní nelze sice rozeznati určité vrstvy, jako v chrupavce žeberní, orientace buněk do pásu vedle buněk nepravidelně uložených jest však i zde zřejmě patrna.

Na orientaci buněk v tkáních podpůrných mají vliv zevní mechanické síly, zvláště tah a tlak. Pro vazivo to bylo dokázáno pokusy K a n e k o v ými a L e v y h o, provedenými v laboratoři R o u x o v ě. Tlak obyčejně jest odporem podložky, na kterou působí, měněn v sílu, která působí kolmo na směr primárního tlaku a rovná se tahu, působícímu rovnoběžně s podložkou. Jakmile začne na embryonální tkáň působiti zevní síla, začně orientování buněk, které se protahují a ukládají dlouhou osou do směru tahu nebo kolmo na směr tlaku. Nejnápadněji jest to viděti v ligamentech a šlachách. Rovněž jest patrno z přehledu literárního, že zevní síly mechanické mají velký vliv na organisaci tkáně kostní. Jest otázkou, zda také chrupavka reaguje nějakým způsobem na zevní mechanické vlivy. Existuje-li tato reakce, jeví se na buňkách či také na základní hmotě a na které součásti základní hmoty?

V chrupavce patelly ke konci embryonálního života, zvláště však po porodu jeví se tak význačná orientace buněk do řad, že na první pohled vznikne u pozorovatele domněnka, že vznik řad má souvislost se silami, které na tkáň onu působí. Dokud končetiny dolní se značněji nepohybují t. j. asi do 7. měsíce těhotenství, nejsou v chrupavce patelly buňky význačně orientovány. Od 7. měsíce však, když plod vykonává čilejší pohyby, začínají se v patelle objevovati buňky protáhlé; po narození však, jakoby na povel, orientují se buňky do zon a dělí se do řad, nechávajíce mezi zonami skupiny buněk nepravidelně roztroušených. Rovněž v chrupavce žeberní objevuje se od 5. měsíce skrovná orientace, která jest v 7. měsíci určitější, v chrupavce žeberní dětské však velmi typická. I to svědčí o souvislosti s pohyby jednak respiračními jednak celkovými, které v druhé polovině

plod vykonává (i respirační)[1]) a které ovšem po porodu nabudou veliké intensity.

Tyto mnou popsané řady buněčné odvozuji od působení zevních sil, hlavně tahu a tlaku. Kde takové význačné síly působí, nastává orientace buněk chrupavkových, kde síly nepůsobí nebo se ruší, jsou skupiny buněčné nepravidelné.

Řady buněk chrupavkových nalézáme ještě jindy v chrupavce a sice před ossifikací. Řady tyto se však liší od dříve popsaných řad; dlouhá osa chrupavkových buněk v řadách, vyskytujících se při ossifikaci, stojí kolmo na dlouhou osu řady buněčné, t. j. buňky jsou protáhlé napříč řady buněčné, kdežto v případech mnou popisovaných jsou buňky protáhlé ve směru řady buněčné. Řady prvního druhu popsal R e n a u t[2]) a připisuje jim význam, že způsobují růst chrupavky do délky, kdežto dělením buněk chrupavkových do skupin roste chrupavka interstitiálně ve všech směrech. R e n a u t o v o pozorování vztahuje se na materiál od *Raja batis*. Podle jeho údajů množí se buňky až do ossifikace do skupin, teprve před ossifikací se vytvoří řady. R e n a u t tedy vidí rozdíl mezi chrupavkou s buňkami ve skupinách a chrupavkou s buňkami v řadách (možno říci ossifikačních) v tom, že tato chrupavka jest schopna růsti v jednom směru (do délky), ona ve všech směrech. O další příčině těchto dvou druhů dělení buněk se R e n a u t nevyslovuje. Pokud lze souhlasiti s R e n a u t e m, vyslovil jsem se v publikaci z r. 1911. To však podotýkám poznovu, že řady ossifikační nejsou identické s řadami, které se vyskytují v chrupavce mnohdy velmi dávno před ossifikací, mnohdy pak v chrupavce, která vůbec k ossifikací se nedostane. Orientace buněk v těchto řadách jest vyvolána pravděpodobně zevními silami.

To, co právě ve stručnosti jsem předeslal, zjistil jsem na praeparatech barvených obvyklou methodou haematoxylinem a eosinem. Praeparáty tyto dávají vystoupiti hlavně buňkám, kdežto diffusně se barvící základní hmota tak nevystupuje do popředí. Praeparáty tyto možno nazvati positivními pro buňky, negativními (negativy) však vzhledem k základní hmotě. V posuzování otázky, jaký odpor klade chrupavka zevním silám, však větší význam zajisté přísluší základní hmotě než měkkým buňkám. Odpor onen zajisté jest nesen hmotou mezibuněčnou a vliv zevních sil na chrupavku jest hledati v první řadě v uspořádání základní hmoty a organisace čili architektura chrupavky, existuje-li, je jistě patrna v první řadě na základní hmotě. Uložení buněk, ačkoliv tyto jsou primární součástkou chrupavky, jest sice ukazatelem směru sil, které v chrupavce účinkují (buňky dělí se všeobecně snáze ve směru menšího odporu), není však hlavním výrazem architektury, nýbrž pouze zjevem doprovodným.

[1]) B. Dědek: K otázce vývoje dýchacích pohybů u lidského plodu. Lékařské rozhledy roč. XX., sešit 2. 1913.

[2]) J. R e n a u t: Sur les groupes isogéniques des éléments cellulaires du cartilage. Comptes rendus del' Acad. de sciences. Paris 1878.

Úlohou mou tedy bylo hledati jinou methodu pro zhotovení praeparátů a sice takovou, kterou by základní hmota vystoupila do popředí. Podařilo se mi pak zvláště pro lidskou chrupavku žeberní docíliti spolehlivé methody, kterou přesvědčivým způsobem učiníme ve jmenované chrupavce patrným celý system trámců (na řezech) resp. plotének (ve skutečnosti) hmoty mezibuněčné, jak to přiložené obrazce znázorňují.

Materiál a methoda.

K práci této použil jsem výhradně sklovité chrupavky člověka. Největší počet řezů zhotoven z chrupavky žeberní nejrůznějšího stáří: z první polovice embryonálního vývoje, z druhé polovice, z věku dětského od novorozeného dítěte až do dokončení růstu skeletu i z chrupavky dospělého člověka od 20. r. až do nejpozdějšího stáří (79. r.). Kromě toho studoval jsem embryonální chrupavku na dlouhých i krátkých částech kostry zárodků lidských od konce 3 měsíce až k porodu.

Řezy z každé chrupavky žeberní zhotovil jsem vždy ve třech hlavních směrech: příčně k dlouhé ose žebra neboli sagittální, podélné neboli horizontální a plošné neboli frontální. Chrupavku vzal jsem vždy z větší vzdálenosti od spojení jejího s kostěným žebrem, nejméně 1 cm, protože bližší partie chrupavky u kosti jsou skladby úchylné od normálního typu. Abych také seznal, jak se chová chrupavka žeberní v partiích kosti bližších, zhotovil jsem řezy ve všech třech nahoře udaných směrech z okrsku přechodu chrupavky v kost, kterou ovšem dříve jsem odvápnil.

Embryonální chrupavku stopoval jsem vzhledem k její architektuře v dlouhých i krátkých částech dolní i horní končetiny, z nichž zhotovil jsem serie a na žebrech, z nichž rovněž zhotovil jsem serie ve všech třech směrech.

Objekty byly fixovány různými methodami. Embrya lidská byla fixována buď v sublimátu neb v tekutině C a r n o y o v ě nebo ve formalínu. Chrupavky dětské a dospělé jsem fixoval 10% formalinem po 7–14 dnů a pak je přímo řezal nebo dříve vypral po 1–2 dny ve vodě, pak vložil do 80% líhu a řezal. Menší částečky chrupavky řezal jsem mikrotomem na zmrznutí, větší kousky, které bylo možno bez zalití sevříti ve svorce mikrotomu, mikrotomem obyčejným; embrya jsem řezal v celoidinu.

Řezy z chrupavky fixované formalínem jsem barvil buď haematoxilinem a eosinem, buď podle H a n s e n a směsí kyseliny pikrové s kyselým fuchsínem, nebo konečně směsí B i o n d i o v o u (kyselý fuchsin + methylová zeleň + orange g).

Barvivem B i o n d i o v ý m barvil se vždy asi 10 minut (také déle), po opláchnutí půlpctní kyselinou octovou se řezy vyperou v 70% líhu, pak v absol. líhu se odvodní, vloží na 2 min. do origánského oleje a uloží se do pryskyřice. Výsledek barvení jest tento: základní hmota chrupavková se barví celkem červeně, buňky zeleně, krev, kde přichází, oranžově; po-

drobnosti a odchylky uvedeny budou při popisu jednotlivých praeparátů. Zbarvením tímto vystoupí základní hmota na praeparátech velice do popředí, takže na první ráz v každém praeparátu lze říci, zda trámce základní hmoty mají nějakou orientaci či nikoliv.

Jak jest známo z prací Mörnerových a Schmiedebergových, obsahuje základní hmota chrupavky hyalinní tyto chemické komponenty.: 1) kollagen, 2. sloučeniny kyseliny chondroitinosírové s bílkovinami, hlavně ve formě chondromukoidů a 3. v dospělé chrupavce albuminoid, který v mladé chrupavce chybí. Tyto chemické součástky chrupavky hleděl dokázati histologicky F. C. C. Hansen, což se mu specifickým barvením také zdařilo. Všeobecné resultáty Hansenovy jsou shrnuty v těchto bodech:

1. Základní hmota chrupavky obsahuje směs látek basofilních a acidofilních. 2. Látky tyto mohou se navzájem zastírati (maskovati). 3. Obyčejně v chrupavce dobře konservované (alkoholem, formalín-alkoholem, sublimatem, Zenkerovou tekutinou) dominuje basofilie zvláště uvnitř chrupavky; blíže k povrchu basofilie ubývá. 4. Acidofilie jest význačna při povrchu chrupavky a kolem cev. Uvnitř chrupavky jest acidofilie menší, ba mnohdy jsou hmoty acidofilní úplně zastřeny basofilními. 5. Některé okrsky základní hmoty jsou současně basofilní i acidofilní. 6. Basofilie i acidofilie a jich rozdělení v základní hmotě chrupavky jsou v určitém vztahu k buňkám a k různým strukturám základní hmoty. 7. Možno docíliti různými methodami, že základní hmota svou basofilii ztratí a stane se silně acidofilní; toho se docílí demaskováním hmot acidofilních. Hansen hleděl specifickým barvením zjistiti, které části základní hmoty jsou basofilní a které acidofilní. Basofilie podle něho jest založena na přítomnosti kyseliny chondroitinosírové; odstraníme-li tuto na př. roztokem louhu, ztrácejí řezy z chrupavky úplně svoji basofilii. Nejlépe zachová se basofilie chrupavky alkoholem. Kyselina chondroitinosírová a její sloučeniny jsou nejvíce obsaženy v interfibrillární základní neboli tmelové hmotě. Jako basofilního barviva užil Hansen hlavně methylenové modře. Acidofilní jest v základní hmotě chrupavkové kollagen hlavně ve tvaru fibrill. Barví se při upotřebení směsi Hansenovy (kyselina pikrová a kyselý fuchsin)[1]) intensivně červeně. Skládá se tedy základní hmota typické hyalinní chrupavky z kollagenního vaziva, differencovaného z větší části ve fibrilly, které jsou uloženy v hmotě tmelové, která jest amorfní směs různých bílkovin, chovající kyselinu chondroitinosírovou. Kollagen v chrupavce jest buď nemaskovaný, který se barví na obyčejných basofilních řezech červeně a maskovaný, který se zbarví teprve po odmaskování totiž po odstranění kyseliny chondroitinosírové resp. po zrušení nebo uvolnění jejího s kollagenem.

---

[1]) Detailní popis methody Hansenovy nalézá se v jeho práci v „Anatomische Hefte" I. Abt. 27. B. 1905, pag. 618 a 619.

Z uvedeného vysvítá, že praeparáty směsí Biondiovou barvené mladé žeberní chrupavky člověka vykazují silnou acidofilii, kdežto basofilie vystupuje pouze za určitých okolností, na které bude při popisu poukázáno.

Pro posuzování otázky architektury chrupavky jest sice užitečno znáti chemickou skladbu základní hmoty její, nepadá však tak podle mého soudu na váhu, je-li hmota, která zevním silám má klásti odpor basofilní neb acidofilní. Ostatně vysvitne později, že basofilie a acidofilie ve své intensitě se v základní hmotě chrupavkové mění, takže okrsky základní hmoty mohou z acidofilie přejíti do basofilie.

Praeparáty barvené přesně methodou Hansenovou neobjevily se tak instruktivními pro studium architektury, jako praeparáty fixované formalínem a barvené směsi Biondiovou.

V případech, kde řezy nechtěly se dosti intensivně zbarviti červeně, stačilo vložiti je na nějakou dobu (1—2 hodin) do 1—2% roztoku louhu sodnatého nebo draselnatého a žádané červené zbarvení základní hmoty se opět dostavilo.

Při popisu praeparatu bude třeba, vzhledem k uvedeným výsledkům prací Hansenových, míti na paměti, že každý trámec nebo ploténka základní hmoty, které se jeví na mých praeparátech červeně zbarveny, mohou při barvení jinou methodou okázati vedle součástí acidofilních také součásti basofilní. Pro nás však tvoří oboje součásti jediný, nosný trámec a různá chemická skladba, zjevená specifickou tinktoriální reakcí, nepadá tak na váhu. V chrupavce pouze buňky nenesou tělem svým žádného zevního tlaku nebo tahu, veškeré okrsky základní hmoty, třeba různé chemické skladby, jsou částkami spletitého systemu nosného. Pokud částky tohoto systému slouží za oporu zevním silám a pokud snad mají jiný účel (ochranu buněk, cev), to jsou otázky, které čekají v budoucnosti na rozřešení. Možno však tvrditi, že hlavním úkolem onoho systému nosného co celku jest klásti odpor zevním silám, kdežto ony jiné účele jsou dojista významu podružného.

Architektura rostová a funkcionální.

Není pochyby, že nelze všecky zjevy v základní hmotě chrupavkové, které poukazují na orientaci buněk a trámců základní hmoty, považovati za strukturu funkcionální. To platí zejména pro chrupavku embryonální a pro chrupavku při ossifikaci. V těch určitě jsou zjištěné pravidelnosti v uspořádání buněk a základní hmoty vyvolány poměry rostovými, takže právem Schaffer mluví o architektuře rostové.

Jest tedy třeba činiti rozdíl při posuzování struktury základní hmoty a mluviti zvláště o

1. architektuře chrupavky embryonální,
2. architektuře chrupavky při ossifikaci,
3. architektuře chrupavky permanentní.

Složky, kterými může architektura býti vyjádřena, jsou: 1. orientace buněk, 2. orientace trámců základní hmoty a 3. orientace fibrill v základní hmotě.

Ač hlavním předmětem dosavádních mých výzkumů byla architektura chrupavky permanentní, mohu i k prvním dvěma otázkám uvésti již nyní některé poznámky.

Architektura rostová.

Architektury rostové dotkl se poprvé r. 1880 Kassovitz a sice u kosti. Konstatoval, že v prvních stadiích růstu kosti lze těžko mluviti o zvláštní architektuře, kterou by bylo možno případně nazvati architekturou funkční, že však existuje pro každou část skeletu zvláštní architektura rostová. Podle Kassovitze nelze odvozovati architekturu dospělých kostí od struktury foetálních a dětských kostí.

Schaffer aplikoval architekturu rostovou také pro chrupavku a sice pro periodu ossifikační. Zvápenatělé centrum v chrupavce některé dlouhé části skeletu má takovou architekturu rostovou: jest to na průřezu kruhovitá, ve skutečnosti kulovitá skupina větších buněk chrupavkových, mezi kterými jest uspořádána základní hmota ve tvaru koncentrických kulovitých misek (dutých koulí), které jsou spojeny navzájem radiárními příčkami. Protože pak buňky v onom centru se zvětšují i příslušné jim dutinky, vzniká tlak celého útvaru na okolí, jehož následek jest, že buňky nad centrem a pod centrem zvápenatělým jsou tlačeny do ploch kulovitých, takže na průřezu vidíme buňky v obloukovitých řadách, při čemž konvexita oblouků směřuje ku koncům části skeletu.

Podávám na tab. I. obr. 1. příklad takové architektury zvápenatělého centra v metatarsu lidského zárodku. Zvápenatělé centrum rozšířilo se právě až k povrchu střední části diafysy, kde vytvořen jest již kostěný plášť. Architektura rostová patrna jest do značné vzdálenosti směrem k oběma koncům obloukovitými řadami buněčnými a příslušnými oblouky základní hmoty, které jsou spojeny radiárními příčkami.

Úplně shodné obrazy u zárodků lidských nalezneme nejen ve všech základech dlouhých částí skeletu, nýbrž i v kostech krátkých jako na př. v karpálních, tarsálních, v obratlech, v hlavičkách žeber a j.

Další osudy a přeměny této architektury podal Romeis na obrazech, vzatých z ossifikace tibiae a kalkaneu králíka a vyložil je na základě schemat v textu publikace obsažených jako architekturu funkcionální. Schaffer odmítl tento výklad Romeisův a označil popsané uspořádání základní hmoty jako architekturu rostovou. Pro posouzení důvodů k oběma výkladům musím se přidati ku stanovisku Schaffrovu a považuji tudíž s určitou pravidelností uspořádanou základní hmotu chrupavky při ossifikaci aspoň z největší části za projev účinku vnitřních sil, růstem vyvolaných. Tím ovšem není vyloučeno, že v chrupavce embryonální může býti zjištěna také architektura funkcionální a to zvláště

v chrupavce embryonální, která má ještě daleko do ossifikace, nebo která se nalézá v místech, kde ossifikace vůbec nenastoupí, nýbrž kde v dospělosti najdeme chrupavku permanentní.

Kromě architektury rostové při ossifikaci možno poukázati ještě na pravidelné uspořádání buněk chrupavkových v zcela mladých, zakladajících se chrupavkách, na př. žeberních. Na příčném řezu předním koncem žebra u embrya lidského 3 měs. starého (tab. II. obr. 3) vidíme na povrchu pod perichondriem často řadu mladých buněk, které jsou tvaru kubického a jichž basis je rovnoběžná s povrchem chrupavky, příčné hranice pak jednotlivých buněk stojí kolmo na povrchu; základní hmota není dosud vytvořena neb jest zastoupena pouze oním rozhraničením buněk. Někdy nejen první řada buněk pod perichondriem jest takto pravidelná, někdy i druhá a třetí a teprve ve čtvrté a v dalších vrstvách ona pravidelnost mizí. Příčný řez takovým embryonálním koncem žebra připomíná velice na příčný řez vegetačním vrcholem rostlin. I tento případ sluší zařaditi mezi uspořádání buněk a hmoty mezibuněčné, růstem vyvolané.

Romeis a Mollier soudí, že architektura kosti má již v embryonální chrupavce své předchůdce a že tedy jest vztah mezi architekturou kosti a chrupavky. Konstruktivní princip, který jest v chrupavce, jest podle autorů těchto převzat tkání kostní a dále vyvinut. Schaffer rovněž zamítá tento názor hlavně z toho důvodu, že funkcionální struktura kosti vystupuje teprve v pozdní době, kdy chrupavkovitý skelet jest již dávno úplně rozrušen.

Podle mých zkušeností leží asi pravda uprostřed, což v následujícím dokládám. Trámce základní hmoty chrupavkové ve vzdálenosti asi 2 *cm* od hranice ossifikační v žebru dítěte 1 r. starého jsou orientovány od přední plochy žebra směrem k zadní ploše, tedy na příč dlouhé osy žebra. Blížíme-li se k čáře ossifikační, mizí orientace trámců a vytvořuje se nepravidelné houbovité uspořádání, které přejde dále v uložení sloupců základní hmoty chrupavkové podélné s osou žebra; tyto podélné sloupce široké spojeny jsou napříč četnými, tenkými příčkami. Část těchto podélných sloupců základní hmoty v čáře ossifikační jest i s buňkami ossifikační tkání rozrušena, druhá část přechází do kosti, tvoříc podélné osy, kolem nichž se tkáň kostní ukládá. Na obr. 2. (tab. I.) viděti jest dole onu houbovitou zonu chrupavky (acidofilní), která přechází do sloupcové zony (basofilní, vyjímajíc některé temnější pruhy na obrazci, které se zbarvily stejně acidofilně jako zona houbovitá) a zbytky sloupců basofilních lze stopovati jako bílé pruhy uvnitř mladé kosti, která má průběh trámců rovnoběžný s osou žebra. Z uvedeného tedy jest patrno, že se v chrupavce při ossifikaci připravuje v zoně sloupcové taková orientace základní hmoty, jaká jest potom v mladé kosti. Vzhledem ke sporu Romeis-Schaffrovu dlužno tedy vytknouti, že jest tedy určitý vztah mezi chrupavkou chystající se k ossifikaci a mladou právě vytvořenou kostí. Oběma jest společný podélný směr trámců základní hmoty.

Architektura funkcionální v permanentní chrupavce.

Přistoupím nyní k popisu praeparátů, zhotovených methodou nahoře udanou z chrupavek žeberních lidských různého stáří. Popisu žeberní chrupavky dětské a dospělé předešlu dvě stadia embryonální.

Embryo člověka ze 4. měs.

Na řezech vedených horizontálně a paralellně s dlouhou osou žebra vidíme mezi předním a zadním perichondriem červeně zbarvenou základní hmotu, v níž nalézají se dutinky chrupavkových buněk různého tvaru, ovální, kulaté, protáhlé, vřetenovité, kuželovité i nepravidelné. (Tab. II. obr. 4.) Pruhy základní hmoty, které jsou mezi dutinkami, jsou nestejně široké a nejeví žádnou orientaci právě tak, jako dlouhé osy protáhlých buněk uloženy jsou v nejrůznějších směrech. Toliko buňky nejbližší perichondriu (tato partie na obrazci není přítomna) jakož i základní hmota kol nich jeví orientaci rovnoběžnou s povrchem.

Embryo člověka ze 7. měs.

Řez horizontální chrupavkou žeberní tohoto stadia liší se značně od předcházejícího. Na obou stranách pod perichondriem předním i zadním jest zřetelně vyznačena úzká vrstva buněk i trámců paralellních s perichondriem. Za touto vrstvou následuje rovněž ne příliš široká vrstva, kde trámce tvoří nepravidelnou síť struktury houbovité; trámce perichondria jsou uchýleny od perichondria pod ostrým úhlem a dlouhé osy buněk neb skupin buněčných rovněž. Ostatní celý prostor mezi posledními dvěma vrstvami vyplněn jest chrupavkou, ve které zcela patrna jest orientace trámců základní hmoty od předního perichondria k zadnímu, tedy kolmo na povrch; rovněž tak orientovány jsou dlouhé osy dutinek buněčných, obsahujících jeden neb více buněk v řadě. Část této prostřední vrstvy zobrazena jest na tab. II. obr. 5.

Dítě $1^1/_4$ roku staré.

Obr. 6. na tab. II. znázorňuje část sagittálního (příčného) řezu žeberní chrupavkou dítěte $1^1/_4$ r. starého. Pod perichondriem přední plochy žeberní (na obrazci nahoře) i zadní plochy (na obr. dole) viděti pruhy přibližně rovnoběžné s povrchem; vrstvička tato jest velice úzká. Pak nahoře i dole následuje vrstva s pruhy nepravidelnými, takže vzniká struktura houbovitá. Široká prostřední část obsahuje pruhy zřejmě orientované od přední plochy k zadní, které jsou spojeny šikmými příčkami. Dutinky mezi pruhy jsou vyplněny řadami chrupavkových buněk.

Dítě 2 r. staré.

Obr. 7. na tab. II. znázorňuje část horizontálního řezu (podélného) chrupavkou žeberní dítěte 2 r. starého při značném zvětšení. Na obrazci

znázorněna vrstva pod perichondriem přední plochy chrupavky žeberní, pak druhá vrstva houbovitá a začátek prostřední vrstvy. Jest viděti, že trámce první vrstvy, čím vzdálenější jsou od povrchu, tím více zaujímají šikmý směr ku povrchu, takže pak vrstva první přejde do vrstvy druhé, jejíž trámce obyčejně do mírného oblouku prohnuté, uzavírají s povrchem přibližně úhel 45°. Na přechodu z druhé vrstvy do třetí zahýbají trámce do směru kolmého na povrch přední plochy chrupavky.

Dítě 5 r. staré.

Obr. 8. tab. III. znázorňuje prostřední zonu horizontálního řezu chrupavkou žeberní dítěte 5 r. starého. Typická orientace trámců této vrstvy, směřujících od přední plochy žeberní k zadní, jest při tomto silnějším zvětšení velmi patrna. V trámcích znatelny jsou tu a tam kollagenní fibrilly, které mají směr společný s trámci.

Podotknouti dlužno, že toto typické uspořádání základní hmoty chrupavkové v žebrech dětských jest na některých místech porušeno cevami. V okolí cev totiž do určité vzdálenosti jest obyčejně základní hmota uspořádána houbovitě i když céva probíhá třetí t. j. prostřední vrstvou. Druhá změna v okolí cev týká se reakce základní hmoty, která projevuje více basofilie a barví se proto na řezech po použití barviva Biondiova zeleně, jako těla buněk.

Dítě 2 r. staré.

Obr. 9. tab. III. znázorňuje prostřední část frontálního řezu žeberní chrupavkou dítěte 2 r. starého. Řezy frontální t. j. rovnoběžné s přední a zadní plochou žebra jsou velmi poučné, neboť nám osvětlují blíže architekturu prostřední vrstvy chrupavkové, která se jeví na řezech sagittálních a horizontálních jako pruhy orientované od přední plochy žeberní k zadní, které ohraničují podlouhlé dutiny, orientované stejně jako trámce. Na řezu frontálním zasáhneme ony dutiny příčně a tu vidíme, že rozměry tohoto příčného průřezu dutin jsou menší než jsme viděli na řezech sagittálních a horizontálních a že většina dutin jest na řezu frontálním obrysů kulatých neb vejčitých. Pruhy základní hmoty kolem dutin tvoří následkem toho v prostřední vrstvě strukturu na řezu houbovitou, která se nelíší od vrstvy druhé. Řezy frontální střední vrstvou typické žeberní chrupavky jsou tak charakteristické, že je každý na prvý pohled pozná od řezu sagittálního a horizontálního.

Dítě 10 r. staré.

Obr. 10. na tab. III. vzat jest z příčného neboli sagittálního řezu žeberní chrupavkou 10 r. starého dítěte a znázorňuje hoření okraj hrany žebra, kde přední plocha přechází do zadní plochy. Uspořádání pruhů základní hmoty není třeba popisovati, jest dobře na obrázku patrno. Orientace dutin buněčných a trámců ve směru od předního perichondria

k zadnímu jest i v hraně žeberní patrna, ač není takového stupně, jako na další části řezu.

Člověk 79 r. starý.

Zkoumal jsem dále řezy všemi třemi směry vedené ze žeberní chrupavky člověka starého 19, 21, 26, 29, 46, 54 a 79 roků a shledal jsem, že místa složená z typické chrupavky, t. j. místa bez cev a bez přeměny asbestové, shodují se s nálezy popsanými v chrupavce dětské. Toliko snad v množství základní hmoty jest ten rozdíl, že v starších chrupavkách bývají dutinky buněčné menší a méně četné a trámce základní hmoty širší. Jako doklad slouží obraz 11. na tab. III., vzatý z prostřední vrstvy horizontálního řezu žeberní chrupavkou člověka 79 r. starého.

Uložení fibrill.

Dosud všímali jsem si orientace toliko dutin buněčných (event. buněk) a trámců základní hmoty. Zbývá všímnouti si směru kollagenních fibrill. Fibrilly na preaparátech našich jsou patrny již v chrupavce dětské a v starších chrupavkách jsou tím patrnější a sice hlavně ve vrstvě prostřední, s trámci na povrch chrupavky kolmými. Ve vrstvě houbovité lze je viděti jen tu a tam jako velejemné pletivo, ve vrstvě povrchní, rovnoběžné s povrchem, jsem je nenašel. Tloušťka jejich jest různá, což zvláště jest dobře patrno na řezech frontálních. Obr. 12. na tab. III. znázorňuje nám fibrilly podélně zasažené ve prostřední vrstvě žeberní chrupavky člověka 26 r. starého na řezu horizontálním. Reakce fibrill jest různá, ba i reakce jediné fibrilly v celé její délce není často stejná; část fibrilly jeví acidofilii, část basofilii. Jindy jest fibrilla současně acidofilní i basofilní, z čehož plyne její zbarvení do červeno-modra. Část základní hmoty kolem buněk jest bez fibrill a jeví basofilii. Z obrazce jest patrno, že směr fibrill se shoduje se směrem trámců prostřední vrstvy, že tedy i fibrilly jsou orientovány od předního perichondria k ploše zadní. Stejnou orientaci fibrill ukazují řezy vedené příčně (sagittálně) žeberní chrupavkou.

Jinak však tomu jest na řezech frontálních. Na těch zasáhneme většinu fibrill příčně jako body různé velikosti, ba někde vidíme celé svazečky fibrill příčně říznuté. Takovou část frontálního řezu prostřední vrstvou chrupavky žeberní člověka 26 r. starého vidíme znázorněnu na obr. 13. tab. III. I zde okolí buněk, basofilní v menší míře než samotny buňky, jest fibrill prosto.

Poznamenal jsem nahoře, že v okolí cev a tam, kde se objevuje asbestová přeměna chrupavky žeberní, bývá v prostřední vrstvě místo podélné orientace struktura houbovitá s basofilií. V takových místech také orientace fibrill bývá jiná; fibrilly uloženy jsou nejčastěji radiárně od cévy; v místech asbestově přeměněných jsou fibrilly mnohdy paralellní s dlouhou osou žebra, jindy šikmé k perichondriu, jindy jest orientace obyčejná, totiž napříč dlouhé osy žebra.

Podaný popis řezů žeberními chrupavkami nejrůznějšího stáří slouží za podklad schematického obrazu na tab. IV., kterým znázorněna jest architektura typické žeberní chrupavky, tedy chrupavky hyalinní v takových místech, kde není v ní cev ani jiných přeměn. Schema obsahuje jednak přední plochu žeberní chrupavky s perichondriem, jednak 5 řezných ploch. Z těch tři náležejí řezům příčným neboli sagittálním (tyto jsou kolmé k dlouhé ose žebra), jedna plocha patří řezu horizontálnímu a jedna plocha řezu frontálnímu, vedenému od hoření hrany žebra doprostřed chrupavky směrem k hraně dolejší. Schema znázorňuje nám tedy vnitřní architekturu základní hmoty v části skeletu, složené z hyalinní chrupavky, kterážto část má tvar prutu se dvou stran zmačknutého (na příčném průřezu tedy tvar přibližně elipsovitý); takové části představují nám po většině chrupavky žeberní, spojující kosti žeber se sternem.

Určitá architektura základní hmoty v sklovité chrupavce lidských žeber jest tedy dokázána. Všude tam, kde přítomna jest typická chrupavka hyalinní bez cev a bez sekundárních přeměn, s popsanou architekturou se určitě shledáme. Řezy frontální následkem toho se na první pohled liší od řezů sagittálních a horizontálních. Nastává otázka, jak tuto architekturu vyložiti. Proč největší část žeberní chrupavky, totiž ona mohutná prostřední zona má orientovány dutiny buněčné a ploténky základní hmoty napříč dlouhé osy žebra v rovině horizontální? Proč není orientace ona provedena s dlouhou osou žebra paralellně nebo proč ploténky a dutiny nesměřují od hoření hrany k dolení?

Různé okolnosti nasvědčují tomu, že popsanou architekturu sluší považovati z velké části za funkcionální.

Pro tento názor svědčí nejprvé vývoj a časový vznik onoho uspořádání v chrupavce. V prvních měsících embryonálního vývoje nevidíme v chrupavce žeberní oné architektury. Ta se začíná jeviti teprve v druhé periodě embryonální, takže již v 7. měsíci ji lze zjistiti. V chrupavce dětské pak zvláště jest patrna a zachová se v permanentní chrupavce žeberní až do pozdního stáří. Vylíčený časový rozvoj dá se uvésti ve spojení jedině s funkcí těchto části skeletních. Funkce pak vzniká, jakmile vznikají pohyby a to buď celého těla, buď pohyby dýchací. Pohyby celého těla nabývají u plodu v druhé polovině nitroděložního života značného rozsahu, kromě toho však tvrdí Ahlfeld, Dědek a j., že i pohyby dýchací již v této době se začínají jeviti. Po porodu ovšem obojí pohyby nabudou velké intensity. Kromě toho však chrupavka žeberní může býti ve funkci aniž vůbec nějaké pohyby tělo vykonává. Taková funkce vzniká, je-li chrupavka nucena spolunésti tlak ostatních částí výše uložených, když na př. tělo leží na jednom boku nebo na zádech neb na přední ploše hrudníku. Tato funkce nastupuje také, kdykoliv zevní síla tlačí kdekoliv na hrudník. A právě tato funkce vyžaduje největšího odporu, jaký žeberní chrupavka musí vyvinout, aby zevní sílu překonala. Jest třeba přihlédnouti poněkud blíže k takovému případu. Každý pár žeber, upevněný na pateři a spojený chrupavkami

s kostí hrudní, možno považovati za jeden nosný systém, který tvoří klenutý oblouk kolem dutiny hrudní. Klenba tato určena jest k tomu, aby zadržela veškeré nárazy a tlaky zevního světa, směřující do dutiny hrudní. Mezi nejčastější síly takové, takto na klenbu hrudníku působící, náleží tlak vznikající při horizontální poloze těla. Tlak takový způsobí nepatrné zmáčknutí klenbového oblouku, ostatní tlak se přenese do oblouku klenbového, kterým jest nesen. Právě pak jako konstrukce klenby na př. z cihel jest břemenem na ni tlačícím, stlačována tak, že jedna cihla, uložená na příč klenby styčnou plochou tlačí na obě cihly sousední, dlužno si představiti, že jeden příčný (sagittální) řez klenby žeberní tlačí na příčné řezy nebo segmenty sousední. Tlak přenesený tedy působí ve směru dlouhé osy žebra tak, že na každý myšlený příčný segment žeberní chrupavky působí tlak z jedné i druhé strany. Na takový často se opakující tlak, který hledí chrupavku v dlouhé ose jednak stlačiti, jednak ohnouti, reaguje základní hmota takovým uložením trámců, že tyto jsou orientovány kolmo na tlak. A skutečně tomu tak jest, jak tato theoretická úvaha vyžaduje. Orientace trámců základní hmoty chrupavkové jest provedena kolmo na dlouhou osu žebra, v kteréžto ose uložen jest směr tlaku v chrupavce. Tím však ještě není vysvětleno úplně uložení trámců. Orientace kolmo na dlouhou osu chrupavky žeberní mohla by býti realisována také uložením trámců od hoření hrany žebra k dolení, tedy v rovině vertikální; proč však tomu u žebra tak není a proč jest sice orientace kolmo na dlouhou osu žebra avšak v rovině horizontální? Uvažujeme-li o této otázce, dojdeme k poznání, že pevnost klenby proti zevnímu tlaku jest větší při orientaci trámců v rovině horizontální než by byla při orientaci v rovině frontální (vertikální). V posledním případě by byla ohebnost chrupavky větší a opačně pevnost její na ohnutí menší a proto vyklenutí její do dutiny hrudní neb na venek snazší.

Proti ohnutí v rovině frontální jest chrupavka žeberní dosti vyzbrojena svým tvarem, na průřezu protáhle oválním. Tyč neb ploténka takového příčného průřezu se „přes hranu" hoření neb dolení nesnadno ohýbá. Snazší by bylo ohnutí přes plochu přední neb zadní tedy v rovině horizontální; tu snadnost zmenšuje orientace trámců základní hmoty v rovině horizontální. Jest tedy pro ochranu obsahu dutiny hrudníkové výhodnější orientace, jaká skutečně existuje t. j. kolmo na dlouhou osu žebra avšak v rovině horizontální. Připustiti ovšem dlužno, že touto větší výhodností není horizontální orientace vysvětlena do té míry, jako jsme se pokusili vysvětliti zevní silou orientaci napříč dlouhé osy. Netřeba dokládati, že orientace základní hmoty rovnoběžně s dlouhou osou by činila chrupavku ještě ve větší míře ohebnější, kromě toho však tlak, šířící se v chrupavce ve směru dlouhé osy, takovou orientaci zabraňuje.

Dosud věnovali jsme pozornost pouze prostřední vrstvě žeberní chrupavky a vysvětlili jsme její architekturu funkcionálně. Druhá vrstva, která kolkolem obklopuje vrstvu prostřední, má strukturu houbovitou. Vzhledem k okolnosti, že trámce této vrstvy namnoze jsou oblouky, které navzájem

se křižujíce, dávají vznik oné houbovité vrstvě, považuji tuto vrstvu za elastickou vložku, jejíž trámce působí jako pružná péra, zmírňujíce náhlý účinek zevních sil a přenášejíce zevní sílu na nosnou vrstvu prostřední. Jest možno, že na vytvoření této vrstvy mají vliv síly, které se snaží chrupavku kroutiti kol její dlouhé osy.

Zevní vrstva pod perichondriem nemá podle našeho soudu strukturu funkcionální, sloužíc toliko spolu s perichondriem ke spojení chrupavky žeberní s tkání okolní.

Ještě jednu duležitou okolnost dlužno připomenouti: Popsaná architektura vyskytuje se v žeberní chrupavce zřejmě oploštělé; čím více jest chrupavka žeberní ploténkou s určitě vyznačenou přední a zadní plochou a s hoření a dolení hranou, tím určitěji v ní najdeme popsanou architekturu. Čím více se příčný (sagittální) průřez chrupavkou blíží kruhu, tím více jest ona struktura neurčitou.

Nevěnoval jsem při hořejším výkladu žádné pozornosti silám, kterými kontrakce jednotlivých svalů účinkují na chrupavku. Podle mého mínění nejsou tyto síly v jednotlivých bodech, kde na povrch chrupavky tahem působí, takové intensity, aby mohly na celkovou architekturu chrupavky zvláště v její prostřední vrstvě míti vliv. Jmenované síly mohou vyvolati určité struktury pouze v perichondriu a snad v povrchní vrstvě chrupavky. Vnitřek chrupavky žeberní dlužno považovati za celek, na jejíž strukturní orientaci účinkuje toliko stále se opakující síla, jakou jest stlačování chrupavky při dýchání a pak tlak ze zevnějška na klenbu hrudní.

Podle podaného výkladu jest chrupavka žeberní nejvíce vyzbrojena na tlak, účinkující na ni od konců v dlouhé její ose od hranic její v kostí žeberní a hrudní. Za to lze dedukovati, že na tah v dlouhé ose jest slabě zařízena. Je-li tomu tak, musí býti štěpitelnost chrupavky napříč dlouhé osy její velmi značná, kdežto paralelně s osou dlouhou žádná neb nepatrná. Budu míti v dalším pojednání příležitost popsati pokusy se štěpitelností chrupavky žeberní, které naši theoretickou dedukci úplně v praxi potvrzují.

Shrnu-li výsledky dosavádních svých pozorování o architektuře hyalinní chrupavky v přehled, zjistil jsem:

1. V typické hyalinní chrupavce žeberní u člověka nalézáme vždy totéž určité uspořádání základní hmoty i buněk. Uspořádání toto jest shodné v každém věku člověka a objevuje se již v posledních měsících doby embryonální.

2. Uspořádání základní hmoty na řezech horizontálních a sagittálních (u těchto nepřihlížejíc k hoření a dolení hraně) jest obdobné a záleží z 5 vrstev: dvou povrchních s trámci paralellními s perichondriem, dvou následujících struktury houbovité a jedné vrstvy prostřední, největší část tloušťky chrupavky žeberní zaujímající, s hlavními trámci orientovanými kolmo na obě perichondria. Na řezech frontálních viděti jest, že ony trámce jsou stěny dutin, protáhlých ve směru dorsoventrálním.

3. Buňky a skupiny buněčné jsou ukazateli orientace základní hmoty, stavíce se svými dlouhými osami paralellně s trámci ve vrstvě první a třetí a jsouce nepravidelně rozloženy ve vrstvě druhé, houbovité. Stejně se skupinami buněčnými chovají se dutinky pro buňky.

4. Fibrilly v základní hmotě mají v prostřední vrstvě stejný směr jako trámce základní hmoty. Zastihneme je tudíž v této vrstvě na řezech sagittálních a horizontálních v průběhu podélném na řezech frontálních příčně jako body.

5. Popsaná architektura v žeberní chrupavce člověka dá se z velké části vyložiti funkcionálně. Orientace základní hmoty i buněk v prostřední vrstvě napříč dlouhé osy klenby žeberní jest způsobena jednak zevním tlakem, kterému klenba hrudníku jest vysazena, jednak stlačováním chrupavky při dýchacích pohybech. Prostřední tato vrstva jest vlastní nosnou vrstvou v chrupavce žeberní a stavba její jest obdobná, jako vidíme v klenbách zdiva. Vrstva houbovitá působí jako elastická vložka při přenášení sil na vrstvu nosnou a má snad vztah se silami, které se snaží žebro kroutiti kol dlouhé osy. Zevní vrstva sprostředkuje spojení s perichondriem a okolními tkáněmi.

6. Typická tato architektura jest porušena všude v okolí cev, do chrupavky vnikajících a pak do určité vzdálenosti od čáry ossifikační.

7. Při pochodu ossifikačním vyskytuje se rovněž určité uspořádání základní hmoty chrupavkové, které však aspoň v prvních stadiích nelze vyložiti funkcionálně, nýbrž silami vnitřními, růstem ossifikačního centra vyvolanými. Architekturu onu možno proto nazvati rostovou, jak S c h a f f e r učinil.

8. V embryonální chrupavce žeberní v posledních měsících může býti vedle sebe přítomna i architektura funkcionální i architektura rostová. Tato na předním konci již zkostnatělé části žebra, kde chrupavka se nalézá v processu ossifikačním, ona v určité vzdálenosti od čáry ossifikační. Podobně tomu jest v chrupavce dětské.

9. Pronesený výklad o funkcionální architektuře hyalinní chrupavky žeberní u člověka jest třeba podepříti biologickým pokusem. Dokud ten se nezdaří, nutno se spokojiti s pokusem fysikálním o štepitelnosti této tkáně. Pokusy tyto, o nichž podám zprávu co nejdříve, potvrzují hoření výklad.

10. Otázkou zůstává, zda popsaná architektura se získává funkcí při vývoji ontogenetickém či zda některé její složky byly získány fylogenií a nyní se pouze dědí.

11. Mezi konstruktivním principem chrupavky žeberní a kosti žeberní jest určitá shoda; v chrupavce žeberní jest v prostřední vrstvě orientace základní hmoty horizontální a v kosti nalézáme horizontální ploténky.

VYSVĚTLENÍ K TABULKÁM.

Tab. I,

Obr. 1. Sagittální řez diaphysou III. metatarsu lidského embrya ze 3. měsíce. Reichert ok. 2, obj. 4.

Obr. 2. Horizontální řez z ossifikační čáry žebra dítěte 2 r. starého. Dole houbovitá trámčina základní hmoty chrupavkové, uprostřed zona basofilní s podélnými trámci základní hmoty, nahoře mladá kost s trámci rovněž podélnými. Reichert ok. 4, obj. 4.

Tab. II.

Obr. 3. Část příčného řezu chrupavkou žeberní 10. žebra při konci sternálním zárodku lidského ze 3. měs. Reichert ok. 4, obj. 8a.

Obr. 4. Část horizontálního řezu (prostřední zona) žeberní chrupavkou lidského embrya ze 4. měs. Reichert ok. 4, obj. 8a.

Obr. 5. Část horizontálního řezu (zona prostřední) žeberní chrupavkou lidského embrya ze 7. měs. Reichert ok. 4, obj. 8a.

Obr. 6. Část sagittálního řezu žeberní chrupavkou dítěte $1^1/_4$ r. starého. Reichert ok. 2, obj. 4.

Obr. 7. Část horizontálního řezu žeberní chrupavkou dítěte 2 r. starého. Reichert ok. 4, obj. 8a.

Tab. III.

Obr. 8. Část prostřední zony horizontálního řezu žeberní chrupavkou dítěte 5 r. starého. Reichert ok. 3, obj. 8a.

Obr. 9. Část prostřední zony frontálního řezu žeberní chrupavkou dítěte 2 r. starého. Reichert ok. 3, obj. 8a.

Obr. 10. Sagittální řez hoření hranou žeberní chrupavky dítěte 10 r. starého. Reichert ok. 3, obj. 4.

Obr. 11. Část prostřední zony horizontálního řezu žeberní chrupavkou člověka 79 r. starého. Reichert ok. 3, obj. 8a.

Obr. 12. Fibrilly v prostřední zoně horizontálního řezu žeberní chrupavkou člověka 26. r. starého. Zeiss komp. okul. 6, obj. 2 *mm.*

Obr. 13. Fibrilly v prostřední zoně frontálního řezu žeberní chrupavkou člověka 26. r. starého. Zeiss komp. okul. 6, obj. 2 *mm.*

Tab. IV.

Obr. 14. Schematický obrazec architektury v sklovité žeberní chrupavce člověka. Podle návrhu autorova nakreslil p. M. U. Dr. A. Půlkrabek, sek. lékař kr. z. nalezince v Praze.

LITERATURA.

Albert E.: Einführung in das Studium der Architektur der Röhrenknochen. Wien 1900.
— Architektura kosti stehenní u člověka. Čes. akademie. 1900.
— Die Architektur der Tibia. Wiener mediz. Wochenschr. 1900.
— Die Architektur des menschl. Talus. Wiener klin. Rundschau. 1900.
— Die Architektur des menschl. Fersenbeines. Wiener mediz. Presse. 1900.
— Architektura kosti ramenní u člověka. Čas. čes. lék. 1900.
— Die Architektur d. m. Ulna. Wiener kl. Rundschau 1900.
Aeby: Zur Architektur der Spongiosa.
Centralblatt für die mediz. Wissensch. 1873.
K. Bardeleben: Beiträge zur Anatomie der Wirbelsäule. Jena 1874.
Bigelov: The true neck of the femur. The Boston med. and surg. Journ. 1875.
Bourgery: Traite complet de l' anatomie de l'homme. Paris 1832.
Bütschli O.: Zur Kenntnis der Teilungsprocesse der Knorpelzellen. Zeitschr. f. wiss, Zoll. Bd. 29. 1877.
— Untersuchungen über Strukturen. Mit Atlas. Leipzig. 1898.
Culmann: Die graphische Statik. Zürich 1866.
Dwight: On the „True Neck". Journ. of Anat. and Physiol. 1875.
Ebner: Über den feineren Bau der Knochensubstanz. Wiener Sitzgsber. 1875.
— Untersuch. üb. d. Ursachen der Anisotropie organisierter Substanzen. Leipzig 1882.
Engel J.: Über die Gesetze der Knochenentwickelung. Sitzb. d. Wiener Acad. d. Wiss. VII. B. 1851.
Friedländer: Beitrag z. Kenntnis der Architektur spongiöser Knochen. Anat. Hefte 1904.
Gerbhardt: Über den funktionellen Bau einiger Zähne. Roux Arch. Bd. X. 1901.
— Ueber funktionell wichtige Anordnungsweisen der gröbern und feineren Bauelemente des Wirbeltierknochens. Roux Archiv 1901. Bd. XII. S. 191.
Hammer J. A.: Ueber den feineren Bau der Gelenke I. Die Gelenkmembran II. Der Gelenkknorpel. Arch. f. m. Anat. Bd. 43. 1894.
Hansen F. C. C.: Eine zuverlässige Bindegewebsfärbung. Anat. Anz. Bd. 15. 1898.
— Über die Genese eigener Bindegewebssubstanzen. An. Anz. Bd. 16. 1899.
— Untersuchungen über die Gruppe der Bindesubstanzen I. Hyal. Knorpel. Anat. Hefte. 1905.
Hultkrantz J. W.: Das Ellenbogengelenk und seine Mechanik 1897.
Humphry G. M.: A treatise of the human skeleton. Cambridge. 1858.
Kaneko J.: Künstliche Erzeugung von Margines falciformes und Arcus tendinei. Arch. Entwicklungsmech. XXIII. B. 3. H. 1904.
Kassowitz M.: Die normale Ossification u. die Erkrankungen etc. Mediz. Jahrbücher 1879. Ibid. 1880.
Langerhans R.: Beiträge zur Architektur der Spongiosa. Virchows Archiv 61. B.
Lankester E.: Skeletotrophie Tissues and coxal glands etc. Quarterby journal of Mikroskop. scien. Vol. XXIV.
Lewy O.: Ueber den Einfluss von Zug auf die Bildung faserigen Bindegewebes. Arch. f. Entwickl. Med. B. XVIII, 2. H. 1904.
Meyer G. H.: Die Architektur der Spongiosa. Arch. f. Anat., Physiologie u. wissensch. Medizin v. Reichert-Du Bois-Reymond 1867.
— Die Statik u. Mechanik des menschl. Knochengerüstes. Leipzig 1873.

Meyer G. H.: Der Mechanismus der Kniescheibe. Arch. f. Anat. u. Physiologie. Anat. Abt. 1880 pag. 280.

Meyer H v.: Zur genaueren Kenntnis der Subst. spong. der Knochen. Festschrift f. Bischoff. Stuttgart 1882. Separatabdr. aus den Beiträgen zur Biologie.

Mollier: Ueber Knochenentwickelung. Sitzber. d. Ges. f. Morphol. u. Physiol. München 1910. 10. Januar.

Morawitz P: Zur Kenntnis der Knorpelkapseln and Chondrinballen des hyalinen Knorpels. Anat. Anz. 60. B. 1902.

Mörner C. Th.: Histochemische Beobachtungen über die hyalinen Grundsubstanzen. des Trachealknorpels. Z. f. physiol. Chemie. Bd. 12. 1888. Chemische Studien über den Trachealknorpel. Skandinav. Arch. f. Physiologie. Bd. 1. 1889.

Morochowetz L.: Zur Histochemie des Bindegewebes. Verh. d. naturhist.-med. Vereins in Heidelberg. I. B. 1876.

Prenant A.: Traité d'histologie. T. I., pag. 650.

Ranvier L.: Traité technique d'histologie. 2ème ed. Paris 1889.

Rasumowsky W.: Beitrag zur Architektonik des Fußskelettes. Inter. Monatschr. f. Anat. u. Phys. Bd. VI. 1889.

Renaut J.: Sur les groupes isogéniques des éléments cellulaire du cartilage. Compt rendus de l'Acad. de sciences 1878.

— Traité d'histologie practique. T. I, p. 389 — 399.

— Sur la bande articulaire, la formation cloissonante et la substance chondrochromatique des cartilages diarthrodiaux. Compt. rendus. Tome 104. 1887.

Romeis: Die Architektur des Knorpels vor der Osteogenese und in der ersten Zeit derselben. Arch. Entw. Mech. Bd. 31. 1911, p. 387-422.

Rosenthal O.: Über die Veränderungen des Knorpels vor der Verknöcherung. Inaug. Dissert Berlin 1875.

Roux: Struktur eines hoch differenzierten bindegewebigen Organs. Arch. f. Anat. u. Physiol. Anat. Abt. 1883.

Schaffer: Die Verknöcherung des Unterkierfers u. die Metaplasiefrage. Arch. f. mikrosk. Anat. B. 32. 1888. pag. 374.

— Ueber das knorpelige Skelett von Ammocoetes branchialis etc. Zeitschr. Wiss. Zool. Bd. 61. 1896, p. 62.

— Ueber den feineren Bau u. Entwickelung des Knorpelgewebes. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 70. 1901.

— Knorpelkapseln und Chondrioballen. Anat. Anz. 1903.

— Über den feineren Bau und die Entwickelung des Knorpelgewebes und über verwandte Formen der Stützsubstanzen. Zeitschr. f. wiss. Zoologie. 80. B. 1906.

— Trajektorielle Strukturen im Knorpel. Vehandl. d. anat. Gess. 1911. Ergänzheft z. XXXVIII. Bd.

Schmiedeberg O.: Ueber die chemische Zusammensetzung des Knorpels. Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmak. Bd. 28. 1891.

Schmiedt. R.: Vergleichend anat. Studien über den mechanischen Bau der Knochen und seine Vererbung. Leipzig 1898.

Solger B: Ueber die Schrumpferscheinungen am hyalinen Knorpelgewebe des Menschen und deren Beziehung zu den Fibrillen. Arch. f. m. Anat. Bd. 31. 1888

— Über die Architektur der Stützsubstanzen. Leipzig 1892.

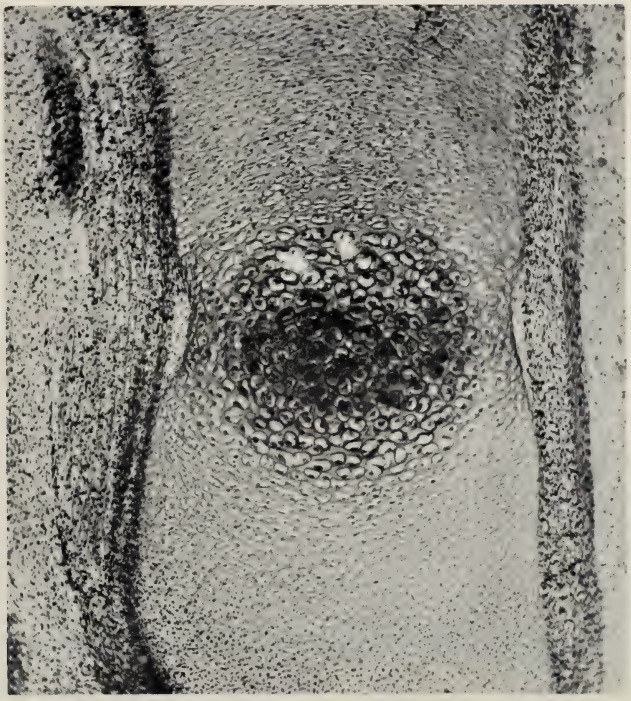
— Der gegenwärtige Stand der Lehre von der Knochenarchitektur. Untersuch. zur Naturlehre d. Menschen u. d. Tiere. 16. Bd. 1896.

— Spongiosaarchitektur in einer geheilten Fraktur des Oberschenkelhalses und in einem Pirogoffschen Stumpfe. Deutsche mediz. Wochenschr. 1901.

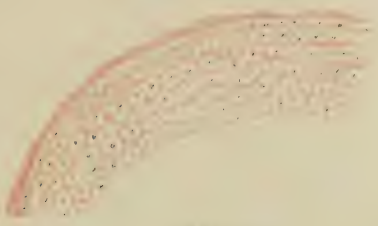
Studnička F. K.: Über einige Pseudostrukturen der Grundsubstanz des Hyalinknorpels. Arch. f. m. A. 66. B. 1905.

Srdínko O.: O významu isogenetických skupin a řad buněčných v hyalinní chrupavce. Věstník král. čes. společ. nauk. 1911.
Strelzoff: Über die Histogenese des Knochens. Unters. aus d. pathol. Inst. zu Zürich. Eberth. I. H. 1873.
Thoma R.: Synostosis suturae sagit. cranii. Ein Beitrag zur Histomechanik des Skeletts etc. Virchows Archiv 1907.
Thürler: Studien über die Funktion des fibrosen Gewebes. Inaug Dissertation. Zürich 1884.
Triepel: Über mechanische Strukturen. Anat. Anz. 23. Bd. 1903.
— Einführung in die physikalische Anatomie. I-II. Th. 1902, III. Th. 1908.
Ward F. O.: Outlines of human Osteology. London 1838.
Wolff J.: Über die innere Architektur der Knochen, Virchows Arch. 1870 Bd. L. S. 389.
— Das Gesetz der Transformation der Knochen. Berlin 1892.
— Die Lehre von der funktionellen Knochengestalt. Virchows Arch. 1899. Bd. CLV. S. 307, 309.
— Über die normale u. pathol. Architektur der Knochen. Arch. f. Physiologie. Jahrg. 1901. Suppl. B.
Wolfermann: Beitrag z. Kenntnis der Architektur der Knochen. Reicherts u. Du Bois-Reymonds Archiv 1872.
Wolters: Zur Kenntnis der Grundsubstanzen und der Saftbahnen des Knorpels. A. f. m. A. Bd. 37. 1891.
Zaaijer: De Architektur der benderen. Nederlandsch Tijdschrift voor geneeskunde 1871.

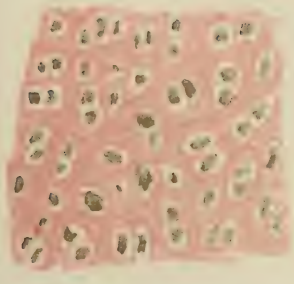
Obr. 1.



Obr. 2.



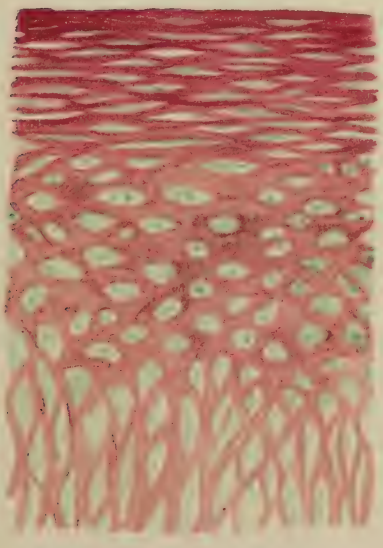
Obr. 3.



Obr. 4.

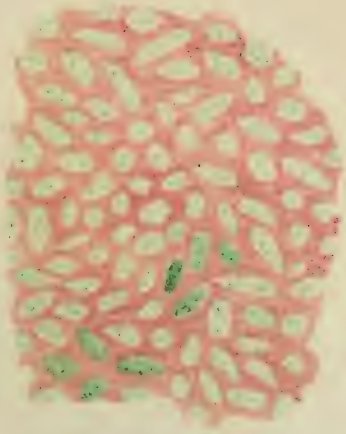
Obr. 5.

Obr. 6.

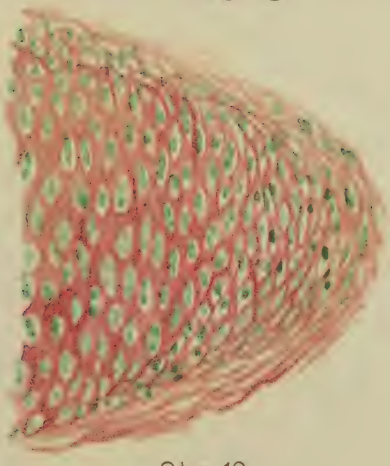


Obr. 7.

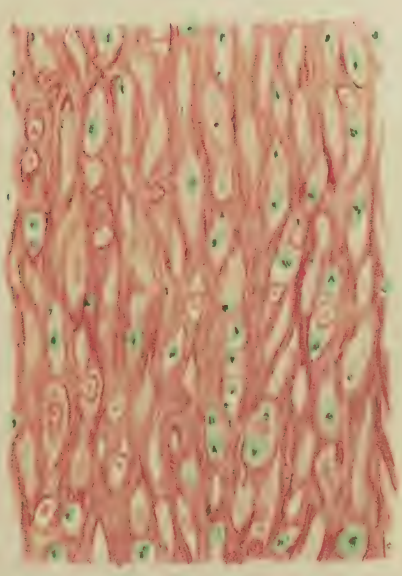
Obr. 8.



Obr. 9.

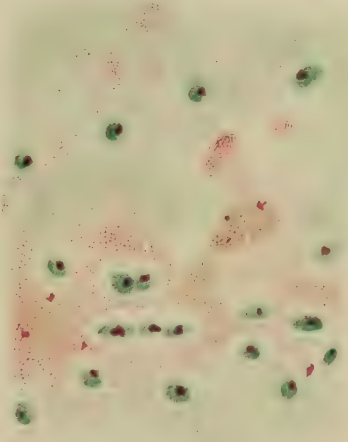


Obr. 10.



Obr. 11.

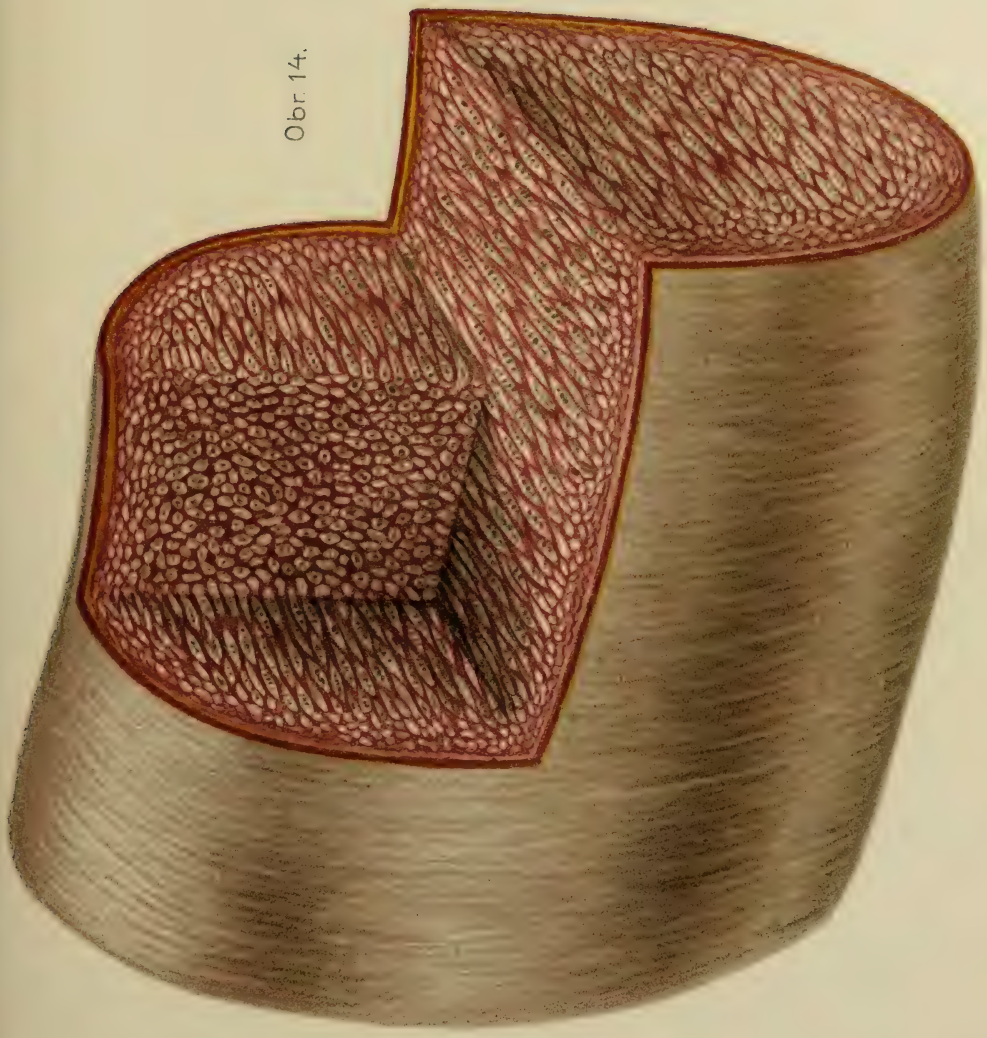
Obr. 12.



Obr. 13.

F. Netušil ad natur. delin. „UNIE" PRAHA.

Rozpravy II. třídy České Akademie roč. 1914 čís. 11



Obr. 14.

Dr A. Půlkrabek delin.

„UNIE" PRAHA.

O zobecněném cylindroidu.

Napsal Dr. **Václav Simandl,**

assistent české techniky v Brně.

Předloženo dne 30. ledna 1914.

Obsah:

I. O zobecněném páru osovém lineárního komplexu.

1. Společné konjugované poláry vzhledem k dané ploše 2. stupně $\mathfrak{A}^2$ a k danému lineárnímu komplexu.
2. Speciální případy.

II. O zobecněném cylindroidu.

3. Zobecněný cylindroid jest sborcená plocha stupně čtvrtého se dvěma dvojnými řídicími přímkami.
4. Sestrojení zobecněného cylindroidu. Dvě význačné involuce přímek na něm.
5. Případ, kdy absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ jest plochou sborcenou.
6. Sestrojení rovinného řezu plochy P^4 a jejího obrysu při promítání centrálném.
7. Speciální polohy základní kongruence komplexového svazku S_1 ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$.
8. Zobecněný cylindroid pro absolutní plochu degenerovanou.

Z theorie svazku lineárních komplexů jest známo, že geometrické místo os lineárních komplexů svazku jest sborcená plocha stupně třetího cylindroid a někde též Plückerův konoid zvaná. V této práci budeme studovati syntheticky projektivné zobecnění tohoto geometrického místa, to jest budeme studovati geometrické místo t. ř. zobecněných párů osových lineárních komplexů daného svazku. Zobecněným párem osovým daného lineárního komplexu rozumíme společný pár konjugovaných polár daného komplexu a určité pevné plochy stupně druhého, kterou nazývati budeme plochou absolutní, neboť když ji nahradíme absolutní neboli kulovou kružnicí v nekonečnu bude náš zobecněný pár osový pře-

cházeti v obyčejnou osu lin. komplexu a k ní kolmou přímku v rovině nekonečně vzdálené. Takto definován jest zobecněný pár osový v knize: Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie (II, 1) pag. 348., kde dále též jest stanovena rovnice plochy „zobecněných párů osových" lineárních komplexů daného svazku, rovnice t. ř. zobecněného cylindroidu.

I.

O zobecněném páru osovém lineárního komplexu.

1. *Společné konjugované poláry vzhledem k dané ploše 2. stupně a k danému lineárnímu komplexu.*

Dána buď plocha 2. stupně $\mathfrak{A}^2$ a lineární komplex Γ. Polaritou plochy $\mathfrak{A}^2$ přísluší komplexu Γ určitý lineární komplex Γ'. Oba lineární komplexy Γ a Γ' pronikají se v určité lineární kongruenci, jejíž řídicí přímky o a o' jsou konjugovánými polárami ku $\mathfrak{A}^2$ i ku Γ. Pár přímek těchto budeme nazývati zobecněným párem osovým komplexu Γ vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ jako ploše absolutní. V případě obecném existuje k danému lineárnímu komplexu jeden zobecněný pár osový, neb snadno lze nahlédnouti, že kdyby existovalo jich více, že by se komplex Γ stotožnil s komplexem Γ', neb dva lineární komplexy mohou míti pouze jednu lineární kngruenci společnou, aniž by se stotožnily. Nastal by tu případ, kdy lineární komplex jest vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantním a o tom pojednáme zvlášť. Máme pak větu:

V případě obecném existuje jen jeden pár konjugovaných polár vzhledem k dané ploše 2. stupně $\mathfrak{A}^2$ a k danému lineárnímu komplexu Γ. Pár ten nazývati budeme zobecněným párem osovým komplexu Γ vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ jako ploše absolutní.

U sborcené plochy 2. stupně (srv. Sturm: Liniengeometrie I., pag. 101) vytíná lineární komplex z každého systému jejich přímek dvě přímky tak, že dostáváme prostorový čtyřúhelník. Pár diagonál tohoto prostorového čtyřúhelníka jest patrně párem konjugovaných polár i vzhledem k naší ploše 2. stupně i lineárnímu komplexu a tedy zobecněným párem osovým.

Proveďme konstruktivní úlohu:

Lineární komplex jest dán dvěma páry konjugovaných polár, jest sestrojiti jeho zobecněný pár osový vzhledem k dané absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$.

Označme si páry daných konjugovaných polár daného lineárního komplexu a, α; b, β; kteréžto přímky, jak z nauky o lineárních komplexech známo, musí býti voleny tak, aby tvořily hyperboloidickou čtveřinu přímek. Buďte a', α'; b', β' postupně jejich konj. poláry vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Sestrojme si dále obě transversály čtyř přímek: a, α, a', α' a označme

si je r, r'. Podobně transversály přímek: b, β, b', β', buďtež s, s'. Páry transversál r, r'; s, s'; jsou opět páry konj. polár absolutní plochy, neboť každý tento pár jest párem transversál dvou párů konj. polár absolutní plochy. Zároveň vidíme, že přímky r, r', s, s' jsou čtyřmi přímkami komplexovými a tudíž jejich obě společné transversály o, o' lze pokládati za pár konj. polár daného lineárního komplexu. Avšak též tvoří přímky o, o' pár konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$ a to zase z důvodu, že jsou transversálami dvou párů konj. polár této plochy, totiž párů r, r'; s, s'. I vidíme, že pár přímek o, o' jest hledaným zobecněným párem osovým našeho lineárního komplexu.

Nahradíme-li plochu absolutní $\mathfrak{A}^2$ kulovou kružnicí v nekonečnu, dostáváme osu našeho lineárního komplexu jako orthogonální transversálu orthogonálních transversál párů mimoběžných přímek a, α; b, β.

2. *Speciální případy.*

Uvažujme ten speciální případ, že jeden systém přímek absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ náleží lineárnímu komplexu Γ, jehož zobecněný pár osový hledáme. V druhém systému přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ budou tyto tvořiti obyčejnou involuci, jejíž páry jsou páry konjugovaných polár komplexu Γ a dvě přímky samodružné a, b jsou dvěma přímkami náležejícími komplexu Γ. Vidíme ihned z toho, že komplex Γ jest polárně invariantním vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, neboť páry jeho konj. polár v druhém systému přímek $\mathfrak{A}^2$ polaritou samy v sebe přecházejí. Dokážeme větu:

Je-li lineární komplex Γ ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantním, tu má ∞^2 zobecněných párů osových, které vyplňují lineární kongruenci, jejímiž řídicími přímkami jsou samodružné přímky a, b involuce konjugovaných polár komplexu, kterou tento v jednom systému přímek $\mathfrak{A}^2$ indukuje.

Libovolné přímce p lineární kongruence $[a\ b]$ jakožto spojnici bodů A, B na přímkách a, b odpovídá jako konjugovaná polára plochy $\mathfrak{A}^2$ přímka p' jako průsečnice rovin α, β přímkami a, b. Roviny α, β, jsou patrně tečnými rovinami plochy $\mathfrak{A}^2$ v bodech A, B; zároveň pak jsou tyto body nullovými body oněch rovin v nullovém systému komplexu Γ, neboť přímky a', b', ve kterých roviny α, β ještě $\mathfrak{A}^2$ protínají, jsou přímkami systému, který celý náleží komplexu. Jsou tedy p, p' též konjugovanými polárami Γ, jak bylo dokázati.

Že jiné páry konj. polár mimo polárně invariantní páry lineární kongruence $[a\ b]$ nemůžeme pokládati za zobecněné páry osové vyplývá z toho, že tečné roviny ku průsečíkům libovolné přímky s plochou $\mathfrak{A}^2$ nejsou nullovými rovinami těchto bodů.

Když nahradíme absolutní plochu $\mathfrak{A}^2$ kulovou kružnicí v nekonečnu, tu máme každý speciální lineární komplex, který má svou osu neboli řídicí přímku v rovině nekonečně vzdálené, polárně invariantním vzhledem

ku kulové kružnici. Naši lineární kongruenci ∞^2 os tohoto specielního komplexu representují zde jednak všecky přímky roviny nekonečně vzdálené, jednak prostorový svazek přímek procházejících polem řídicí přímky speciálního komplexu vzhledem ku kulové kružnici.

Všimněme si nyní speciálního případu, kdy $\mathfrak{A}^2$ degeneruje v kuželosečku nebo v kužel druhé třídy.

Dán budiž lineární komplex Γ a absolutní kuželosečka a^2 v rovině π. Budiž P nullový bod roviny π v nullovém systému definovaném komplexem Γ. Poláru bodu P vzhledem ku a^2 označme o. Jest pak speciální lineární komplex Γ' o řídicí přímce o polárním ku komplexu Γ vzhledem ku a^2. V polaritě kuželosečky a^2 odpovídají přímky rovinného pole π přímkám komplexu Γ, které v rovině π neleží. Přímkám komplexu Γ v π ležícím odpovídají zase přímky komplexu F' v π neležící.

Dán budiž lineární komplex Γ a absolutní kužel druhé třídy α^2 o vrcholu P. Budiž π nullová rovina bodu P v nullovém systému definovaném komplexem Γ. Poláru roviny π vzhledem ku α^2 označme o. Jest pak speciální lineární komplex Γ' o řídicí přímce o polárním ku komplexu Γ vzhledem ku α^2. V polaritě kužele α^2 odpovídají přímky prostorového svazku P přímkám komplexu Γ, které bodem P neprocházejí. Přímkám komplexu Γ bodem P procházejícím odpovídají zase přímky komplexu Γ' bodem P neprocházející.

Pronik komplexů Γ a Γ' jest lineární kongruence o řídicích přímkách o, o', kde o' jest ku o konjugovaná polára vzhledem ku komplexu Γ. Pár o, o' můžeme pak považovati za zobecněný pár osový komplexu Γ vzhledem ku naší degenerované ploše absolutní.

II.

O zobecněném cylindroidu.

3. *Zobecněný cylindroid jest sborcená plocha stupně čtvrtého se dvěma dvojnými řídicími přímkami.*

Buď dán svazek lineárních komplexů S_1 a buďte m, n řídicími přímkami základní lineární kongruence tohoto svazku. Zobecněné páry osové jednotlivých komplexů našeho svazku vyplňují určitou plochu sborcenou, kterou budeme nazývati zobecněným cylindroidem. Ježto každé dva páry konjugovaných polár téhož lineárního komplexu leží na hyperboloidu neboli tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, můžeme náš problém též takto formulovati.

Jest nalézti geometrické místo párů konjugovaných polár dané plochy $\mathfrak{A}^2$, které s danými dvěma mimoběžkami tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek.

Sestrojme ku přímkám m, n jich konj. poláry vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, ty si označme m', n'. Buďte pak p, q společné transversály čtyř mimoběžek m, n, m', n'. Tyto transversály p, q jsou patrně párem konjugovaných polár $\mathfrak{A}^2$, neboť jsou transversálami dvou párů konj. polár vzhledem ku této ploše. Na přímce p vytkněme si libovolný bod P a uvažujme svazek paprskový v rovině π tímto bodem a transversálou q proložené. Jednotlivé přímky tohoto svazku $(P\ \pi)$ stanoví s přímkami m, n sborcené hyperboloidy a tak dospějeme ku speciálnímu svazku těchto ploch prostorovým čtyřstranem procházejících, jehož strany tvoří m, n, q a transversála vedená bodem P ku mimoběžkám m, n, totiž přímka p. Přímky první soustavy těchto hyperboloidů jsou přímky lineární kongruence o řídicích přímkách p, q. Vytkněme si v této kongruenci svazek přímek $(P'\ \pi')$, který jest polárně konjugován svazku $(P\ \pi)$ vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. To jest vždy možno, ježto kongruence $[p, q]$ jest vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní. Přímky svazku $(P'\ \pi')$ náleží jednotlivě též hyperboloidům našeho speciálního svazku těchto ploch. Odpovídají si tudíž jednotlivé přímky svazku $(P\ \pi)$ a jednotlivé přímky svazku $(P'\ \pi')$ jako páry přímek, které s přímkami m, n tvoří hyperboloidickou čtveřinu. Avšak též přímkám svazku $(P\ \pi)$ možno přiřaditi přímky svazku $(P'\ \pi')$ jako konj. poláry vzhledem ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$. Máme tedy v rovině π' a o vrcholu P' dva projektivné svazky paprskové a dvěma koincidenčním paprskům této projektivity přísluší dva paprsky ve svazku $(P\ \pi)$. Tak máme stanoveny každým bodem P přímky p dvě přímky, z nichž každá se svou konj. polárou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ tvoří s přímkami m, n hyperboloidickou čtveřinu. Tyto naše dvě přímky bodem P protínejtež q v bodech Q', Q''. I přísluší tak každému bodu P na p dva body Q', Q'' na q. Zcela analogicky se dokáže že každému bodu na q přísluší dva body na p. Máme tedy bodové řady dvou mimoběžek p, q vztaženy k sobě určitou korrespondencí [2, 2] a výtvorem této korrespondence jest, jak známo, sborcená plochastupně čtvrtého o dvou řídicích přímkách dvojných, totiž přímkách p, q. Máme tedy věty:

Geometrické místo párů konjugovaných polár dané plochy 2. stupně $\mathfrak{A}^2$, které s libovolnými dvěma přímkami m, n tvoří hyperboloidickou čtveřinu, jest sborcená plocha $\mathfrak{P}^4$ stupně čtvrtého se dvěma řídicími dvojnými přímkami. Tyto dvojné přímky jsou společné transversály přímek m, n a jich konj. polár m', n' vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$.

Považujeme-li $\mathfrak{A}^2$ za absolutní plochu, možno plochu $\mathfrak{P}^4$ považovati za geometrické místo zobecněných párů osových lineárních komplexů svazku o základní kongruenci $[m, n]$, a nazvati zobecněným cylindroidem.

Specielním případem této definice zobecněného cylindroidu pro Plückerův konoid jest patrně definice tohoto jako geometrického místa vrcholových tečen všech orthogonálních hyperbolických paraboloidů danými dvěma mimoběžkami proložených.

4. *Sestrojení zobecněného cylindroidu. Dvě význačné involuce přímek na něm.*

Našemu zobecněnému cylindroidu P^4 náleží též páry přímek m, m'; n, n'; že jsou konjugovány vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, plyne z předpokladu, mimo to pak prvý pár jest párem konj. polár vzhledem ku speciálnímu lineárnímu komplexu našeho svazku o řídicí přímce m, druhý pak ku speciálnímu lineárnímu komplexu o řídicí přímce n.

Přistupme nyní ku konstrukci naší plochy. Buďte p, q opět společné transversály čtyř přímek m, n, m', n', Vytkněme si libovolnou přímku l lineární kongruence $[m, n]$, buď l' konj. polára této přímky vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Sestrojíme-li pak společné transversály r, s čtyř mimoběžek l, l', p, q, máme již dvě povrchové přímky naší plochy. To jest dokázati.

Že r, s jsou konj. polárami $\mathfrak{A}^2$, jest patrno z toho, že jsou společnými transversálami dvou párů konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$. Aby bylo patrno, že r, s jsou skutečně zobecněným párem osovým nějakého komplexu našeho svazku komplexového, zbývá dokázati, že čtyři přímky m, n, r, s leží na hyperboloidu. To však lze nahlédnouti z toho, že tyto čtyři přímky protínají vesměs tři přímky p, q, l, čili, že jsou obsaženy v druhém systému přímek hyperboloidu (p, q, l).

Ježto přímka l může nabýti ∞^2 různých poloh v lineární kongruenci $[m, n]$, zdálo by se, že tímto způsobem dospějeme ku ∞^2 párům přímek r, s, avšak ku ∞^1 polohám přímky l v prvním systému hyperboloidu (p, q, l) přísluší týž pár přímek r, s. Existuje tedy ∞^1 párů r, s jež vyplňují zobecněný cylindroid P^4.

Jelikož každý pár r, s s pevným párem přímek m, n leží na hyperboloidu, tu tvoří, jak z theorie ploch stupně čtvrtého o dvou dvojných přímkách známo [Sturm: Liniengeometrie III., pag. 106], tyto páry involuci na P^4, která má však čtyři samodružné elementy, ježto plocha P^4 jest nositelem rodu 1. S každou takovou involucí, jak známo, existuje „spojená involuce“, totiž souhrn párů přímek na ploše, které s kterýmkoli pevným párem přímek původní involuce tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek. Tak ku kterémukoli pevnému páru involuce přímek r, s existuje spojená involuce, které přísluší patrně páry m, n; m', n'; tuto involuci nazveme první význačnou involucí na zobecněném cylindroidu, involuci pak s touto první involucí spojenou, totiž involuci přímek r, s, ku které náleží též zejména páry m, m'; n n' nazveme druhou význačnou involucí na zobecněném cylindroidu. Páry této druhé význačné involuce jsou zároveň páry konjugovaných polár plochy $\mathfrak{A}^2$. Z toho ihned plyne, že samodružné čtyři přímky této involuce leží na ploše $\mathfrak{A}^2$, a že tyto čtyři přímky jsou částí proniku zobecněného cylindroidu s absolutní plochou.

U Plückerova konoidu tvoří patrně první involuci páry přímek od středu konoidu stejně vzdálených a ležících v rovinách osou konoidu proložených, které svírají stejné úhly s oběma přímkami konoidu středem

jeho procházejícími. Druhou význačnou involuci tvoří páry přímek skládající se z kterékoli přímky konoidu a přímky k ní kolmé v rovině nekonečně vzdálené, kteroužto rovinu nutno ke konoidu počítati, když k němu docházíme specialisací zobecněného cylindroidu P^4, když absolutní plochu $\mathfrak{A}^2$ nahradíme kulovou kružnicí v nekonečnu. Svrchu uvedená konstrukce párů přímek r, s zobecněného cylindroidu jest, jak snadno lze seznati, projektivním zobecněním z deskriptivní geometrie známé konstrukce přímek konoidu Plückerova jako os ku ose a ku kterékoli příčce dvou libovolných mimoběžek v prostoru.

5. *Případ, kdy absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ jest plochou sborcenou.*

Je-li absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ sborceným hyperboloidem, docházíme zejména ku některým jednoduchým konstruktivním výsledkům realitou přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ podmíněným a proto o tomto případě pojednáme zvlášť.

Buďte zase m, n řídicími přímkami základní kongruence komplexového svazku S_1. Tento komplexový svazek S_1 vytíná komplexovými přímkami jednotlivých svých lineárních komplexů z každého systému přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ páry obyčejné involuce J_1 a J_2 a páry těchto involucí témuž komplexu odpovídající jsou si projektivně přiřazeny. Každý pár se sobě přiřazeným párem tvoří prostorový čtyřúhelník a pár diagonál tohoto čtyřúhelníka jest párem přímek na zobecněném cylindroidu P^4 neb jest patrně i párem konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$ i lineárního komplexu svazku, který čtyřúhelník na $\mathfrak{A}^2$ vytíná.

Vytínejtež dva lineární komplexy Γ_1 a Γ_2 našeho komplexového svazku o základní kongruenci $[m, n]$ z přímek prvního systému plochy $\mathfrak{A}^2$ přímky a_1, b_1; a_2, b_2; z přímek pak druhého systému přímky a_1', b_1'; a_2', b_2'. První dva páry těchto přímek stanoví involuci J_1, druhé pak involuci J_2. Ukážeme, kterak z těchto párů přiřazených párů sestrojíme další svrchu uvedenou projektivností přiřazené páry obou involucí J_1 a J_2.

Buď a_3, b_3 libovolný pár involuce J_1, ku kterému jest sestrojiti projektivně přiřazený pár involuce J_2. Uvažujme libovolný bod P přímky a_3 (nebo též b_3), bodem tím jsou současně vytčeny dvě roviny, totiž tečná rovina π hyperboloidu $\mathfrak{A}^2$ v tomto bodě a rovina ϱ stanovená přímkou a_3 a transversálou r bodem P ku řídicím přímkám m, n vedenou. Vidíme, že proběhne-li bod P přímkou a_3, že dostaneme na této přímce jakožto ose dva projektivné svazky rovin π a rovin ϱ. Dvě samodružné roviny těchto projektivných svazků rovinových vytínají z přímek druhého systému plochy $\mathfrak{A}^2$ přímky a_3', b_3', jež v projektivnosti našich involucí odpovídají páru přímek a_3, b_3.

Dále dokážeme větu:

Každou projektivnost dvou libovolných obyčejných involucí přímek v různých přímkových systémech daného hyperboloidu lze pokládati za projektivnost indukovanou ně-

jakým svazkem lineárních komplexů. Svazků komplexových této vlastnosti existuje ∞^1.

Buďte a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 libovolné páry involuce v prvním systému a a_1' b_1'; a_2', b_2'; a_3', b_3' páry involuce v druhém systému hyperboloidu postupně projektivně prvním párům odpovídající. Buďte m_1 n_1 diagonálnými stranami prostorového čtyřúhelníka o stranách a_1 b_1; a_1', b_1', a m_2, n_2 diagonálnými stranami čtyřúhelníka a_2, b_2; a_2' b_2'. Dva svazky lineárních komplexů S_1' a S_1'' o základních lineárních kongruencích $[m_1\ n_1]$ a $[m_2\ n_2]$ stanoví komplexový lineární systém stupně třetího S_3, totiž systém všech ∞^3 lineárních komplexů procházejících komplexovými přímkami u, v, kde u, v jsou společnými transversálami čtyř přímek m_1, n_1, m_2, n_2. Uvažujme nyní libovolný lineární komplex Γ ze svazku všech komplexů procházejících přímkami a_3, a_3', u, v. Tímto komplexem Γ proložme svazek lineárních komplexů S_1''', kterýžto svazek obsahuje též komplexy ze svazků S_1' a S_1''. To provedeme způsobem analogickým úloze v geometrii bodové: „sestrojiti příčku dvou mimoběžek daným bodem procházející“. Komplex Γ stanoví se svazky komplexovými S_1' a S_1'' lineární systémy komplexů lineárních stupně druhého, jež si označíme S_2' a S_2''. Jelikož oba tyto lineární systémy stupně druhého nalézají se v témže lineárním systému stupně třetího S_3, jest pronikem jejich určitý systém komplexový stupně prvního a sice hledaný svazek S_1''', který vytíná na obou systémech přímek našeho hyperboloidu svrchu dané projektivné involuce.

Jelikož komplex Γ ve svazku lineárních komplexů stanoveném komplexovými přímkami a_3, a_3', u, v postupně může znamenati kterýkoli z ∞^1 komplexů tohoto svazku, vidíme, že existuje ∞^1 svazků S_1''' vlastnosti nahoře uvedené. Tím jest věta uvedená dokázána.

Dokážeme nyní větu:

Páry diagonál ∞^1 sborcených čtyřúhelníků na hyperboloidu, jejichž dvě a dvě protější strany si odpovídají jako přidružené páry dvou projektivních involucí v různých systémech přímkových hyperboloidu, vyplňují sborcenou plochu stupně čtvrtého P^4 se dvěma řídicími dvojnými přímkami. Tyto dvojné přímky tvoří pár diagonál sborceného čtyřúhelníka, jehož dvě a dvě protější strany tvoří páry samodružných přímek v obou involucích.

Výtvorem projektivních involucí J_1 a J_2 v obou systémech přímkových hyperboloidu $\mathfrak{P}^2$ jest prostorová křivka stupně čtvrtého prvního druhu. Označme si tuto křivku p^4. Kterákoli z obou našich involucí, budiž to na př. J_1, vytíná na p^4 určitou involutorní korrespondenci [2, 2]. Hledáme nyní geometrické místo přímek, které spojují odpovídající si body v této korrespondenci [2, 2] na p^4.

Buď l libovolná přímka v prostoru a λ libovolná rovina touto přímkou procházející. Rovina λ protíná p^4 ve čtyřech bodech, a poněvadž každému

z těchto bodů naší involutorní korrespondencí [2, 2] opět odpovídají dva body na p^4, odpovídá rovině λ celkem osm rovin λ'. A podobně kterékoli rovině λ' odpovídá osm rovin λ. Máme tedy ve svazku rovin o ose l určitou korrespondenci [8, 8], která má 16 rovin samodružných. Jelikož z těchto 16 samodružných rovin čtyři roviny připadají na čtyři koincidenční body involutorní korrespondonce [2, 2] na p^4, měli bychom dospěti ku sborcené ploše stupně 16—4 to jest dvanáctého. Tento stupeň plochy však se sníží na polovinu, t. j. 6, když uvážíme právě involutornost naší korrespondence [2, 2] a, že tudíž každou přímku této plochy bychom mohli považovati za dvojnásobnou. K této ploše náleží však též sborcený hyperboloid $\mathfrak{A}^2$, totiž jeho druhý systém přímek, který jest nositelem involuce J_2. Spojuje totiž každá přímka systému druhého dva body křivky p^4, které tam vytínají odpovídající jí přímky v systému prvním. Zbývá nám tudíž sborcená plocha P^4 stupně čtvrtého, jak bylo dokázati.

Plocha tato P^4 jsouc cylindroidem zobecněným, má, jak jsme dříve ukázali, dvě řídicí přímky dvojné. Tyto řídicí přímky sestrojíme, když sestrojíme obě transversály čtyř libovolných přímek na ploše, které ovšem nesmí tvořiti hyperboloidickou čtveřinu. Buďte x, y samodružné přímky involuce J_1 na $\mathfrak{A}^2$ a x', y' samodružné přímky involuce J_2 v druhém systému. Všecky tyto čtyři přímky jsou přímkami plochy P^4. Neboť na př. přímce x odpovídají v druhém systému dvě přímky. Tyto protínají x ve dvou bodech, a ježto x jest samodružnou přímkou involuce J_1, zastupuje každý z těchto bodů dva vrcholy jednoho našeho sborceného čtyřúhelníka na $\mathfrak{A}^2$. Přímku x možno považovati za diagonálu jeho a tudíž též za přímku plochy P^4. Podobně platí to o přímkách y, x', y'. Dvojné řídicí přímky plochy P^4, t. j. společné transversály čtyř přímek této plochy x, y, x', y', které tvoří též sborcený čtyřúhelník na ploše $\mathfrak{A}^2$, jsou patrně diagonálami tohoto čtyřúhelníka sborceného, jak bylo dokázati.

Co se týče proniku ploch $\mathfrak{A}^2$ a P^4, který jest prostorovou křivkou stupně osmého, můžeme vysloviti větu, jež z úvah předchozích jest přímo patrna. Věta ta zní:

Pronik zobecněného cylindroidu P^4 s absolutní sborcenou plochou $\mathfrak{A}^2$ jest prostorová křivka stupně čtvrtého prvního druhu p^4 vytvořená projektivními involucemi J_1 a J_2 v různých systémech přímkových $\mathfrak{A}^2$, a čtyři přímky sborceného čtyřúhelníka, jehož dvě a dvě protější strany jsou samodružnými elementy obou involucí J_1 a J_2.

6. *Sestrojení rovinného řezu plochy* P^4 *a jejího obrysu v promítání centrálním.*

Řezem plochy P^4 libovolnou rovinou jest křivka rovinná k^4 řádu 4. se dvěma dvojnými body, kteréžto body v této rovině vytínají patrně obě dvojné přímky plochy. Duálně dostáváme s libovolného bodu ku ploše dotyčný kužel 4. třídy se dvěma dvojnými tečnými rovinami, rovi-

nami to s vrcholu kužele dvojnými přímkami plochy proloženými. I vidíme, že obrys plochy P^4 při centrálném promítání s určitého bodu na určitou rovinu jest rovinná křivka $\varkappa^4$ třídy 4. se dvěma dvojnými tečnami.

Libovolným třem párům přímek v involuci J_1 na $\mathfrak{A}^2$, totiž párům:

$$a_1,\ b_1\ ;\ a_2,\ b_2\ ;\ a_3,\ b_3$$

odpovídejtež projektivně v involuci J_2 v druhém systému přímkovém $\mathfrak{A}^2$, postupně páry:

$$a_1',\ b_1'\ ;\ a_2',\ b_2'\ ;\ a_3',\ b_3'\ ;$$

a protínejtež tyto přímky rovinu, jejíž řez hledáme, v bodech, které si postupně označíme

$$A_1,\ B_1\ ;\ A_2,\ B_2;\ A_3,\ B_3$$
$$A_1',\ B_1'\ ;\ A_2',\ B_2'\ ;\ A_3',\ A_3'$$

Ježto jsou tyto tři a tři páry páry určitých involucí na kuželosečce a^2, budou spojnice prvých tří párů procházeti určitým bodem S a druhých tří párů určitým bodem S'. O vrcholech S a S' máme pak dva projektivné svazky, jež na a^2 vytínají projektivní involuce bodové. Kuželosečka a^2 jest řezem naší roviny s $\mathfrak{A}^2$.

Ukážeme, jak lze konstruovati vždy dva body průsečné křivky k^4. Veďme bodem S libovolný paprsek p, který protne a^2 v bodech A B, a bodem S' projektivností naší mu přiřazený paprsek p' protínej a^2 v bodech A', B'. Jsou pak body C, D jakožto průsečíky spojnic:

$$C \equiv \overline{A\,B'} \times \overline{A'\,B}$$
$$D \equiv \overline{A\,A'} \times \overline{B\,B'}$$

dvěma hledanými body křivky k^4.

Lze totiž snadno nahlédnouti, že body C, D jsou průsečíky naší roviny s diagonálami sborceného čtyřúhelníka a, b, a', b' na $\mathfrak{A}^2$, jehož pro-

a promítejtež se tyto přímky z určitého středu promítání na rovinu průmětnou jako přímky, které si postupně označíme:

$$\alpha_1,\ \beta_1\ ;\ \alpha_2,\ \beta_2\ ;\ \alpha_3,\ \beta_3\ ;$$
$$\alpha_1',\ \beta_1'\ ;\ \alpha_2',\ \beta_2'\ ;\ \alpha_3,\ \beta_3'\ ;$$

Ježto jsou tyto tři a tři páry, páry určitých involucí na kuželosečce α^2, budou průsečíky prvých tří párů ležeti na určité přímce σ a druhých tří párů na určité přímce σ'. Na přímkách σ a σ' máme dvě projektivné řady bodové, jež na α^2 stanoví dvě projektivné involuce v tečnách. Kuželosečka α^2 jest centrálným průmětem $\mathfrak{A}^2$.

Ukážeme, jak lze konstruovati vždy dvě tečny obrysové křivky $\varkappa^4$. Vytkněme si na přímce σ libovolný bod P, a buďte tečny z něho ku α^2 označeny α, β a na přímce σ' z bodu P' předešlému naší projektivností přiřazeného veďme ku α^2 tečny α', β'. Jsou pak přímky γ, δ jakožto spojnice průsečíků:

$$\gamma \equiv \overline{(\alpha \times \beta')\ (\alpha' \times \beta)}$$
$$\delta \equiv \overline{(\alpha \times \alpha')\ (\beta \times \beta')}$$

dvěma hledanými tečnami křivky $\varkappa^4$.

Lze totiž snadno nahlédnouti, že přímky γ, δ jsou průměty diagonálných stran sborceného čtyřúhelníka a, b, a', b' na $\mathfrak{A}^2$, jehož pro-

tější strany jsou dva páry našich involucí projektivně přiřazené.

Dvojné body P, R naší křivky k^4 dostaneme jako průsečíky spojnic:

$$P \equiv \overline{X\,Y} \times \overline{X'\,Y'}$$
$$R \equiv \overline{X\,X'} \times \overline{Y\,Y'},$$

kde $X\,Y$ jsou dotyč. body tečen z bodu S a $X'\,Y'$ dotyčné body tečen z S^1 ku a^2 vedených.

tější strany jsou dva páry našich involucí projektivně přiřazené.

Dvojné tečny π, ϱ naší křivky $\varkappa^4$ dostaneme jako spojnice průsečíků

$$\pi \equiv \overline{(\xi \times \eta')\,(\xi' \times \eta)}$$
$$\varrho \equiv \overline{(\xi \times \xi')\,(\eta \times \eta')},$$

kde ξ, η jsou tečny v průsečících přímky σ a ξ', η' tečny v průsečících σ' s kuželosečkou α^2.

Správnost této poslední konstrukce jest patrna z věty dříve uvedené, že diagonály sborceného čtyřúhelníka ze samodružných přímek v obou involucích jsou dvojnými přímkami plochy P^4. Body X, Y, X', Y', jsou stopami stran x, y, x', y', tohoto čtyřúhelníka, přímky pak ξ, η, ξ', η' průměty jejich.

7. *Speciální polohy základní kongruence komplexového svazku S_1 ku absolutní ploše.*

Uvažujme nyní některé speciální polohy řídicích přímek m, n základní kongruence našeho svazku S_1 lineárních komplexů. Buďte tyto specielní polohy:

1. m, n jsou konj. polárami absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$.
2. m, n se svými konj. polárami vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ tvoří hyperboloidickou čtveřinu.
3. jedna z přímek m, n náleží ploše $\mathfrak{A}^2$.
4. obě přímky m, n náleží ploše $\mathfrak{A}^2$.

Případ první.

V případě prvním jsouce m, n konj. polárami plochy $\mathfrak{A}^2$ jsou společným zobecněným párem osovým všech lineárních komplexů svazku S_1 a máme tudíž zde projektivně zobecněný svazek souosých lineárních komplexů. Dokážeme větu:

V projektivně zobecněném svazku souosých lineárních komplexů existují dva komplexy polárně invariantní vzhledem ku absolutní ploše.

Vytkněme si v prostoru libovolný svazek paprskový $(S\ \sigma)$ a budiž svazek $(S'\ \sigma')$ k onomu polárný vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Jednotlivými paprsky svazku $(S\ \sigma)$ jako přímkami komplexovými jsou stanoveny jednotlivé komplexy svazku S_1. Tento svazek komplexový přiřazuje k sobě jednotlivé přímky svazků $(S\ \sigma)$ a $(S'\ \sigma)$ jakožto komplexové přímky téhož komplexu, zároveň pak odpovídají jednotlivým paprskům svazku paprsko-

vého (S σ) určité paprsky svazku (S' σ') jako konj. poláry vzhledem ku ploše $\mathfrak{A}^2$. Máme tedy v (S' σ') dva kollokální projektivné svazky paprskové, jejich dva samodružné paprsky u', v' odpovídají dvěma paprskům u, v ve svazku (S σ). Páry konj. polár u, u'; v, v' jsou pak vždy dvěma komplexovými paprsky jednoho každého z dvou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantních komplexů svazku komplexového S_1, čímž jest jejich existence dokázána.

Lze snadno nahlédnouti, že každý z těchto dvou polárně invariantních lineárních komplexů jest stanoven přímkami m, n jako svými konj. polárami a vždy přímkami jednoho systému z obou systémů přímkových na $\mathfrak{A}^2$ jako přímkami komplexovými. Avšak, jak jsme ukázali v odstavci 2., má každý vzhledem ku absolutní ploše polárně invariantní lineární komplex ∞^2 zobecněných párů osových, které vyplňují lineární kongruenci přímkovou, jejímiž řídicími přímkami jsou samodružné přímky involuce konj. polár komplexu, kterou tento v jednom systému přímek $\mathfrak{A}^2$ indukuje. Jsou to patrně obě komplexové přímky v tomto systému. V případě našem, vezmeme-li v úvahu oba polárně invariatnní komplexy svazku, jsou to protější strany prostorového čtyřúhelníka, který přímky lineární kongruence [m, n] z plochy $\mathfrak{A}^2$ vytínají. Můžeme pak vysloviti větu:

Geometrické místo párů konj. polár dané plochy 2. stupně $\mathfrak{A}^2$, které s určitým párem m, n konjugovaných polár této plochy tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, jsou páry přímek dvou lineárních kongruencí. Řídicími přímkami těchto kongruencí jsou vždy dvě protější strany prostorového čtyřúhelníka, který přímky kongruence [m, n] z $\mathfrak{A}^2$ vytínají.

Geometrické místo toto můžeme považovati za geometrické místo zobecněných párů osových zobecněného vazku souosých lineárních komplexů.

Případ druhý.

V druhém našem případě speciálním tvoří m, n hyperboloidickou čtveřinu se svými konj. polárami m', n' vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Mysleme si čtyřmi přímkami m, n, m', n' proložený hyperboloid P^2, hyperboloid ten jest patrně vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantním. Páry pak involuce konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$, kterou tato indukuje v jeho systému (m, n, m', n') jsou patrně zobecněnými páry osovými jednotlivých lineárních komplexů svazku S_1 a lze tudíž hyperboloid P^2 pokládati za speciální případ zobecněného cylindroidu P^4. Zmíněná involuce konj. polár zastupuje zde druhou význačnou involuci na P^4.

Zbývá ještě dokázati, že každá přímka l v prostoru, která se svou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konj. polárou a s přímkami m, n, tvoří hyperboloidickou čtveřinu, leží na P^2. Čili jest nám dokázati, že šest přímek: m, m', n, n',

l, l' leží na témže hyperboloidu, když víme, že existují tři hyperboloidické čtveřiny: (m, n, m', n'); (m, n, l, l'); (m', n', l, l'). To bude patrno z věty pomocné, kterou zde zvlášť vytkneme, ježto jí ještě v této práci použijeme.

Věta ta zní:

Máme-li tři páry přímek v prostoru té vlastnosti, že vždy dva páry těchto přímek tvoří hyperboloidickou čtveřinu, tu všech šest těchto přímek leží na hyperboloidu.

Tři páry přímek, z nichž vždy dva tvoří hyperboloidickou čtveřinu označme si a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 a stanovme si páry: a_1, b_1; a_3, b_3 jako páry konj. polár určitý lineární komplex Φ, což zajisté jest možno, ježto dle supposice tyto dva páry tvoří hyperboloidickou čtveřinu. Podobně páry a_2, b_2; a_3, b_3 stanovme si komplex Υ. Jelikož komplexy Φ a Υ mají na hyperboloidu (a_1, b_1, a_2, b_2) po páru konj. polár a_1, b_1 resp. a_2, b_2 má každý z těchto komplexů na tomto hyperboloidu ∞^1 párů konj. polár, kteréžto páry vytvořují dvě obyčejné involuce. Společný pár těchto dvou involucí jest párem společných konj. polár obou komplexů Φ a Υ. Avšak dle hořeního ustanovení těchto dvou komplexů jest patrno, že tímto společným párem jest pár konj. polár a_3, b_3. I musí se pár a_3, b_3 stotožniti se společným párem obou uvažovaných involucí a tudíž ležeti na hyperboloidu (a_1, b_1, a_2, b_2). Leží tedy našich šest přímek skutečně na hyperboloidu, jak bylo dokázati.

Vidíme tedy, že v našem speciálním případě hyperboloid P^2 úplně nahrazuje zobecnělý cylindroid. Ježto jest P^2 vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantním, má s $\mathfrak{A}^2$ společný sborcený čtyřúhelník. Jeden pár protějších stran tohoto čtyřúhelníka tvoří patrně dvě přímky kongruence $[m, n]$ a tudíž tento náš druhý speciální případ můžeme charakterisovati též tím, že dvě přímky základní lineární kongruence $[m, n]$ náleží $\mathfrak{A}^2$.

Máme pak větu:

Náleží-li dvě přímky základní kongruence komplexového svazku S_1 absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$, tu přechází příslušný zobecněný cylindroid v hyperboloid ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní a řídicími přímkami základní kongruence procházející.

Případ třetí.

Případ třetí jest specialisací případu předešlého. Specialisace ta závisí v tom, že jedna z přímek m, n, na př. přímka m splývá se svou konjugovanou polárou m'. Z předešlého případu jest též patrný výsledek, ku kterému bychom zde dospěli:

Náleží-li jedna řídicí přímka základní kongruence komplexového svazku S_1 absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$, přechází zobecněný cylindroid tohoto svazku v hyperboloid ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní a řídicími přímkami základní kongruence proložený.

Případ čtvrtý.

Uvažujme posléze případ, kdy obě přímky m, n náleží ploše $\mathfrak{A}^2$. Označme si systém přímek plochy $\mathfrak{A}^2$, ku kterému přímky m, n náleží jakožto první systém přímek této plochy. V tomto případě jsou všecky lineární komplexy komplexového svazku S_1 ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantními. To jest patrno z toho, že libovolný komplex Γ svazku S_1 obsahuje jeden polárně invariantní pár polár, to jest pár polár m, n, a potom dvě polárně invariantní komplexové přímky u, v, totiž dvě přímky, které má komplex Γ s prvním systémem přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ společné. A ku polární invarianci určitého lineárního komplexu stačí polární invariance jeho lineární kongruence a jedné přímky komplexové, čemuž v případě daném jest vyhověno. Proběhne-li komplex Γ všemi komplexy o základní kongruenci $[m, n]$, tu pár přímek u, v proběhne všemi ∞^1 polohami párů přímek obyčejné involuce v prvním systému plochy $\mathfrak{A}^2$, jejímiž samodružnými přímkami jsou přímky m, n.

Dle věty, kterou jsme vyslovili v odst. 2. o zobecněných párech osových lineárních komplexů vzhledem ku absolutní ploše polárně invariantních, vidíme, že geometrické místo zobecněných osových párů našeho libovolného komplexu Γ ve svazku lineárních komplexů S_1, jest lineární kongruence o řídicích přímkách u, v. Zobecněné páry osové pak všech komplexů svazku S_1, vyplňují přímky všech ∞^1 lineárních kongruencí, jejichž řídícími přímkami jsou jednotlivé páry u, v, involuce v prvém přímkovém systému plochy $\mathfrak{A}^2$ o přímkách m, n jako přímkách samodružných. Pak dle známého Chasles-ova vytvoření lineárního komplexu jakožto souhrnu všech přímek, které protínají vždy dvě přímky plochy 2. stupně, které si jsou v libovolné involuci na ploše přidruženy, vidíme, že přímky všech ∞^1 lineárních kongruencí $[u, v]$ vyplňují lineární komplex. Přicházíme zároveň k nové definici lineárního komplexu a výsledek našich úvah můžeme vysloviti větou:

Geometrické místo konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$, které tvoří es dvěma přímkami m, n této plochy hyperboloidickou čtveřinu přímek, jest komplex lineární. Kterýkoli pár involuce přímek na $\mathfrak{A}^2$, jejímiž samodružnými přímkami jsou přímky m, n, jest párem konjugovaných polár komplexu.

Lineární komplex tento lze pokládati za geometrické místo zobecněných párů osových lineárních komplexů svazku o základní kongruenci $[m, n]$, považujeme-li $\mathfrak{A}^2$ za plochu absolutní.

8. *Zobecněný cylindroid pro absolutní plochu degenerovanou.*

Buďte m, n opět řídicími přímkami základní kongruence komplexového svazku našeho S_1. Budiž a^2 kuželosečkou absolutní, ve kterou degeneruje absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$, buď dále π rovina, ve které leží a^2. Konjugo-

vané poláry přímek m, n leží patrně v π, označme si je m', n' a buď P jejich průsečík. Příčka p ku přímkám m, n bodem P vedená a přímka q průsečíky M, N těchto přímek s rovinou π procházející tvoří pár dvojných řídicích přímek zobecněného cylindroidu příslušného našemu svazku S_1 vzhledem ku a^2 jako kuželosečce absolutní. Jelikož však zobecněný cylindroid jest ku absolutní ploše polárně invariantním, musí v našem speciálním případě ležeti jeho ∞^1 přímek v rovině π. Neboť jinak by nemohlo býti polární invarianci vzhledem ku a^2 vyhověno. Těchto ∞^1 přímek musí ale býti obsaženo v lineární kongruenci $[p, q]$, ježto, jak jsme ukázali, jest celý zobecněný cylindroid v ní obsažen. To není ale jinak možno, než že těchto ∞^1 přímek tvoří svazek v rovině π o vrcholu P. Jelikož ku ploše stupně čtvrtého P^4 náleží paprskový svazek $(P\ \pi)$, musí býti zbývající část sborcenou plochou stupně třetího, kterou si označíme P^3. Přímka p jest dvojnou řídicí přímkou plochy a přímka q jednoduchou přímkou řídicí.

Úvahy tyto, jako jsme provedli pro kuželosečku, mohli bychom způsobem zcela duálním provésti pro kužel druhé třídy, a dospěli bychom pak patrně zase k výsledku, že P^4 se rozpadá v P^3 a svazek paprskový.

Můžeme pak vysloviti větu:

Degeneruje-li plocha $\mathfrak{A}^2$ v kuželosečku nebo v kužel druhé třídy, tu rozpadá se zobecněný cylindroid danému komplexovému svazku příslušný v sborcenou plochu stupně třetího P^3 a rovinný svazek paprskový.

Z našich dvou význačných involucí má význam na P^3 pouze první význačná involuce, kdežto v druhé význačné involuci odpovídají přímkám plochy P^3 přímky rovinného svazku $(P\ \pi)$. První význačnou involucí jest souhrn párů přímek, které tvoří hyperboloidickou čtveřinu s libovolnou přímkou plochy P^3 a jí vzhledem ku a^2 konj. polárou. Pár přímek m, n náleží patrně této involuci.

Ploše P^3 náleží též obě tečny t_1, t_2 vedené z bodu P v rovině π ku absolutní kuželosečce a^2. Lze totiž každou z těchto tečen považovati za komplexovou přímku určitých dvou lineárních komplexů Δ_1 a Δ_2 našeho svazku, a tedy za pár splývajících polár těchto komplexů. Jelikož pak každou z těchto tečen $t_1 t_2$ můžeme považovati za pár splývajících konj. polár ku a^2, vidíme, že t_1 a t_2 tvoří dva páry zobecněných splývajících párů a tedy, že náleží P^3. Tyto přímky t_1, t_2 tvoří patrně s jednoduchou řídicí přímkou q řez plochy P^3 s rovinou π. Podobně bychom dostali výsledek duální.

U Plückerova konoidu jsou přímky t_1, t_2 nahrazeny imaginárným párem tečen vedených z nekonečně vzdáleného bodu osy konoidu ku kružnici kulové v rovině nekonečně vzdálené. Čili jsou isotropickými přímkami v nekonečnu osu konoidu protínajícími.

Štěpitelnost sklovité chrupavky a její vztah k funkcionální struktuře

Napsal

Prof. Dr. Otakar V. Srdínko.

Z ústavu pro histologii a embryologii české lékařské fakulty; přednosta prof. Dr. J. V. Rohon.

Se 3 tabulkami.

(Předloženo dne 30. ledna 1914.)

Jest možno rozeznávati tkáně na tah (tahové) a tkáně na tlak (tlakové). Mezi první jest čítati tkáň svalovou, kollagenní a elastické vazivo, mezi druhé chrupavku a kost. Tkáně tahové jsou ponejvíce vydány účinkům primárního tahu, kdežto tkáně tlakové nalézáme ponejvíce tam, kde jest třeba klásti odpor tlaku. Naznačený rozdíl není ovšem výhradně platný, neboť i na chrupavku a kost působívá přímý tlak a snad i na tkáně tahové může působiti tlak kolmo na jejich podélný průběh (T r i e p e l).

Vliv materiálu na tvar, velikost a výkonnost tvrdého útvaru jest podle R a u b e r a velmi značný. K tomu možno již předem dodati, že charakter materiálu má také velký vliv na vnitřní uspořádání (strukturu, architekturu) tvrdých útvarů v těle živočišném.

Při tkáních živočišných zvláště při pojivech (tkáních podpůrných) jest třeba znáti jejich pevnost a pružnost. Tyto dvě vlastnosti byly také zjištěny vzhledem k různým silám, které na podpůrné tkáně mohou působiti. Síly takové jsou: tah, tlak, ohnutí, zlomení, kroucení a j. Shledalo se při tom, že chrupavka má zcela jiné poměry pružnosti a pevnosti než kost.

Modul pružnosti chrupavky žeberní jest 0·875, modul pevnosti na tah 0·17, na tlak 1·57. Modul pružnosti kompaktní kosti ve směru podélném

jest 1800—2500, modul pevnosti na tah 9·25—12·40, na tlak 12·56—16·80 (R a u b e r).

Z toho viděti jest, že jednak pevnost kosti na tlak jest větší než její pevnost na tah, jednak že pevnost chrupavky v obou směrech jest daleko menší. A sice jest vidno, že pevnost chrupavky na tlak jest devětkrát větší než její pevnost na tah. Nehodí se tedy chrupavka jako samostatná část tam, kde jest nésti značný tah. Rovněž se nehodí za dlouhé nosiče, kdež výhodnější jest kost. Vzhledem k uvedeným vlastnostem chrupavky a kosti vysvítá, že větší tvorové, žijící na souši, nemohou existovati se skelettem chrupavčitým; pouze materiál kostěný umožňuje jejich život na zemi. Skelett chrupavčitý pro mnohé vodní živočichy ovšem dostačí.

O fysikálních vlastnostech tkání zvláště podpůrných nalezneme souborné kapitoly v knize T r i e p e l o v ě. Chci zde uvésti jen některé okolnosti o chrupavce sklovité.

Použití chrupavky hyalinní v živém těle jest různého druhu. Použití na tah jest uskutečněno ve všech kloubech při tření chrupavek o sebe; tah vzniká v povrchních vrstvách chrupavky a jest rovnoběžný s povrchem chrupavky. Velikost napětí tahových není značná, takže sice může míti vliv na vytvoření jemnějších struktur, nemůže však způsobiti značnější změny tvaru. Dále jest uváděn tah, který způsobují svaly na místech úponu na jednotlivé chrupavky hrtanové.

Častější jest použití chrupavky na tlak. Tomu jsou vysazeny všechny chrupavky kloubní. Tlak vzniká jednak napětím svalů, které táhnou přes klouby a na ně tlačí, jednak tahem svalů, z něhož jedna komponenta pravidelně jako tlak v kloubu se uskutečňuje. V kloubech dolní končetiny jest značný tlak, vznikající váhou částí těla výše uložených.

Tah a tlak jsou zastoupeny při upotřebení chrupavky na zlomení, s čímž se shledáváme u chrupavek žeberních, tracheálních, hrtanových.

Co se týče pružnosti na tah, stojí chrupavka mezi vazivem elastickým, méně pružným a vazivem šlachovým, mnohokráte pružnějším.

Pevnost chrupavky na tlak jest tak veliká, že poskytuje v živém těle desateronásobnou záruku proti rozmáčknutí chrupavky.

O práci T h o m o v ě, z r. 1907, ve které se pojednává o mechanických příčinách proměny chrupavčitého skelettu v kostěný, referoval jsem již v dřívější své publikaci.

V této práci sděluji výsledky, k jakým jsem došel při vyšetřování štěpitelnosti sklovité chrupavky. Štěpitelnost pak jsem vyšetřil u chrupavky žeberní, tracheální, u chrupavek hrtanových a chrupavky v processus xyfoideus; veškeré chrupavky pocházely od člověka různého stáří.

Ke svému zkoumání použil jsem methody, které upotřebil H u l t k r a n z, aby poznal směr uložení povrchních vrstev v chrupavkách kloubu kolenního. H u l t k r a n z nejprvé učinil do chrupavky (patelly, dolního konce femoru a horního konce tibiae) četné vpichy kulatým šídlem a pak

vetřel do plochy chrupavky černou, olejovou barvu. Ačkoliv vpichy byly učiněny hrotem kuželovitým, nepovstaly na povrchu chrupavky body, nýbrž čárky neboli trhlinky, které naznačují, kde jest větší pevnost v tahu. Z docíleného výsledku poznal Hultkranz, že povrchní vrstvy základní hmoty kloubní chrupavky jsou paralelní s povrchem a sice buď v jednom hlavním směru, neb se snopce křižují.

Usoudil jsem, že ke zkoumání chrupavek jiných, nikoliv kloubních, jest třeba přihlížeti nikoliv k povrchu chrupavky, nýbrž k vnitřku a proto že jest nutno studovati štěpitelnost chrupavek žeberních a ostatních, které jsem nahoře uvedl, na řezech. Řezy ony vedl jsem vždy v několika navzájem paralelních rovinách horizontálních, v několika rovinách sagittálních a v rovině frontální. Chrupavky byly buďto čerstvě z mrtvoly vyjmuty, nebo uloženy nějaký čas (1—4 týdny) v 10% formalínu, nebo po fixaci formalínové v alkoholu; výsledky se shodují.

Do řezné plochy na př. vedené v rovině horizontální uprostřed mezi horním a dolním okrajem (hranou) kousku chrupavky žeberní (ve vzdálenosti 1—2 *cm* od hranice s kostěným žebrem) učinil jsem tlustší jehlou četné vpichy jak v blízkosti předního a zadního perichondria, tak i všude v prostředních částech řezné plochy. Pak vtíral jsem lopatkou nebo nožem černou olejovou barvu do řezné plochy a po dostatečném vetření omyl jsem přebytečnou barvu líhem, takže zbyla bílá řezná plocha s černými tečkami nebo čárkami, jak ihned bude blíže popsáno.

Na tab. I. obrazec *1a* znázorňuje nám fotografii osmkrát zvětšeného horizontálního řezu žeberní chrupavkou dítěte 3 dni starého. Směr puklin, vetřenou barvou černou znatelných, směřuje od předního perichondria kolmo na příč dlouhé osy žebra k zadnímu perichondriu. Jinak uložených štěrbin na obrázku není.

Na řezu sagittálním (obr. *1b*) z téhož objektu vidíme z hruba uložení štěrbin od přední plochy k zadní.

Na řezu frontálním (obr. *1c*) z téhož objektu není viděti vyznačené čárky neboli pukliny, nýbrž spíše hrubé body.

Obr. *2a* znázorňuje horizontální řez žeberní chrupavkou dítěte $6^1/_2$ r. starého. Kromě štěrbin čárkovitých, uložených v prostřední zoně řezné plochy napříč dlouhé osy žeberní chrupavky, vidíme pod perichondriem čáry rovnoběžné s povrchem a pod těmito vrstvu bodů, což zvláště jest patrno na pravém okraji obrázku.

Obr. *2b*, řez sagittální, jest velmi charakteristický jak pro povrchní čáry rovnoběžné s povrchem, tak pro čáry, směřující od předního perichondria k zadnímu. Mezi oběma okrsky těchto čar vidíme při levém okraji několik bodů.

Obr. *2c* znázorňuje řez frontální a liší se úplně od řezu horizontálního a sagittálního. Čáry chybí na tomto řezu zvláště na levé straně obrázku a přítomny jsou jemné i hrubší body.

Obr. *3a* jest zvětšenou fotografií dvou horizontálních řezů žeberní chrupavkou dítěte $11^1/_2$ r. starého. Pod perichondriem vidíme úzkou zonu čar rovnoběžných s povrchem, pak jest rovněž úzká zona bodů a pak široká prostřední zona čar, uložených napříč dlouhé osy žebra.

Obr. *3b* na tab. II. jsou dva řezy sagittální stejného stáří, jako obr. *3a*, a shodují se, co se uložení čar dotýče, s obr. *2b*.

Obr. *3c* jest řez frontální chrupavkou žeberní téhož dítěte jako v obr. *3a* a rozdíl tohoto řezu od řezu horizontálního a sagittálního jest tak nápadný, že není třeba zbytečně slovy to popisovati.

Obr. *4a* jest fotografie zvětšeného řezu horizontálního, obr. *4b* sagittálního a obr. *4c* řezu frontálního žeberní chrupavkou člověka 29 r. starého. Uložení čar v zásadě se shoduje s uložením čar v chrupavce žeberní dětské.

Připojím ihned popis dalších obrázků na tabulce III., vzatých z jiných chrupavek a pak přistoupím k vysvětlení těchto pokusů na štěpitelnost chrupavky.

Obr. *5a* na tab. III. jest zvětšená fotografie horizontálního řezu chrupavkou tracheální člověka 20 r. starého. Každá čára černá, stojící kolmo na zevním i vnitřním perichondriu, povstala jedním vpichem, učiněným uprostřed šířky řezu. Vpichy učiněny úmyslně řídko, t. j. dosti vzdáleně od sebe, aby vzniklé trhliny, černí vyplněné, byly přehledné. Vpichy při okraji chrupavky u perichondria nebyly učiněny žádné. Již zde poznamenávám, že jeví se nám chrupavka tracheální jako obloukovitá klenba, sestrojená podle stejného principu jako klenby ze zdiva.

Obr. *5b* jsou dva sagittální řezy tracheální chrupavkou člověka 20 r. starého, a vidíme na nich stejně orientované pukliny jako u chrupavky žeberní.

Obr. *5c* nám znázorňuje předcházející chrupavku na řezu frontálním a na první pohled opětně vidíme učiněné vpichy nikoliv jako čárky, nýbrž jako skutečné body. Liší se tedy tento řez frontální od řezů horizontálních a sagittálních stejně jako tomu bylo u chrupavky žeberní.

Obr. *6a* jest zvětšená fotografie sagittálního řezu chrupavkou prstencovou člověka 20 r. starého. Orientace puklin jest tatáž jako byla na sagittálních řezech chrupavkou žeberní a trachealní.

Obr. *6b* jest frontální řez předcházející chrupavkou a vystupují na něm přesvědčivě vpichy jako pouhé body.

Obr. *7a* jest horizontální řez a obr. *7b* sagittální neboli vertikální řez chrupavkou štítovou dítěte 5 r. starého. Orientace trhlin se shoduje s příslušnými řezy chrupavek dříve uvedených.

Obr. *7c* jest frontální řez chrupavkou štítovou 5 r. starého dítěte a vpichy znatelny jsou opětně jako pouhé body.

Obr. *8.* znázorňuje zvětšenou fotografii příčného průřezu chrupavkami hrtanovými dítěte $8^1/_2$ r. starého. Chrupavka štítná vykazuje stejnou orientaci puklin, jako jsme viděli na obr. *5a* u průdušnice; jeví se nám

tedy zde konstrukce klenby zcela zřetelně. Chrupavka hlasivková dává na zasaženém řezu poznati rovněž klenbovité uspořádání avšak s opáčně vypuklým obloukem.

Obr. *9.* konečně jest sagittální řez chrupavkou a částečně kostí výběžku mečovitého člověka 20 r. starého. I zde vidíme orientaci puklin v chrupavce od předního perichondria k zadnímu a což jest velice pozoruhodné, také v kosti na pravé straně obrázku vidíme určitou orientaci prořízntutých plotének tkáně kostní od předu do zadu.

Poznali jsme tedy štěpitelnost sklovité chrupavky na různě vedených řezech různých chrupavek dítěte i dospělého člověka a můžeme tedy v této štěpitelnosti takto se pronésti.

Chrupavka žeberní, tracheální, štítová, prstencová i chrupavka mečovitého výčnělku jsou štěpitelny na řezech horizontálních a sagittálních nikoliv však na řezech frontálních. Štěpitelnost na řezech horizontálních a sagittálních směřuje od jednoho perichondria k druhému v rovině horizontální a zaujímá téměř celou řeznou plochu ; pouze pod perichondriem, a to jest zvláště viděti u chrupavky žeberní, protože jest větších rozměrů, zbývají dvě úzounké zony a sice zevní, štěpitelná rovnoběžně s povrchem a vnitřní málo štěpitelná, neb vůbec nic.

Jest otázkou nyní, co znamenají štěrbiny nebo pukliny, které vznikají při bodnutí jehlou. Napětí, které vznikne ve hmotě chrupavky kolem vbodnuté jehly, působí jako tah a způsobí porušení souvislosti hmoty chrupavkové v těch místech, kde soudržnost její jest menší než ono napětí ; porušení ono nastane ve způsobě trhliny. Orientace pak oněch trhlin, ukazující směr štěpitelnosti chrupavky, zároveň tedy nám činí zřejmým, ve kterém směru jest pevnost chrupavky na tah menší a ve kterém větší. U všech zde popsaných chrupavek jest tedy soudržnost v rovinách horizontálních v dlouhé ose menší než v ose dorsoventrální a v rovinách sagittálních ve vertikální ose menší než v ose dorsoventrální. Z toho logicky plyne, že pevnost na tlak, který se jeví sekundárně jako tah uchýlený o 90^0, jest větší v rovinách horizontálních v ose předu-zadní, v rovinách sagittálních rovněž v této ose dorso-ventrální. Jinými slovy, zkoumané chrupavky sklovité, jako tkáně určené na tlak, zařízeny jsou na snešení tlaku, který účinkuje od dvou konců chrupavky (přihlížejíc k řezům horizontálním) k jejím částem prostředním. Tento tlak při chrupavkách žeberních, které jsou se zřetelem k délce značně široké a vysoké, účinkuje hlavně stlačováním jejich součástí, u chrupavek tracheálních a hrtanových relativně delších však ke stlačování se přidružuje také ohýbání chrupavek. Takto účinkujícímu tlaku svou výslednicí se rovná tlak účinkující na kterýkoliv bod chrupavkového oblouku neboli klenby chrupavkové při současném upevnění konců neboli krajů klenby.

Konstruktivní princip popsaných chrupavek se tedy shoduje s principem klenby zdiva, kde pevnost na tlak ve směru oblouku jest nejdůležitější. Nejpatrněji jest to viděti na horizontálních řezech chrupavkami

tracheálními a hrtanovými. Vedle toho však jest při klenbách chrupavkových určitá pevnost na ohnutí, kterému jsou vysazeny chrupavky tracheální př. kontrakci svalů napnutých mezi konci chrupavkových prstenců a chrupavka štítová při kontrakci musculi thyreopharyngei.

Body, které vidíme na řezech frontálních, dosvědčují, že soudržnost hmoty chrupavkové v rovinách frontálních jest ve všech směrech stejná a že tedy není chrupavka na těchto řezech ani ve směru vertikálním ani ve směru horizontálním štěpitelná. Totéž vidíme na úzké zoně chrupavky, která se na horizontálních a sagittálních řezech nalézá mezi úzkou zonou štěpitelnou paralelně s povrchem a širokou zonou štěpitelnou kolmo na povrch.

Přihlédněme nyní, jaký vztah má zjištěná štěpitelnost chrupavky k její histologické struktuře. Zjistil jsem v dřívější práci, že sklovitá chrupavka žeberní u dětí i dospělého člověka se vyznačuje určitým uspořádáním trámců nebo plotének základní hmoty i buněk. Orientace dlouhých os buněk a dutin buněčných jakož i pruhů základní hmoty provedena jest na řezech horizontálních a sagittálních (u těchto nepřihlížejíc k hoření a dolení hraně žeberní chrupavky) do zon: dvou povrchních s orientací paralelní s perichondriem předním a zadním, dvou následujících struktury houbovité a jedné zony prostřední, zaujímající největší část tloušťky chrupavky žeberní s hlavními trámci orientovanými kolmo na přední a zadní perichondrium. Tyto hlavní trámce prostřední zony spojeny jsou navzájem tenkými, vedlejšími, šikmými spojkami. Porovnáme-li nyní obrazce histologické struktury s obrazci štěpitelnosti, přesvědčíme se, že úplně spolu korespondují. To jest nejlépe patrno z porovnání obr. 6., 7. i ostatních na tab. II. a III. nebo schematického obrazce na tab. IV. dřívější práce*) s obrazem *3a* (tab. I.) a *3b.* (tab. II.) této publikace vzhledem k řezům horizontálním a sagittálním a obrazce *9.* na tab. III. dřívější práce s obr. *3c* na tab. II. této práce.

Štěpitelnost chrupavky sklovité jest podmíněna její histologickou strukturou a protože štěpitelnost nám naznačuje, ve kterých směrech a rovinách jest hmota chrupavky pevnější na tlak event. na tah, nelze pochybovati, že funkce chrupavky sklovité stojí v určitém vztahu k její struktuře. Uvedl jsem v dřívějším pojednání důvody, které svědčí pro názor, že popsaná struktura ve sklovité chrupavce jest funkcionální. Pokusy se štěpitelností chrupavky hořejší názor potvrzují.

Architekturou chrupavek tracheální a hrtanových jsem se v dřívější publikaci neobíral. Pokusy o štěpitelnosti těchto chrupavek předem naznačují, že i histologická struktura těchto chrupavek nebude odchylna od chrupavky žeberní.

---

*) O. Srdínko: Funkcionální architektura sklovité chrupavky žeberní u člověka. Rozpravy Čes. Akad. tř. II. oč. XXIII. č. 11.

Štěpitelnost chrupavky mečovitého výčnělku rovněž se shoduje v zásadě s chrupavkami ostatními a také struktura její, jak z toho bylo lze souditi, jest shodná. Kromě toho však z obrázku 9. na tab. III. jest patrno, že orientace v chrupavce a v sousední kosti jest stejná a že tedy, ač se jedná o různý tkáňový materiál, princip konstruktivní v chrupavce i v kosti jsou v určitém vztahu. Při chrupavce, která jest méně pevna než kost, jest přirozeně použito quantitativně více materiálu než při kosti. Dotýkám se zde těchto okolností pouze stručně, neboť chci ve zvláštním pojednání se obírati otázkou, jaký jest vztah mezi konstruktivním principem částí skeletních, složených z chrupavky a částí složených z kosti.

* * *

Ze všech fakt, dosud různými badateli zjištěných, jest myslitelno, že vznik určité tkáně jest v kausálním vztahu k funkci její. Tkáně tahové jsou v první řadě vytvořovány tahem, tkáně tlakové tlakem, není však pochyby, jak Triepel hned k tomu poznamenává, že k tomuto jednomu tkánětvornému momentu přistupují ještě jiné.

Jednoho však nesmíme zapomenouti, přijmeme-li možnost, že tkáň jest určována druhem a velikostí napětí, totiž té skutečnosti, že ona napětí jsou zcela jiná u dospělého a dítěte než v době embryonalní. Vidíme-li proto určité struktury, které v době dospělosti pokládáme za funkcionální, vystupovati již v době embryonální, kdy o funkci nelze v takovém rozsahu ještě mnoho mluviti, není možno než v četných případech vypomoci si hypothesou, že ony struktury nepovstávají teprvé znovu při vývoji ontogenetickém, nýbrž že získány byly během phylogenese a dědičností byly přeneseny na nové individuum. Jak z mé publikace vysvítá, při vzniku struktury v chrupavce žeberní nebylo by třeba vypomáhati si touto hypothesou, nýbrž stačilo by vysvětlení oné struktury funkcí při vývoji individuálním.

A jak si jest představovati přímý účinek funkce (napětí) na vznik struktury tkáně? Není pochyby, že napětí účinkuje jak na buňky, tak na základní hmotu pojiv. Protože však tato jest časově sekundární součástí tkáně, účinkuje napětí časově dříve na buňky a teprvé později také na hmotu mezibuněčnou.

O způsobu dějů, které nastupují v buňce mechanickým vlivem, vyslovují někteří badatelé hypothesu, že v živé buňce děje se pohyb molekul neb komplexů molekulárních a zevním mechanismem že onen pohyb lze změniti. Dá-li se onou změnou pohybu popud k tvoření tkáně nebo metaplasii, lze očekávati, že největší dimense tvořených tkáňových elementů bude souhlasiti se směrem napětí, čímž se dává základ určité orientaci, patrné v chrupavce sklovité na buňkách i na hmotě mezibuněčné.

Vysvětlení k tabulkám.

Obr. 1. Žeberní chrupavka dítěte 3 dni starého *a*) řez horizontální; *b*) řez sagittální; *c*) řez frontální.

Obr. 2. Žeberní chrupavka dítěte $6^1/_2$ r. st.: *a*) řez horizontální; *b*) řez sagittální; *c*) řez frontální.

Obr. 3. Žeberní chrupavka dítěte $11^1/_2$ r. st.: *a*) řezy horizontální; *b*) řezy sagittální; *c*) řez frontální.

Obr. 4. Žeberní chrupavka člověka 29 r. st.: *a*) řez horizontální; *b*) řez sagittální; *c*) řez frontální.

Obr. 5. Chrupavka tracheální člověka 20 r. st.: *a*) řez horizontální; *b*) dva řezy sagittální; *c*) řez frontální.

Obr. 6. Chrupavka prstencová hrtanu člověka 20 r. st.: *a*) řez sagittální; *b*) řez frontální.

Obr. 7. Chrupavka štítová dítěte 5 r. st.: *a*) řez horizontální; *b*) řez sagittální; *c*) řez frontální.

Obr. 8. Chrupavky hrtanové dítěte $8^1/_2$ r. st. na příčném řezu.

Obr. 9. Processus xyfoideus člověka 20 r. starého na řezu sagittálním.

Všecky obrazce jsou zvětšeny asi 8krát.

LITERATURA.

Hultkrantz J. W.: Das Ellenbogengelenk und seine Mechanik. 1897.

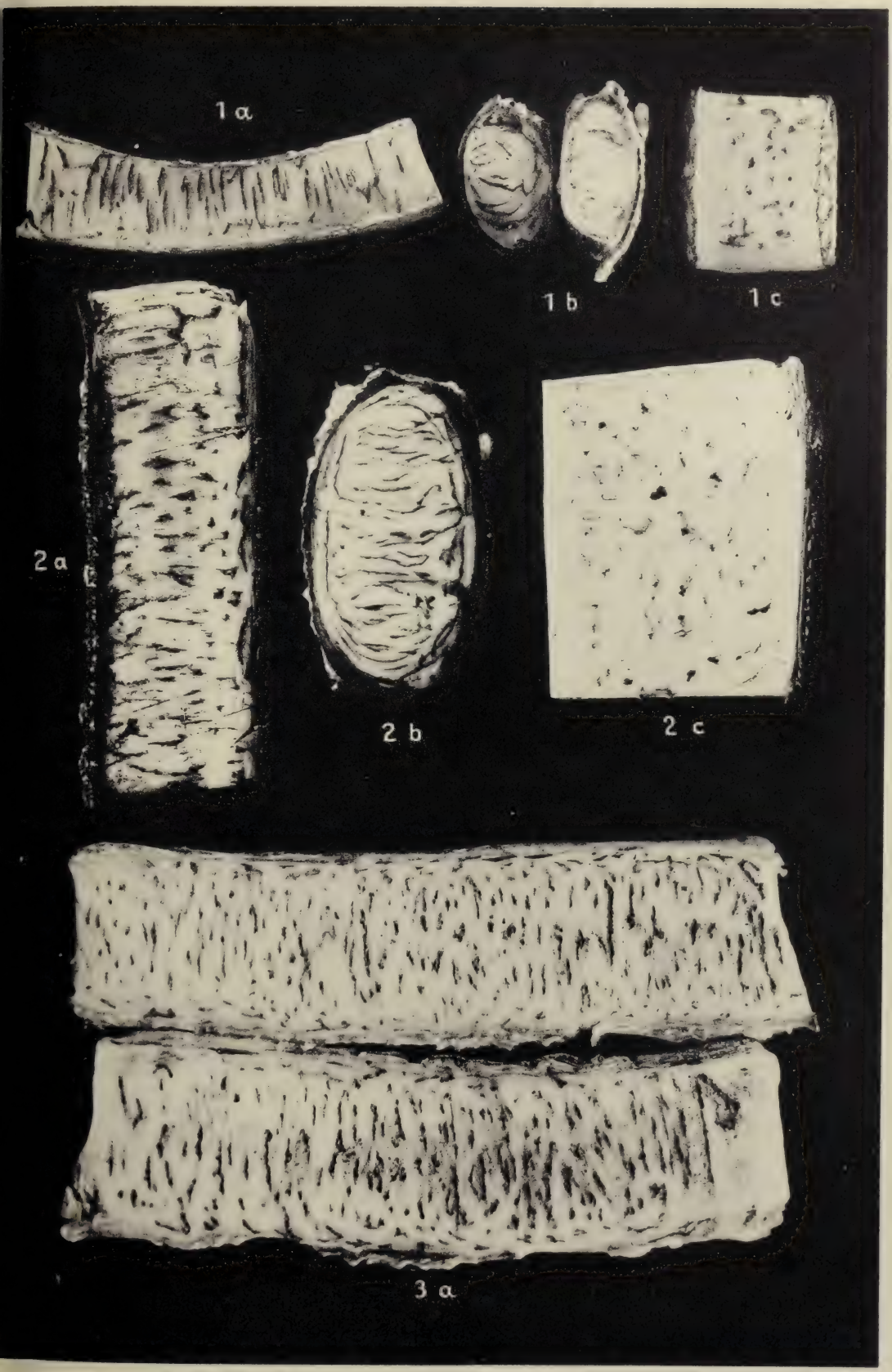
Rauber A.: Lehrbuch der Anatomie des Menschen. VI. Aufl. 1902.

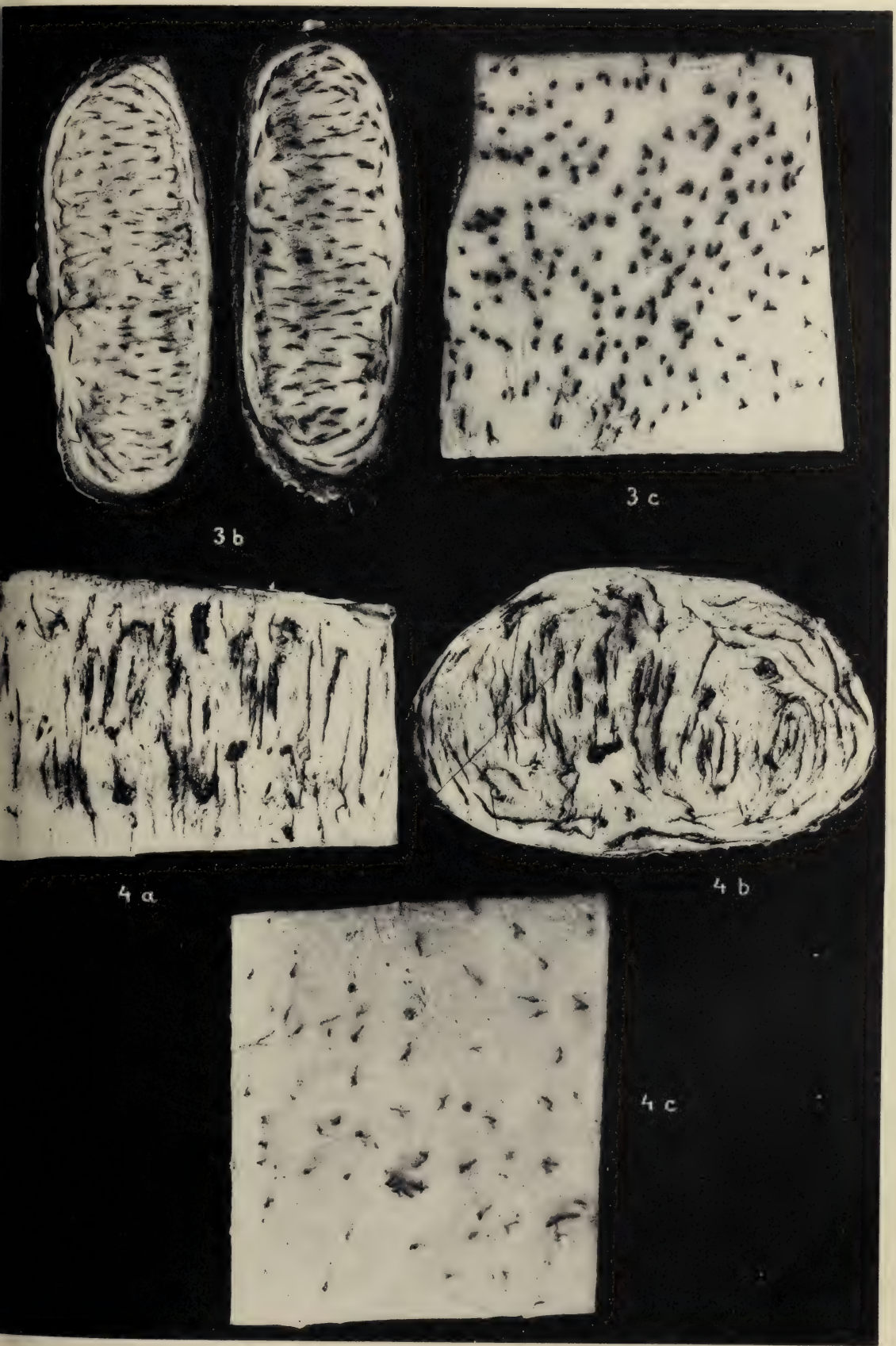
Srdínko O.: Funkcionální architektura sklovité chrupavky žeberní u člověka. Rozpravy Čes. Akademie tř. II. roč. XXIII. č. 11.

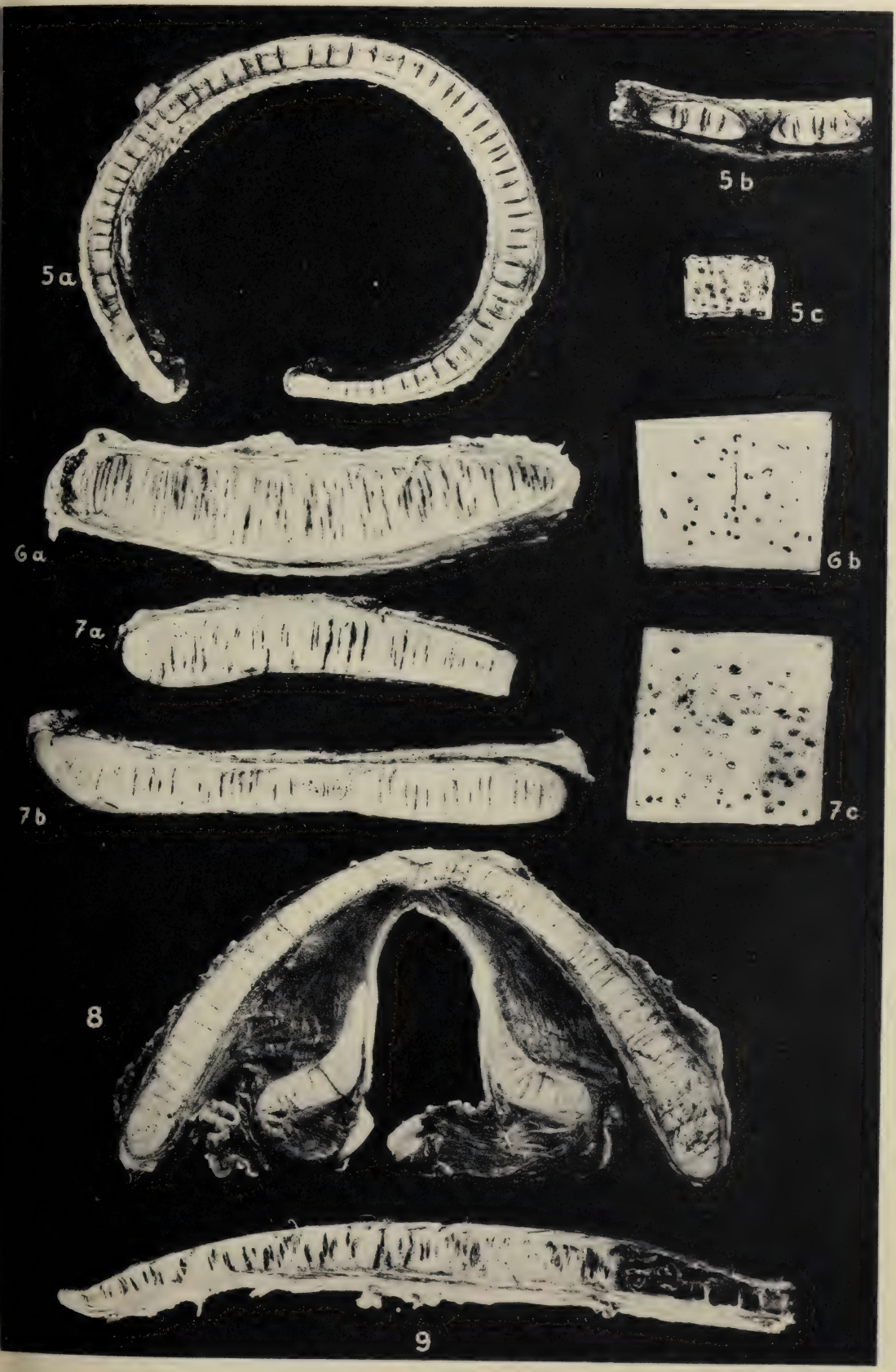
Thoma R.: Synostosis suturae sagit. cranii. Ein Beitrag zur Histomechanik des Skeletts etc. Virchows Archiv 1907

Triepel H.: Einführung in die physikalische Anatomie. 1902.

— Über mechanische Strukturen. Anat. Anz. 23. B d. 1903.


1 a
1 b
1 c
2 a
2 b
2 c
3 a


3 b
3 c
4 a
4 b
4 c


5a
5b
5c
6a
6b
7a
7b
7c
8
9

O kaskádní transformaci differenciálních rovnic lineárních.

(Pokračování k R. Č. A. XXII. č. 32, 41.*)

Napsal Dr. FRANT. RÁDL.

(Předloženo dne 13. února 1914.)

1. Při transformaci diff. rovnice lin. R v kaskádní řadu

$$\ldots, R_{-i}, \ldots, R_{-1}, R, R_1, \ldots, R_i, \ldots$$

může nastati případ, že rovnice původní se po několikeré transformaci opakuje, na př. že $R_i \equiv R$. V řadě opakuje se pak sled rovnic $R, R_1, \ldots, R_{i-1}$, řada jest periodická, při čemž perioda má i členů. Poněvadž je řada v tomto případě nekonečná, zdálo by se, že transformace je pro integraci bezúčelná. Lze však ukázati, že lze pak vždycky nalézti kvadraturou partikulární integrál rovnice R a tím ji převésti na rovnici jinou o řád nižší, která nemusí dávat řadu periodickou.

Je-li na př. $i = 3$, lze psát R resp. R_1, R_2 ve tvaru dle I. (1)

$$\begin{aligned} y_1' - h\,y &= 0, \quad y_1 = y' + p\,y\ , \\ y_2' - h_1\,y_1 &= 0, \quad y_2 = y_1' + p_1\,y_1, \\ y_3' - h_2\,y_2 &= 0, \quad y_3 = y_2' + p_2\,y_2, \end{aligned}$$

při čemž k vůli jednoduchosti jsme položili transformační funkci $a = 0$. Položíme-li $y_3 = y$, plyne z poslední rovnice, do níž dosadíme za y_2', y_2 hodnoty z rovnic třetí, čtvrté a pak za y_1', y_1 z rovnic první, druhé,

$$(h_1 + p_1 p_2)\,y' + (h_1 p + h p_2 + p p_1 p_2 - 1)\,y = 0,$$

odkudž lze stanoviti partikulární integrál rovnice R kvadraturou. Podobně při $a \neq 0$ a při všeobecném i. Při všeobecném řádu rovnice ukazuje se týmž postupem, že lze řád tento o 1 snížiti a tudíž též alespoň jeden partik. integrál kvadraturou stanoviti.

Transformaci kaskádní možná přirovnat dělení dvou čísel dekadických a sice, je-li kaskádní řada zakončena, dělení zakončenému, je-li

*) V násl. označováno I., II.

periodická, zlomku periodickému. Jako tento lze vyjádřit tvarem zakončeným, tak i rovnice, které dávají řadu periodickou, lze zakončeně integrovat alespoň co se týče integrálu částečného.

Můžeme tedy vysloviti theorém, jenž při 2 proměnných zůstal as nepovšimnut:

U rovnice diff. lin. obyč. n^{ho} řádu, která dává kaskádní řadu periodickou, lze nalézti alespoň jeden partikulární integrál kvadraturou.

V následujícím probrán specielně případ $i = 1, 2$; jiné jsou těžko přístupné.

a) $R_1 \equiv R$.

2. Určiti jest rovnici, která se jedinou kaskádní transformací o 2 invariantech reprodukuje. Předpokládejme nejdříve, že funkce transformační $a = 0$; tento případ možná totiž snadno řešit pro libovolný řád rovnice. Pak dle I. (R_1) platí především podmínka

$$p_1 + \overline{n-1}\,\frac{z'}{z} = p_1,$$

tudíž $z = \frac{1}{h} = \text{const}$, na př. $h = -c_n$. Vzhledem k tomuto výsledku platí dle téhož vzorce (R_1) další podmínky

$$\begin{aligned} &p_2 - p_1' = p_2, \\ &p_3 - p_2' + p_1'' = p_3, \\ &\quad\vdots \\ &p_{n-1} - p'_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} p_1^{n-2} = p_{n-1}, \\ &\qquad\qquad -\tfrac{1}{z} \qquad\qquad\qquad\quad = p_n, \end{aligned}$$

z nichž soudíme, že koëfficienty $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}, p_n$ jsou konstantní na př. $p_1 = c_1, p_2 = c_2, \ldots, p_{n-2} = c_{n-2}, p_n = c_n$; poněvadž pak dle I. (4)

$$h = -p_n + p'_{n-1} - \ldots + (-1)^n p_1^{n-1},$$

jest též součinitel p_{n-1} stálý, na př. $p_{n-1} = c_{n-1}$. Hledaná rovnice, o níž platí $R_1 \equiv R$, jest tudíž o stálých koëfficientech

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n y = 0. \qquad (1)$$

Abychom našli její řešení (uváděné pouze k vůli souvislosti s následujícím), pišme ji dle I. (1) ve tvaru

$$y_1' + c_n y = 0, \quad y_1 = y^{n-1} + c_1 y^{n-2} + \ldots + c_{n-1} y,$$

neboť $q_i = c_i$. Poněvadž se však rovnice transformací reprodukuje, jest y_1 rovno y až snad na jistou konstantu C. Pro $y_1 = C y$ nabudou poslední dvě rovnice tvaru

$$y = e^{-\frac{c_n}{C}x} \text{ (až na konstantu integrační),}$$

$$y^{n-1} + c_1 y^{n-2} + \ldots + (c_{n-1} - C)\, y = 0,$$

i určeny jsou jimi dvě neznámé C, y. Abychom obdrželi C, dosaďme první rovnici do druhé, při čemž k vůli pohodlí místo $-\frac{c_n}{C}$ pišme α. Tím vznikne známá karakteristická rovnice

$$\alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

o kořenech α_i, a dosazením do první rovnice obdržíme n integrálů $C_i e^{\alpha_i x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Není-li funkce transformační a rovna nulle, mají při rovnici 2. řádu

$$y'' + p y' + q y = 0$$

platnost dle I. (12), (13) podmínky

$$a + b - \frac{h'}{h} = p,$$

$$ab + a' - a\frac{h'}{h} - h = q.$$

Poněvadž $b = p - a$, soudíme z první rovnice, že $h =$ stálé, na př. $= -d$; spojíme-li druhou podmínku s relací pro h I. (12)

$$h = b' + ab - q,$$

obdržíme pro koëfficienty

$$p = 2a + c$$

$$q = a^2 + a' + ac + d. \ (c, d \text{ jsou stálé}).$$

Tudíž rovnice

$$y'' + (2a + c)\, y' + (a^2 + a' + ac + d)\, y = 0 \qquad (2)$$

kaskádní transformací dle funkce a zůstává nezměněna.

Její integraci provedeme, píšeme-li ji dle I. čl. 5. ve tvaru

$$y_1' + a y_1 + d y = 0, \quad y_1 = y' + (a + c)\, y.$$

Pro $y_1 = C y$ obdržíme z těchto rovnic dvě podmínky pro C, y

$$y' + \left(a + \frac{d}{C}\right) y = 0, \quad y' + (a + c - C)\, y = 0.$$

Eliminací y obdržíme C a dosazením do jiné z obou rovnic y. Píšeme-li k vůli pohodlí $-\frac{d}{\alpha}$ místo C, obdržíme pro α karakt. rovnici

$$\alpha^2 + \alpha c + d = 0,$$

a na př. první z obou rovnic určujících C, y dává

$$y = (C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x})\, e^{-\int a\, dx}.$$

Rovnice n^{ho} řádu téže vlastnosti zní

$$D(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\,^{*}),$$

při čemž analogicky dle předešlého $y_i = C_i e^{\alpha_i x - \int a dx}$. Odvodíce totiž koëfficienty této rovnice můžeme se dodatečně přesvědčiti, že se transformací reprodukuje. Tak zní rovnice řádu 3^{ho}

$$y''' + (3a + c_1) y'' + (a^2 + 3a' + 2ac_1 + c_2) y' + [a^3 + a'' + 3aa' + \\ + (a^2 + a') c_1 + a c_2 + c_3] y = 0. \tag{3}$$

3. Stanovme podobně rovnici, která se nezmění kaskádní transformací o 4 invariantech. Předpokládáme-li nejdříve, že transformační funkce a, b jsou rovny nulle, má být dle II. (13) vyhověno podmínkám

$$\overline{p_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

čímž určeny jsou koëfficienty p_i; při tom

$$\overline{p_i} = \ldots + q_{i-j} u_j + q'_{i-j} \overline{u_j'} + \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, i.$$

Snadno se přesvědčíme, že systemu těchto n rovnic vyhovuje řešení $p_i = c_i$ jako v čl. 2. Pak totiž jest $h = -c_{n-1}$, $H = -c_n$, tudíž

$$\begin{aligned} u_j = (-1)^j \left(\frac{c^n}{c_{n-1}}\right)^j [&\overline{n-i+j-1}_j - \overline{n-i+j-2}_{j-1} \\ &- \overline{n-i-1}_1 (\overline{n-i+j-1}_{j-1} - \overline{n-i-j-2}_{j-2}) \\ &+ \overline{n-i}_2 (\overline{n-i+j-1}_{j-2} - \overline{n-i+j-2}_{j-3}) \\ &\vdots \\ &+ (-1)^i \overline{n-2}_i (\overline{n-i+j-1}_{j-i} - \overline{n-i+j-2}_{j-i-1})], \\ &j = 1, 2, \ldots, i. \end{aligned}$$

Binomické koëfficienty v hranatých závorkách dávají nullu, tudíž $u_j = 0$, je-li $j > 0$, $u_0 = 1$. Rovnice (4) znějí pak $q_i = p_i$ a dosadíme-li $p_i = c_i$, obdržíme identity. Tudíž rovnice transformací kask. o 4 inv. se neměnící jest opět rovnice (1) o stálých koëfficientech.

Chceme-li ji na základě této vlastnosti integrovati, pišme ji dle II. (2) ve tvaru

$$y_1'' + c_{n-1} y' + c_n y = 0, \quad y_1 = y^{n-2} + c_1 y^{n-3} + \ldots + c_{n-2} y;$$

připojíme-li vztah $y_1 = C y$ a vyloučíme-li C, y_1, obdržíme integrál y. Vyloučením y_1 vznikne především

$$y'' + \frac{c_{n-1}}{C} y' + \frac{c_n}{C} y = 0, \quad y^{n-2} + c_1 y^{n-3} + \ldots + (c_{n-2} - C) y = 0.$$

Je-li α jeden z kořenů rovnice $C\alpha^2 + c_{n-1}\alpha + c_n = 0$, dává první z obou rovnic $y = e^{\alpha x}$; dosadíce tuto hodnotu do druhé rovnice a píšíce

*) Schlessinger, Hdbch der lin. Diff.-Gl. I. p. 36.

$C = -\frac{c_{n-1}\alpha + c_n}{\alpha^2}$, obdržíme pro α opět karakt. rovnici a týž integrál jako v čl. 2.

Odvoďme nyní rovnici, o níž platí $R_1 \equiv R$, je-li $a \neq 0$, $b \neq 0$, a sice pro komplikovanost jen pro případ $n = 3$. Poněvadž ve II. odvozeny koëfficienty rovnice R_1 jen při $a = b = 0$, nutno transformovati R na R_1 i v tomto obecném případě.

Rovnici 3^ho^ řádu R

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0$$

lze při libovolném a, b psát buď

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 - h y' - H y = 0, \quad y_1 = y' + q y \tag{5}$$

nebo

$$y_1' + q y_1 - k y' - K y = 0, \quad y_1 = y'' + a y' + b y,$$

kde

$$\left.\begin{aligned} q &= p_1 - a, \\ h &= 2q' + a q + b - p_2, \\ H &= q'' + a q' + b q - p_3, \\ k &= a' + b + a q - p_2, \\ K &= b' + b q - p_3 . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Vyloučíme-li y_1 z (5), vznikne transformovaná rovnice R_1

$$y_1''' + \overline{p_1} y'' + \overline{p_2} y' + \overline{p_3} y = 0,$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \overline{p_1} &= a + q - D\,l\,(q h - H), \\ \overline{p_2} &= a' + b + a q - h - a\,D\,l\,(q h - H), \\ \overline{p_3} &= b' + b q - h' - H + (h - b)\,D\,l\,(q h - H). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Koëfficienty rovnice transformací touto se neměnící jsou tudíž dány rovnicemi

$$\overline{p_1} = p_1, \quad \overline{p_2} = p_2, \quad \overline{p_3} = p_3.$$

První z těchto rovnic dává $(p_1 - a)\, h - H = c_1$, tedy druhá vzhledem k hodnotě h dle (6) určuje

$$p_1 = \frac{3}{2} a + c_2,$$

třetí, dosadíme-li za H výraz dle (6), stanoví

$$p_2 = \frac{a_2}{4} + \frac{3}{2} a' + a c_2 + c_3;$$

konečně dává táž třetí rovnice

$$p_3 = \frac{a_2}{8} + \frac{a''}{2} + \frac{3}{4} a a' + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a'}{2}\right) c_2 + \frac{a}{2} c_3 + c_2 c_3 + c_1.$$

Koëfficienty jsou tudíž na b nezávislé a tytéž jako v (3), dosadíme-li $\frac{a}{2}$ místo a. Tudíž rovnice tvaru (1), (3) se reprodukují kaskádní transformací o 2 i o 4 invariantech.

4. Při dvou proměnných probrána v Darbouxových „Surfaces" (t. II. p. 31.) podobná úloha a udáno, že rovnice transformací Laplaceovou se neměnící zní

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z = 0.$$

Lze však všeobecněji vysloviti, že nemění se podobnou transformací lineární rovnice n^{ho} řádu o m proměnných se stálými koëfficienty. Nejsou-li koëfficienty stálé, nelze ovšem pro $m > 2$ ani při $n = 2$ rovnici takto vůbec transformovati.

Tak na př. pro $n = 3$, $m = 2$ lze rovnici psát ve tvaru

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + a \frac{\partial z_1}{\partial y} + b z_1 - h \frac{\partial z}{\partial y} - k z = 0,$$

$$z_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon z.$$

Eliminací z_1 obdržíme původní rovnici, vyloučíme-li z, vznikne rovnice v z_1 s původní totožná.

Z této vlastnosti plyne i integrace těchto rovnic jako při jediné proměnné v čl. 2. Dosadíme-li $z_1 = C z$, máme soustavu tří rovnic pro neznámé z, z_1, C. První rovnice dává

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \left(a - \frac{h}{C}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \left(b - \frac{k}{C}\right) z = 0, \quad \text{tedy} \quad z = e^{mx + ny},$$

kde m, n je pár kořenů rovnice $m + \left(a - \frac{h}{C}\right) n + b - \frac{k}{C} = 0$, z níž plyne

$$C = \frac{h n + k}{m + a n + b}.$$

Dáme-li do druhé rovnice hodnoty $z_1 = C z$, $z = e^{mx + ny}$ a právě stanovenou hodnotu C, obdržíme pro m, n známou karakt. rovnici 3^{ho} stupně; dosazením do $z = e^{mx + ny}$ máme všeobecné řešení $z = \Sigma C e^{mx + ny}$. Jest patrné, že totéž platí pro libovolné m, n.

b) $R_2 \equiv R$.

5. Nalézti jest rovnici o jediné proměnné, která se reprodukuje, transformujeme-li ji kaskádně dvakrát za sebou. Při dvou proměnných

poznamenává Darboux*) o téže úloze, že lze ji převésti na integraci rovnice

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial y} = 2 (e^{\omega} - e^{-\omega}), \tag{8}$$

aniž by úlohu dále prováděl. Jmenovitě není uvedeno, že rovnici dávající řadu periodickou lze na základě této vlastnosti alespoň částečně integrovati. Poněvadž při jediné proměnné pro $n = 2$ platí dle I. (14) analogické relace, jichž užil Darboux při 2 proměnných, dojdeme k rovnici k (8) analogické.

Označme při rovnici R řádu 2^{ho} — při řádu vyšším jest úloha nesnadná — koëfficienty p, q a invarianty h, k, při R_1 podobně p_1, q_1, h_1, k_1, při R_2 pak p_2, q_2, h_2, k_2. Pak jest $h_1 = k$, $k_1 = h$ a poněvadž invarianty h, k určují koëfficienty p, q a obráceně, jest úloha vyslovena podmínkami

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= p, \\ q_2 &= q \end{aligned}\right\} \quad \text{čili} \quad \left.\begin{aligned} h_2 &= h, \\ k_2 &= k. \end{aligned}\right\}$$

Dle I. (14) možná však psát (předpoklad $a \neq 0$ úlohu zde nijak nekomplikuje)

$$\begin{aligned} 2h - 2k - 2D^2 l h - D^2 l k &= 0 \\ 2h - 2k - D^2 l h &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením obdržíme

$$D^2 l h k = 0 \quad \text{čili} \quad h k = e^{C_1 x + C_2}.$$

Zvolme pro zjednodušení úlohy integrační konstanty $C_1 = C_2 = 0$. Pak $k = \frac{1}{h}$ a podmínka zní

$$D^2 l h = 2 \left(h - \frac{1}{h}\right);$$

dosadíme-li pro $h = e^{2\omega}$, obdržíme

$$\frac{d^2 \omega}{d x^2} = e^{2\omega} - e^{-2\omega}$$

analogicky k (8).

Abychom úlohu dokončili, pišme

$$\frac{d^2 \omega}{d x^2} = 2 \, hyp \, sin \, (2 \omega)$$

čili

$$\left(\frac{d \omega}{d x}\right)^2 = 4 \, hyp \, sin^2 \omega + const;$$

položíme-li $const = 0$, obdržíme rovnici

$$\frac{d \omega}{d x} = 2 \, hyp \, sin \, \omega,$$

---

*) Surfaces, t. II. p. 31.

jejíž řešení jest

$$\omega = l\,\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$$

a při zpětné substituci

$$h = \left(\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}\right)^2, \qquad \text{tudíž} \qquad k = \left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)^2.$$

Dle vzorců I. (14) najdeme

$$p = 2a + \frac{4e^{2x}}{1-e^{4x}} + c\,,$$

$$q = a' + a^2 + \frac{4e^{2x}}{1-e^{4x}}\,.\,a - \left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)^2,$$

čímž úloha rozřešena, ovšem ne v úplné všeobecnosti, poněvadž jsme položili tři konstanty integrační nulle rovny, řešení provedeno jen pro $n = 2$ a pro 2 invarianty.

Tudíž rovnice

$$y'' + \left(2a + \frac{4e^{2x}}{1-e^{4x}} + c\right)y' + \left[a' + a^2 + \frac{4e^{2x}}{1-e^{4x}}\,a - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)^2\right] y = 0, \tag{9}$$

kde a je libovolná funkce x, pak c libovolná konstanta, dvojí kaskádní transformací posloupně provedenou se nezmění.

Znajíce tuto vlastnost, která rovnici patrně charakterisuje, můžeme nalézti též *řešení* rovnice. Pišme ji totiž ve tvaru dle I. (1)

$$y_1' + a\,y_1 - h\,y = 0, \quad y_1 = y' + (p - a)\,y,$$

při čemž eliminací y obdržíme transformovanou rovnici R_1. Pišme opětně R_1 v podobě

$$y_2' + a\,y_2 - h_1\,y_1 = 0, \quad y_2 = y_1' + (p_1 - a)\,y_1,$$

tak že eliminací y_1 vznikne rovnice R_2. Poněvadž $R_2 \equiv R$, jest $y_2 = y$ a rovnice 1ní a 4tá nebo 2há a 3tí dají po eliminaci y_1 rovnici prvního řádu, v níž se vyskytuje toliko y, kteréž obdržíme tedy kvadraturou.

Tak dosadíme-li na př. do třetí rovnice $y_2 = y$ a z druhé $y_1 = y' + (p - a)\,y$, vznikne

$$y' + \left[a - \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{c\,(1-e^{2x})^2}{4\,e^{2x}}\right] y = 0\,,$$

tedy

$$y = \frac{C_1\,e^{x+M}}{1+e^{2x}}\,, \qquad M = \frac{1}{8}\,c\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}} - 4x\right) - \int a\,dx$$

jakožto partitulární integrál rovnice (9). Kvadraturou najdeme tudíž i druhý integrál partikulární

$$y = \frac{C_2 e^{x+M}}{1+e^{2x}} \int \frac{(1-e^{4x})}{e^{2x}} \frac{e^{-M}}{} dx.$$

Rovnice (9) jest nejjednodušší pro $a = c = 0$; píšeme-li pak ještě x místo e^{2x}, nabude tvaru

$$y'' + \frac{2}{1-x^2} y' - \frac{1}{4x^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 y = 0$$

a má řešení

$$y = \frac{C_1 \sqrt{x}}{1+x} + \frac{C_2 (1+x^2)}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

6. Při dvou proměnných jsou úvahy zcela analogické. Rovnice dvojí kaskádní transformací se reprodukující pokládáme za danou, jsou-li dány její invarianty h, k; tyto však určeny jsou rovnicemi

$$\frac{\partial^2 l\, h}{\partial x\, \partial y} = 2\left(h - \frac{1}{h}\right), \quad k = \frac{1}{h}.$$

Všeobecné řešení těchto rovnic jest obtížné. Avšak jakékoli partikulární řešení udává rovnici partiellní, jejíž řešení alespoň z části lze provésti t. j. lze je přenésti na integraci rovnice s derivacemi partiellními řádu 1^{ho}.

Tak na př. uhodneme dle předešlého čl. specielní řešení

$$h = \left(\frac{1+e^{2(x+y)}}{1-e^{2(x+y)}}\right)^2,$$

takže rovnice dvojí kaskádní transformací se neměnící zní

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{4\, e^{2(x+y)}}{1-e^{4(x+y)}} \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{1-e^{2(x+y)}}{1+e^{2(x+y)}}\right)^2 z = 0. \qquad (10)$$

Pišme ji ve tvaru

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\, z_1 - h\, z = 0, \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + a\, z.$$

Eliminací z obdržíme rovnici transformovanou, tu pak můžeme opět psát ve dvou rovnicích

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} + b_1 z_2 - h_1 z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{\partial z_1}{\partial y} + a_1 z_1.$$

Druhá a třetí z těchto rovnic, vyloučíme-li z nich z_1 a položíme-li $z_2 = z$, dává pro z rovnici řádu 1^{ho}

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{1-e^{2(x+y)}}{1+e^{2(x+y)}}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{4\, e^{2(x+y)}\,(1-e^{2(x+y)})}{(1+e^{2(x+y)})^3} z = 0,$$

jejíž všeobecný integrál jest partikulárním řešením rovnice (10).

Příspěvek ku theorii lineárních systémů lineárních komplexů.

Napsal

Dr. **VÁCLAV SIMANDL,**
assistent české techniky v Brně.

(Předloženo dne 13. února 1914.)

OBSAH:

I. *O zobecněných kongruencích Wälschových.*

1. Definice, řád a třída zobecněných kongruencí Wälschových.
2. O involutorně přidružených kongruencích C_{33} a C'_{33}.
3. O systémech ploch v kongruencích C_{33}.
4. Speciální polohy základního hyperboloidu komplexového systému S_2 ku ploše absolutní $\mathfrak{A}^2$.
5. Zobecněné kongruence Wälschovy pro absolutní plochu degenerovanou.

II. *O zobecněném* A^2 *komplexu.*

6. Zobecněný A^2 komplex jest komplexem quadratickým.
7. Vytvoření zobecněného A^2 komplexu ze dvou polárních svazků lineárních komplexů a jeho plocha singulární.
8. Věta o zobecněném A^2 komplexu.
9. Sestrojení komplexových křivek a kuželů.
10. Speciální polohy základních přímek komplexového systému S_3 vzhledem ku absolutní ploše.
11. Zobecněný A^2 komplex pro absolutní plochu degenerovanou.
12. O plochách P^4 a hyperboloidech v zobecněném A^2 komplexu.
13. Applikace na A^2 komplex a konoid Plückerův.
14. O kongruencích C_{33} v zobecněném A^2 komplexu.

III. *O geometrických místech konjugovaných polár společných vždy dvěma lineárním komplexům ze dvou komplexových systémů.*

15. Případ, kdy polarita absolutní plochy při dříve uvažovaných geometrických místech nahrazena jest polaritou lineárního komplexu.
16. Rozšíření úvah v odstavci předešlém.

Z theorie lineárních systémů lineárních komplexů jest známo, že geometrické místo os všech lineárních komplexu lineárního systému druhého stupně S_2 jest kongruence druhé třídy a třetího řádu, jejímž studiem zejména E. Wälsch se zabýval. Při lineárním systému třetího stupně S_3 representuje pak geometrické místo os všech lineárních komplexů tohoto systému určitý quadratický komplex dle Sturma nazvaný A^2 komplex. V této práci budeme studovati syntheticky projektivně zobecněná tato geometrická místa, t. j. budeme hledati společné konjugované poláry dané plochy 2. stupně $\mathfrak{A}^2$ a jednotlivých komplexů ze systému S_2 resp. S_3. Plochu $\mathfrak{A}^2$ budeme pak nazývati plochou absolutní. Provedeme zde analogické úvahy při komplexových systémech S_2 a S_3 jako jsme provedli při komplexovém svazku S_1 ve článku: „O zobecněném cylindroidu," uveřejněném též v tomto ročníku Rozprav České Akademie v čísle 12.

Posléze si též v práci této povšimneme případu, kdy polarita absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ jest nahrazena polaritou lineárního komplexu a vyšetříme geometrická místa párů konj. polár společných vždy dvěma lineárním komplexům ze dvou různých lineárních systémů komplexových.

I.

O zobecněných kongruencích Wälschových.

1. Definice, řád a třída zobecněných kongruencí Wälschových.

Buď dán lineární systém druhého stupně S_2 lineárních komplexů. Buď H^2 sborcená plocha řídicích přímek všech speciálních komplexů systému, t. ř. základní hyperboloid systému, a označme si systém přímek hyperboloidu H^2, který vyplňují tyto řídicí přímky jakožto systém Σ a budiž dále Σ' druhý systém přímek hyperboloidu H^2. Systém přímek Σ' jest patrně souhrn všech komplexových přímek společných všem ∞^2 lineárním komplexům systému S_2. Každé dvě přímky systému Σ lze pokládati za konjugované poláry vzhledem k určitému svazku lineárních komplexů obsaženému v S_2. Máme pak problém: nalézti geometrické místo zobecněných párů osových, čili ježto každé dva páry konj. polár téhož komplexu tvoří hyperboloidickou čtveřinu, můžeme naše geometrické místo definovati jako souhrn párů konjugovaných polár absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$, které s kterýmikoli dvěma přímkami jedné soustavy daného hyperboloidu H^2 tvoří hyperboloidickou čtveřinu.

Hledáme společné konj. poláry vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ a vzhledem ku všem lineárním komplexům systému S_2. Geometrické místo to nalezneme, nalezneme-li vždy obě transversály r, s kterýchkoli dvou přímek l, k systému Σ' hyperboloidu H^2 a jejich konj. polár l', k' vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Lze totiž transversály r, s pokládati vždy za pár konj. polár určitého komplexu systému S_2, kterýžto komplex jest stanoven právě tímto párem konj. polár a pak kteroukoli přímkou systému Σ'. A vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ jsou r, s

konjugovány, ježto jsou transversálami dvou párů konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$, totiž párů l, l'; k, k'.

V systému Σ' hyperboloidu H^2 lze si vytknouti ∞^2 dvojin přímek l, k a tak dospějeme ku ∞^2 párům přímek r, s, které vyplní hledanou kongruenci, kterou si označíme C_{33}, ježto jest třetího řádu a třetí třídy, což ihned dokážeme.

Sestrojíme si ku přímkám systému Σ' plochy H^2 vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polární systém Σ_1' a hledáme všecky páry přímek, které protínají současně dva páry si odpovídajících přímek v systémech Σ' a Σ_1'.

Mysleme si libovolným bodem P prostorový svazek přímek. Každá přímka p z ∞^2 přímek tohoto svazku protíná dvě přímky g, h systému Σ'. Přímkám g, h polaritou plochy $\mathfrak{A}^2$ odpovídají přímky g' h' systému Σ_1'. Příčku p' bodem P ku přímkám g', h' přiřaďme příčce p. Tímto přiřazením příček p ku příčkám p' dospíváme ku kollineaci ve svazku prostorovém P, která má tři páry samodružné odpovídajících si příček p, p'. Jdou tedy každým bodem prostoru tři příčky dvou si odpovídajících párů přímek polárně konjugovaných systémů Σ' a Σ_1'.

Jest tedy naše kongruence třetího řádu.

Mysleme si v libovolné rovině π rovinné pole přímek. Každá přímka p z ∞^2 přímek tohoto pole protíná dvě přímky g, h systému Σ'. Přímkám g, h polaritou plochy $\mathfrak{A}^2$ odpovídají přímky g', h' systému Σ_1'. Příčku p' v rovině π ku přímkám g', h' přiřaďme příčce p. Tímto přiřazením příček p ku příčkám p' dospíváme ku kollineaci v rovinném poli π, která má tři samodružné páry odpovídajících si příček p, p'. Leží tedy v každé rovině tři příčky dvou si odpovídajících párů přímek polárně konjugovaných systémů Σ' a Σ_1'.

Jest tedy naše kongruence třetí třídy.

Můžeme pak vysloviti věty:

Geometrické místo párů konjugovaných polár dané plochy 2. stupně $\mathfrak{A}^2$, které tvoří hyperboloidickou čtveřinu s kterýmikoli dvěma přímkami téhož systému Σ daného hyperboloidu H^2 jest v sobě duální kongruence třetího řádu a třetí třídy C_{33}.

Považujeme-li $\mathfrak{A}^2$ za absolutní plochu, možno kongruenci C_{33} považovati za geometrické místo zobecněných párů osových lineárního systému 2. stupně S_2 lineárních komplexů stanoveného hyperboloidem H^2 a jeho systémem Σ jako souhrnem řídících přímek speciálních komplexů systému S_2. Můžeme proto kongruenci C_{33} nazvati zobecněnou kongruencí Wälschovou.

Kongruence Wälschovy, které obdržíme, když $\mathfrak{A}^2$ nahradíme kulovou kružnicí v nekonečnu, jsou třetího stupně a druhé třídy. O kon-

gruencích těch pojednal E. Wälsch v pojednání: „Über ein Strahlensystem beim Hyperboloid". (Wiener Sitzungsberichte, svazek 95. II. r. 1887, pag. 781.)

2. O involutorně přidružených kongruencích C_{33} a C_{33}'.

Wälsch ve svém zde právě citovaném pojednání o kongruencích (3, 2) objevil zejména charakteristickou vlastnost těchto kongruencí, že se dají vždy dvě takové kongruence k sobě tak přiřaditi, že každá taková kongruence se skládá ze všech os párů mimoběžných přímek druhé kongruence. Dokážeme, že věta ta projektivně zobecněná platí pro naše kongruence (3, 3).

Před tím si vytkneme pojem involutorně přidružených kongruencí C_{33}' ku kongruencím C_{33}. To vyslovíme větou:

Týmže způsobem, jako jsme dospěli od systému přímek Σ hyperboloidu H^2 ku kongruenci C_{33}, dospíváme od druhého systému Σ' tohoto hyperboloidu ku určité kongruenci C_{33}'. Kongruenci C_{33}' nazveme involutorně přidruženou kongruenci C_{33}.

Patrno jest, že jako kongruence C_{33} jakožto geometrické místo zobecněných párů osových přísluší systému komplexovému S_2, že kongruence C_{33}' přísluší komplexovému systému, který jest s tímto v involuci a který si označíme S_2'. Všechny lineární komplexy systému S_2' mají společné přímky systému Σ plochy H^2 a systém přímek Σ' této plochy vyplňují řídící přímky speciálních komplexů systému S_2'. Z důvodu involutornosti systémů S_2 a S_2' nazvali jsme kongruence C_{33} a C_{33}' involutorně přidruženými.

Každá z kongruencí C_{33} a C_{33}' jest patrně ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní. Jednotlivé polárně invariantní páry jejích přímek budeme nazývati konjugovanými přímkami těchto kongruencí. Dokážeme pak větu:

Sestrojíme-li obě společné transversály dvou párů konjugovaných přímek zobecněné kongruence Wälschovy, tu jsou tyto transversály párem konjugovaných přímek kongruence k prvé involutorně přidružené.

Mysleme si v kongruenci C_{33} dva páry konjugovaných přímek r, r'; s, s'; a buďtež t, t' jejich obě společné transversály. Pár přímek r, r' protínej systém Σ hyperboloidu H^2 v přímkách a, b, a pár s, s' v přímkách c, d. Dva páry přímek a, b; c, d možno považovati za dva páry konj. polár určitého lineárního komplexu Γ, náležejícího komplexovému systému S_2, a tedy páry přímek r, r'; s, s', které předešlé páry protínají možno považovati za přímky komplexu Γ. Avšak obě transversály kterýchkoli čtyř přímek lineárního komplexu tvoří pár konj. polár tohoto komplexu. I jsou transversály t, t' konj. polárami komplexu Γ, zároveň pak jsou t, t' konj. polárami $\mathfrak{A}^2$, neboť jsou transversálami dvou párů konj. polár této plochy,

totiž párů r, r'; s, s'. Jsou tedy t, t' zobecněným párem osovým komplexu Γ. Jelikož pak komplexu Γ jakožto komplexu systému S_2 náleží systém přímek Σ' hyperboloidu H^2, tu musí zobecněný pár osový, který protíná dvě určité přímky systému Σ' též protínati jejich vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konj. poláry. Avšak tímto způsobem přicházíme od systému Σ' hyperboloidu H^2 ku kongruenci C_{33}'. Jsou tedy přímky t, t' skutečně přímkami této kongruence, jak bylo dokázati.

Ukážeme nyní, kterak se tento důkaz modifikuje pro ten speciální případ, že absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ jest nahrazena kulovou kružnicí v nekonečnu. Dostaneme tak zároveň jiný důkaz pro větu než kterým ji dokázal Wälsch ve shora citovaném svém pojednání (p. 782).

Ta věta Wälschova zní:

Sestrojíme-li ku dvěma párům přímek téže soustavy hyperboloidu osy, tu osa těchto os jest osou páru dvou přímek druhé soustavy.

Dva páry prvních dvou přímek lze pokládati za dva páry konjugovaných polár určitého lineárního komplexu. Osu tohoto lineárního komplexu sestrojíme, když sestrojíme osy obou párů přímek a osu těchto os. Přímky druhé soustavy náleží vesměs lineárnímu komplexu. Jelikož osa lineárního komplexu protíná jen komplexové přímky k ní kolmé, musí býti ty dvě přímky hyperboloidu, které protíná, jejími kolmicemi. Tím věta dokázána.

3. O systémech ploch v kongruencích C_{33}.

V tomto odstavci budeme se zabývati systémy význačnějších ploch v zobecněných kongruencích Wälschových a sice zejména ploch stupně druhého. Význačnější ty systémy jsou:

1. systém ∞^4 párů konjugovaných sborcených ploch stupně šestého.
2. systém ∞^2 sborcených ploch stupně čtvrtého se dvěma dvojnými přímkami
3. systém ∞^1 hyperboloidů.

Libovolná přímka d v prostoru vede ku sborcené ploše M^6 stupně šestého v dané kongruenci C_{33} obsažené. Tato přímka d jest řídicí přímkou plochy M^6 a sice trojnásobnou, ježto každým bodem jejím procházejí 3 paprsky kongruence C_{33}, a všecky roviny přímkou d vedené protínají M^6 ještě ve třech přímkách, ježto v každé rovině leží 3 paprsky kongruence. Jest to specialisace známého obecného případu, kdy u kongruence $[m, n]$ dospíváme k sborcené ploše stupně $m + n$. Ježto kongruence C_{33} jest polárně invariantní vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, lze každé ploše M^6 o řídicí přímce d přiřaditi plochu N^6, která jest ku M^6 vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polární. Patrno, že šest přímek, ve kterých se proniká kongruence C_{33} s lineární kongruencí o řídících přímkách d, d', jest částí proniku polárně konjugovaných ploch M^6 a N^6.

Lineární systém lineárních komplexů S_2 obsahuje ∞^2 svazků S_1 lineárních komplexů, kterézto svazky vedou ku systému ∞^2 zobecněných cylindroidů P^4, nalézajících se v kongruenci C_{33}. Ku jednotlivým zobecněným cylindroidům dospějeme od jednotlivých ∞^2 párů přímek m, n systému Σ základního hyperboloidu H^2. Každý cylindroid P^4 má dvě dvojné řídicí přímky p, q, jež tvoří pár konj. polár ku $\mathfrak{A}^2$. Dospíváme tak zároveň ku ∞^2 párům přímek p, q, které vyplňují určitou kongruenci a sice kongruenci C_{33}' involutorně přidruženou kongruenci C_{33}. To jest dokázati.

Lze totiž p, q pokládati za pár přímek kongruence C'_{33}, neboť jednak jsou konj. polárami vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ jednak tvoří hyperboloidickou čtveřinu s ∞^1 páry přímek systému Σ' základního hyperboloidu. Totiž s těmi ∞^1 páry přímek x, y které mají se Σ' společné jednotlivé hyperboloidy speciálního svazku těchto ploch čtyřmi přímkami: m n p, q procházejících. Tím důkaz proveden. Těchto ∞^1 párů x, y tvoří obyčejnou involuci v Σ' a jednotlivé páry této involuce stanoví s přímkami p, q ∞^1 zobecněných cylindroidů P^4. Z toho vidíme zároveň, že každým párem konjugovaných přímek kongruence C_{33} prochází ∞^1 ploch P^4 v této kongruenci obsažených. Ježto párů konjugovaných přímek v C_{33} existuje ∞^2 a každým párem prochází ∞^1 ploch P^4, zdálo by se, že existuje ∞^3 ploch P^4 obsažených v kongruenci C_{33}. Toto množství ∞^3 redukuje se však na ∞^2, když uvážíme, že na P^4 existuje ∞^1 párů konj. přímek. Jsou to patrně ty páry, jež tvoří involuci, kterou jsme nazvali druhou význačnou involucí na P^4.

Výsledky naše můžeme shrnouti ve větu:

V zobecněné kongruenci Wälschově existuje ∞^2 zobecněných cylindroidů, dvojné řídící přímky těchto cylindroidů vyplňují involutorně přidruženou kongruenci.

Uvažujme libovolnou přímku t kongruence C_{33}' sborcenou plochu, kterou vyplňují přímky kongruence C_{33} přímku t protínající. Jest to plocha 6. stupně M^6, jak jsme dříve vytkli, zároveň však jsme seznali, že každou přímku kongruence C_{33}' možno považovati za jednu dvojnásobnou přímku cylindroidu P^4 v C_{33} obsaženého. To možno jest však jen tehdy, když plocha M^6 se rozpadá v plochu P^4 a určitý hyperboloid Q^2.

Tím dospíváme ku systému hyperboloidů Q^2 v kongruenci C_{33}. Podobně existují hyperboloidy Q_1^2 v involutorně přidružené kongruenci C_{33}'. Vidíme dále, že přímky kongruence jedné lze považovati za přímky druhého systému na hyperboloidech kongruence involutorně přidružené. Přímek t jest v kongruenci C_{33}' sice ∞^2 našich hyperboloidů Q^2 jest však pouze ∞^1 a to proto, že ∞^1 přímek t, které náleží druhému systému hyperboloidu Q^2 vedou k témuž hyperboloidu Q^2. I máme větu:

Přímky každé kongruence C_{33} dají se uspořádati v ∞^1 prvních systémů přímkových ∞^1 hyperboloidů. Druhé sy-

stémy těchto hyperboloidů vyplňují kongruenci C_{33}', která jest prvé involutorně přidružena.

Ku kongruenci C_{33} náleží patrně též systémy přímek Σ, Σ_1 hyperboloidů H^2 a H_1^2, které jsou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárními. Ku kongruenci C_{33}' náleží pak druhé systémy přímkové Σ', Σ_1' tohoto základního hyperboloidu H^2 a hyperboloidu H_1^2 k němu vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárního.

Wälsch ve svém citovaném zde pojednání ukázal, že systém ploch 2. stupně v jeho kongruenci (3, 2) jest koaxiální. Dokážeme zde projektivní zobecnění této věty, totiž větu:

Všecky hyperboloidy v kongruenci C_{33} mají společný polární čtyřstěn.

Společný ten polární čtyřstěn jest polární čtyřstěn základního hyperboloidu H^2 a absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ a patrně též hyperboloidu H_1^2. Uvažujme libovolný pár ze tří párů konj. hran tohoto čtyřstěnu, označme si ten pár u, v. Především vidíme, že pár přímek u, v jest párem konjugovaných přímek kongruence C_{33}, neboť protíná vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárné páry přímek systémů Σ' a Σ_1' hyperboloidů H^2 a H_1^2. Podobně jest u, v párem konjugovaných přímek kongruence C_{33}', ježto protíná přímky dvou polárních párů systémů Σ a Σ_1 našich dvou hyperboloidů. Náleží tudíž hrany našeho polárního čtyřstěnu oběma involutorně sdruženým kongruencím.

Konjugovanými poláramí u, v jakožto řídicími přímkami stanoveny jsou dva zobecněné cylindroidy P^1 a P_1^4 příslušné kongruencím C_{33} a C_{33}'. V prvém případě třeba u, v pokládati za přímky kongruence C_{33}', v případě druhém za přímky kongruence C_{33}. Uvažujme na P^1 libovolný pár přímek a, b, který náleží k druhé význačné involuci na P^1. Každým párem těchto přímek a, b kongruenci C_{33} náležejících prochází určitý hyperboloid Q^2 našeho systému. To abychom dokázali, vytkněme si v lineární kongruenci $[u, v]$ příčky c, d tak, aby tyto s příčkami a, b tvořily prostorový čtyřúhelník. Příčky c, d lze považovati za pár přímek konjugovaných involutorně přidružené kongruence C_{33}', neboť jsme k nim dospěli tím způsobem, že ku čtyřem přímkám kongruence C_{33}, totiž přímkám a, b, u, v jsme sestrojili obě společné transversály. A jest nyní patrno, že ku hyperboloidu Q^2 dospíváme od přímky c, nebo d týmže způsobem, jako jsme k němu dospěli dříve od přímky t. Hyperboloid Q^2 obsahuje prostorový čtyřúhelník a, b, c, d i jest patrno, že diagonálné strany u, v tohoto čtyřúhelníka jsou párem konj. polár tohoto hyperboloidu.

Od ∞^1 přímkových párů a, b druhé význačné involuce na P^1 dospíváme ku ∞^1 sborceným čtyřúhelníkům a, b, c, d a tak ku ∞^1 hyperboloidum našich kongruencí. Konj. poláry u, v zůstávají při tom konj. poláramí všech Q^2. Tím věta svrchu uvedená dokázána.

Poznámka. Kongruence naše C_{33} jsou speciálním případem kongruencí (3, 3), ku kterým dospějeme od dvou projektivních lineárních systémů druhého stupně lineárních komplexů tím že uvažujeme geo-

metrické místo řídících přímek všech ∞^2 lineárních kongruencí, ve kterých se pronikají korrespondující komplexy obou systémů. Specialisace naše závisí v tom, že projektivita případu obecného jest nahrazena polaritou absolutní plochy. Kongruence (3, 3) takto vytvořené jsou identické s kongruencemi (3, 3), které vyplní přímky ∞^1 hyperboloidů, ve kterých se pronikají vždy tři korrespondující lineární komplexy tří projektivních svazků lineárních komplexů [viz Sturm: Liniengeometrie I., pag. 217]. Vidíme, že kdybychom byli naše kongruence C_{33} převedli na tento výtvor ze tří projektivních svazků lineárních komplexů, že by byla existence hyperboloidů v nich se nalézajících ihned patrna.

4. Speciální polohy základního hyperboloidu komplexového systému S_2 ku ploše absolutní $\mathfrak{A}^2$.

V tomto odstavci ukážeme v jaká geometrická místa zobecněné kongruence Wälschovy přecházejí při některých ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ zvláštních polohách základního hyperboloidu H^2 komplexového systému S_2. Buďtež zase Σ, Σ' oba systémy přímek na H^2, kde prvý vyplňují řídicí přímky speciálních komplexů systému S_2, druhý komplexové přímky společné všem komplexům systému S_2.

Speciální polohy H^2 ku $\mathfrak{A}^2$ buďtež:

1. $\mathfrak{A}^2$ obsahuje řídicí přímku jednoho speciálního komplexu systému S_2.
2. H^2 jest ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní.
3. H^2 se stotožňuje s $\mathfrak{A}^2$.

Případ první,

Označme si d za společný paprsek, který má systém Σ plochy H^2 s absolutní plochou $\mathfrak{A}^2$. Mají tedy též systém Σ a systém Σ_1 prvnějšímu vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárný společný paprsek d. Všech ∞^2 lineárních komplexů systému S_2 lze si mysliti rozděleno na ∞^1 svazků S_1 těchto komplexů tak, že řídicími přímkami příslušných ∞^1 lineárních kongruencí jest přímka d a vždy jedna z ∞^1 přímek x systému Σ. A geometrické místo zobecněných párů osových komplexů systému S_2 budeme hledati jakožto souhrn ∞^1 zobecněných cylindroidů příslušných ∞^1 lineárním kongruencím $[d, x]$. Avšak při třetím speciálním případu v odstavci 7. citovaného zde na počátku pojednání „O zobecněném cylindroidu“ uveřejněného v 12. čísle „Rozprav Akademie“ tohoto ročníku jsme odvodili, že zobecněné cylindroidy v případě, že jedna přímka z řídicích přímek příslušné kongruence leží na $\mathfrak{A}^2$ přecházejí v polárně invariantní hyperboloidy vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, řídicími přímkami základní kongruence proložené. Vidíme tedy, že naši hledanou kongruenci vyplňují první systémy ∞^1 hyperboloidů přímkami d, x, x' stanovené, kde x' jest konj. polára přímky x vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$.

Označme si hledanou kongruenci C_{22} a kongruenci, již vyplňují řídicí systémy systémů (d, x, x') na našich hyperboloidech jako kongruenci C_{22}'.

Z libovolného bodu P promítejtež se hyperboloid H^2 a k němu vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárný hyperboloid H_1^2 kužely druhé třídy $\varkappa^2$ a $\varkappa_1^2$. Přímka d stanov s bodem P rovinu δ, jest to jedna ze 4 společných rovin tečných kuželů $\varkappa^2$ a $\varkappa_1^2$. V rovině δ dostáváme dva projektivní svazky paprskové bodem P procházející, odpovídají si totiž vždy dva paprsky vyťaté tečnými rovinami kuželů $\varkappa^2$ a $\varkappa^1$ stanovené vždy dvěma vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konjugovanými přímkami hyperboloidů H^2 a H_1^2. Dva v této projektivitě koincidenční paprsky u', v' jsou patrně dvěma paprsky kongruence C_{22}' bodem P procházejícími. Jest tedy kongruence C_{22}' druhého řádu.

Přímky u', v' náleží řídicím systémům přímek dvou určitých hyperboloidů. Bodem P procházejí patrně ještě přímky u, v, které náleží původním systémům těchto hyperboloidů v kongruenci C_{22} obsaženým. Jelikož mimo přímky u', v' jiné přímky řídicích systémů našich ∞^1 hyperboloidů bodem P neprocházejí, nemohou bodem P také procházeti jiné přímky z původních systémů těchto hyperboloidů, kromě přímek u, v.

Jest tedy kongruence C_{22} druhého řádu.

Libovolná rovina π protínejž základní hyperboloid H^2 a k němu vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárný hyperboloid H_1^2 v kuželosečkách k^2 a k_1^2. Průsečík přímky d s rovinou π budiž D, jeden ze 4 společných bodů kuželoseček k^2 a k_1^2. V bodu D co vrcholu dostáváme dva projektivní svazky paprskové v rovině π ležící, odpovídají si totiž vždy dva paprsky procházející body na kuželosečkách k^2 a k_1^2, vyťatými vždy dvěma vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konjugovanými přímkami hyperboloidů H^2 a H_1^2. Dva v této projektivitě koincidenční paprsky u', v', jsou patrně dvěma paprsky kongruence C_{22}' v rovině π ležícími. Jest tedy kongruence C_{22}' druhé třídy.

Přímky u', v' náleží řídicím systémům přímek dvou určitých hyperboloidů. V rovině π leží patrně ještě přímky u, v, které náleží původním systémům těchto hyperboloidů v kongruenci C_{22} obsaženým. Jelikož mimo přímky u', v' jiné přímky řídicích systémů našich ∞^1 hyperboloidů v rovině π neleží, nemohou v π také ležeti jiné přímky z původních systémů těchto hyperboloidů kromě přímek u, v.

Jest tedy kongruence C_{22} druhé třídy.

Patrno jest, že přímka d jest dvojnou přímkou kongruence C_{22}, neboť pro každý její bod nebo pro kteroukoli rovinu jí proloženou oba paprsky kongruence splývají v d.

Můžeme pak vysloviti větu:

Leží-li řídicí přímka jednoho speciálního lineárního komplexu lineárního komplexového systému S_2 na absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$, tu jest geometrickým místem zobecněných párů osových kongruence druhého řádu a druhé třídy.

Případ druhý.

V druhém případě má základní hyperboloid H^2 s absolutní plochou $\mathfrak{A}^2$ dvě přímky m, n systému Σ společné a tedy musí s ní míti společné též dvě přímky m', n' druhého systému Σ'. Hyperboloid H^2 maje s $\mathfrak{A}^2$ společný prostorový čtyřúhelník o stranách m, n, m', n' jest vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantním a libovolné přímce x systému Σ odpovídá polaritou plochy $\mathfrak{A}^2$ přímka y téhož systému tak, že přímky m, n ji od přímky x oddělují harmonicky. Páry x, y tvoří patrně involuci o samodružných přímkách m, n. Všechny ∞^2 komplexy systému S_2 můžeme uspořádati v ∞^1 svazků S_1, jichž základní lineární kongruence mají za řídicí přímky páry přímek x, y na hyperboloidu H^2. Ježto řídicí přímky x, y jsou konj. polárami vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, jsou naše ∞^1 svazky S_1 projektivně zobecněnými souosými svazky lineárních komplexů (viz 1. případ speciální v odst. 7. citovaného již pojednání „O zobecněném cylindroidu"). Ukázali jsme též na onom místě, že každý svazek projektivně zobecněných souosých lineárních komplexů o zobecněném páru osovém x, y stanoví dva vzhledem ku absolutní ploše polárně invariantní lineární komplexy, které mají ∞^2 zobecněných párů osových, jež vyplňují u každého z dotyčných dvou komplexů lineární kongruenci, jejímiž řídicími přímkami jsou dvě protější strany prostorového čtyřúhelníka, který přímky lineární kongruence $[x, y]$ z plochy $\mathfrak{A}^2$ vytínají.

Jedním párem protějších stran ∞^1 sborcených čtyřúhelníků, které přímky všech ∞^1 lineárních kongruencí $[x, y]$ z $\mathfrak{A}^2$ vytínají, jest pár přímek m', n', který jest patrně všem ∞^1 sborceným čtyřúhelníkům společný. Druhý pár protějších stran těchto čtyřúhelníků sborcených označme u, v a snadno lze nahlédnouti, že všecky ∞^1 páry u, v tvoří involuci, jejímiž samodružnými přímkami jsou přímky m, n. Vidíme, že souhrn všech lineárních kongruencí $[u, v]$ jest dle Chaslesova vytvoření lineárního komplexu určitý lineární komplex Γ, který ježto obsahuje jeden systém přímek absolutní plochy, jest vzhledem ku této polárně invariantním.

Vyplňují tedy zobecněné páry osové v tomto speciálním případě lineární kongruenci $[m' n']$ a lineární komplex Γ procházející dvěma přímkami m, n jednoho systému a všemi přímkami druhého systému absolutní plochy. Přímky m', n' jsou patrně komplexové přímky všech komplexu našeho systému S_2, které leží na $\mathfrak{A}^2$.

Kdybychom uvažovali tomuto případu involutorně přidružený případ, to jest kdyby řídicí přímky všech speciálních komplexů systému S_2' vyplňovaly systém Σ' hyperboloidu H^2, tu by vyplňovaly zobecněné páry osové lineární kongruenci $[m, n]$ a lineární komplex Γ' procházející přímkami m, n a všemi přímkami toho systému přímek absolutní plochy, který tyto přímky neobsahuje.

Naše výsledky pak můžeme sbrnouti ve větu:

Je-li základní hyperboloid H^2 lineárního systému S_2 lineárních komplexů vzhledem ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ polárně

invariantním, tu jest geometrickým místem zobecněných párů osových komplexů systému S_2 lineární kongruence a ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní lineární komplex Γ.

Řídicími přímkami této lineární kongruence jsou dvě přímky všem komplexům systému S_2 společné a na $\mathfrak{A}^2$ ležící. Komplex Γ jest pak stanoven involucí svých konjugovaných polár na $\mathfrak{A}^2$, jejímiž samodružnými přímkami jsou dvě řídicí přímky dvou speciálních komplexů systému S^2 na ploše $\mathfrak{A}^2$ ležící.

Případ třetí.

Dokážeme větu:

V případě, že základní hyperboloid H^2 se stotožňuje s absolutní plochou $\mathfrak{A}^2$, vyplňují naše geometrické místo všecky přímky prostoru.

Buď zase Σ systém přímek hyperboloidu H^2, který vyplňují řídicí přímky speciálních komplexů našeho systému S_2. Buď k, k' libovolný pár konj. polár absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$. Tyto poláry protínají dvě určité přímky t, v v systému Σ. Každý pak pár x, y involuce přímek v Σ, jejímiž samodružnými přímkami jsou t, v tvoří s polárami k, k' hyperboloidickou čtveřinu. To jest patrno z toho, že dva páry přímek x, y; k, k' lze pokládati za dva páry konjugovaných polár téhož lineárního komplexu, totiž lineárního komplexu stanoveného párem konj. polár k, k' a určitou přímkou systému Σ', řídicího to systému systému Σ hyperboloidu H^2.

5. Zobecněné kongruence Wälschovy pro absolutní plochu degenerovanou.

V rovině π buď dána absolutní kuželosečka a^2. Polaritou kuželosečky a^2 odpovídá systému přímek Σ' na základním hyperboloidu H^2 systém přímek v rovině π, které obalují určitou kuželosečku s^2, která jest vzhledem na a^2 polární ku kuželosečce h^2, kterou v π vytíná hyperboloid H^2. Vytkněme si v systému Σ' hyperboloidu H^2 dvě přímky l, k a sestrojme si jejich vzhledem ku a^2 konj. poláry l', k'. Ježto l', k' leží v π, leží v té rovině též jedna ze dvou transversál r, s čtyř přímek l, k, l', k'. Tuto transversálu, na př. r, dostaneme jako spojnici bodů L, K, které přímky l, k v rovině π vytínají. Pár přímek r, s lze pokládati za zobecněný pár osový určitého lin. komplexu našeho komplexového systému S_2. Přímky r náleží tudíž příslušné zobecněné kongruenci Wälschově C_{33}, tyto přímky r zaujmou však všech ∞^2 poloh v rovině π, ježto je můžeme vésti jakožto spojnice všech ∞^2 dvojin bodových L, K na kuželosečce h^2.

Náleží tudíž rovinné přímkové pole π naší kongruenci C_{33}, jejíž třída se tudíž sníží o 1, jest pak tedy 2. třídy. I máme větu:

Je-li absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ nahrazena kuželosečkou a^2, tu jest geometrickým místem zobecněných párů osových všech lin. komplexů systému S_2 kongruence třetího řádu

a druhé třídy C_{32} a rovinné pole přímek, jichž nositelem jest rovina kuželosečky a^2.

Úvahami zcela duálními dospíváme při degeneraci $\mathfrak{A}^2$ v kužel 2. třídy α^2 ku větě:

Je-li absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ nahrazena kuželem 2. třídy α^2, tu jest geometrickým místem zobecněných párů osových všech lin. komplexů systému S_2 kongruence druhého řádu a třetí třídy C_{23} a prostorový svazek všech přímek procházejících vrcholem kužele α^2.

Při kongruencích C_{32} jest rovina π absolutní kuželosečky a^2 singulární rovinou 2. stupně této kongruence, neboť obsahuje ∞^1 přímek kongruence, které obalují kuželosečku a^2. Lze totiž kterýkoli z ∞^2 párů tečen kuželosečky a^2 v rovině π pokládati za pár přímek jednoho z ∞^2 cylindroidů P^3 v kongruenci C_{32} obsažených.

Dále existuje při našich kongruencích C_{32} právě tak jako při kongruencích Wälschových 10 singulárních rovin prvního stupně, jichž existenci dokážeme právě tak, jako jest při těchto kongruencích dokázána (viz Sturm: Liniengeometrie I. p., 185.).

Komplexový systém S_2 obsahuje 4 speciální lin. komplexy, jichž řídicí přímky protínají absolutní kuželosečku a^2, jsou to čtyři přímky systému Σ hyperboloidu H^2. Označme si je o_1, o_2, o_3, o_4. Tečny v jejich stopách v rovině π ku kuželosečce a^2 buďte t_1, t_2, t_3, t_4. Všecky paprsky každého svazku paprskového $(o_i\ t_i)$ tvoří patrně s tečnou t zobecněné páry osové speciálního komplexu o řídicí přímce o_i. Tak dostáváme 4 singulární roviny $(o_i\ t_i)$. Kombinujeme-li vždy dvě řídicí přímky ze čtyř přímek o_1, o_2, o_3, o_4, dostáváme 6 svazků komplexových o 6 základních kongruencích $[o_i, o_k]$. Ježto zobecněný cylindroid třetího stupně každého z těchto komplexových svazků obsahuje dva svazky paprskové, totiž svazky $(o_i\ t_i)$, $o_k\ t_k)$, musí býti zbývající jeho část též paprskový svazek, a to jest jeden z dalších 6 paprskových svazků, stanovících dalších 6 singulárních rovin prvního stupně kongruence C_{32}.

Zcela duálně k analogickému výsledku dospěli bychom při kongruencích C_{23}.

II.

O zobecněném A^2 komplexu.

6. Zobecněný A^2 komplex jest komplexem quadratickým.

Dán budiž lineární systém třetího stupně S_3 lineárních komplexů. Dvě společné přímky komplexové všem ∞^3 komplexům systému S_3 označme si m, n. Jsou to základní přímky systému. Hledáme geometrické místo vzhledem ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ zobecněných párů osových jednotlivých lineárních komplexů systému. Dostáváme tak ∞^3 párů konj. polár absolutní plochy, které vyplňují určitý komplex. Jelikož tento komplex jest

zobecněním známého A^2 komplexu když kulovou kružnici v nekonečnu nahradíme absolutní plochou $\mathfrak{A}^2$, budeme jej nazývati projektivně zobecněným, nebo kratčeji zobecněným A^2 komplexem.

Jinak lze patrně zobecněný A^2 komplex též definovati jakožto geometrické místo konj. polár k dané ploše $\mathfrak{A}^2$, které tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek vždy s jedním párem přímek dané lineární kongruence $[m, n]$. K té definici dospíváme zase z důvodu, že dva páry konj. polár téhož lineárního komplexu leží na hyperboloidu.

Zobecněný A^2 komplex jest komplex quadratický, což dokážeme tím, že v každém svazku přímek v prostoru leží dva paprsky komplexu.

Vytkněme si v libovolné rovině ϱ bod R. Ku takto stanovenému svazku paprskovému $(R\,\varrho)$ sestrojme si vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně konjugovaný svazek $(R'\,\varrho')$. Vezměme v úvahu roviny svazku rovin o ose r, spojnici to bodů R a R'. Libovolné rovině μ tohoto svazku rovin jakožto rovině nullové a bodu R jako příslušnému bodu nullovému přísluší svazek S_1 lineárních komplexů v našem systému S_3. Opíše-li rovina μ svazek rovin kol r, dospějeme tak ku ∞^1 svazkům S_1 lineárních komplexů, čili ku ∞^2 lineárním komplexům, které mají společné komplexové přímky m, n, r a tedy též přímky jednoho systému hyperboloidu jimi stanoveného. Označme si takto vzniklý lineární systém ∞^2 lineárních komplexů jakožto systém S_2. Nullové body příslušné rovině ϱ' vzhledem ku jednotlivým komplexům systému S_2 vyplňují tuto rovinu. Můžeme je však uspořádati tak, že leží na ∞^1 přímkách s této roviny, jež odpovídají jednotlivým ∞^1 svazkům S_1. Speciální lineární komplex o řídicí přímce l, transversále to základních přímek m, n bodem R procházející, náleží všem ∞^1 svazkům S_1, neboť náleží mu všecky ∞^1 svazky přímek (R, μ), z nichž každý jest společný vždy všem komplexům vždy jednoho svazku S_1. Procházejí tudíž všecky přímky s, přímky to nullových bodů komplexů svazků S_1 v rovině ϱ' bodem L, průsečíkem to přímky l s touto rovinou. Jest totiž bod L nullovým bodem roviny ϱ' vzhledem ku našemu speciálnímu lineárnímu komplexu o řídicí přímce l.

Budiž r' průsečnice rovin ϱ, ϱ', jednotlivé přímky s svazku $(L\,\varrho')$ protínají ji v bodech, jež jako nullové body přísluší rovině ϱ' vždy v jednom komplexu každého z ∞^1 svazků S_1. Přísluší tedy přímkám svazku $(R\,\varrho)$, spojnicím to bodu R s body přímky r', přímky svazku $(R'\,\varrho')$, průsečnice to nullových rovin μ s nullovou rovinnou ϱ', jako konj. poláry vzhledem k určitým komplexům našeho systému. Přímkám svazku $(R\,\varrho)$ přiřazeny jsou však přímky svazku $(R'\,\varrho')$ též polaritou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Stanoví tedy polarita komplexů i polarita absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ ve svazku $(R'\,\varrho')$ a rovněž tak ve svazku $(R\,\varrho)$ dva soumístné projektivné svazky paprskové a dva samodružné paprsky v každé této projektivitě jsou vždy dvěma komplexovými paprsky v každém z těchto svazků paprskových. Tím jest tedy dokázáno, že náš zobecněný A^2 komplex jest komplexem quadratickým. Budeme tento komplex označovati též co Γ^2 komplex.

Ukážeme dále, že našemu Γ^2 komplexu náleží 4 lineární kongruence.

$$[m, n],\ [m', n'],\ [m,\ m'],\ [n,\ n'],$$

kde m', n' jsou konj. polárami základních přímek m, n vzhledem ku absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$.

K našemu quadratickému Γ^2 komplexu náleží lineární kongruence $[m, n]$ a k ní vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polární kngruence $[m,' n']$, ježto polárně přiřazené přímky těchto kongruencí tvoří zobecněné osové páry všech speciálních komplexů systému S_3. Dále náleží k našemu komplexu též lineární kongruence $[m, m']$ a $[n, n']$. Můžeme si totiž přímkou n jakožto paprskem komplexovým položiti vždy lineární komplex A, jehož jeden pár konj. polár tvoří přímka u kongruence $[m, m']$ a přímka u' vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ přímce u konjugovaná, jež též kongruenci $[m, m']$ náleží, ježto jest tato kongruence vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní. Lineárnímu komplexu A náleží též přímka m, jest tedy komplex A komplexem našeho systému S_3 a přímky u, u' jakožto konj. poláry komplexu A a plochy $\mathfrak{A}^2$ náleží našemu zobecněnému A^2 komplexu Γ^2.

Tímže způsobem lze provésti důkaz o přímkách kongruence $[n, n']$ že náleží quadratickému komplexu Γ^2.

7. Vytvoření zobecněného A^2 komplexu ze dvou polárních svazků lineárních komplexů a jeho plocha singulární.

Z theorie quadratických komplexů jest známo, že obsahuje-li quadratický komplex jednu lineární kongruenci, že obsahuje jich ∞^1 a sice, dva systémy ∞^1 lineárních kongruencí analogicky jako sborcená plocha druhého stupně dva systémy přímek. Komplex takový lze, jak známo, vytvořiti dvěma projektivními svazky lineárních komplexů. V následujícím ukážeme že za tyto dva svazky můžeme pokládati svazek lineárních komplexů o základní lineární kongruenci $[m, n]$ a svazek o základní lin. kongruenci $[m', n']$, k prvému svazku vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polární. Polarita absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ sprostředkuje zde projektivitu obou svazků komplexových o základních lin. kongruencích $[m, n]$ a $[m', n]'$.

Uvažujme v těchto komplexových svazcích dva lineární komplexy Γ a Γ_1, které jsou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ navzájem polárními. Komplexy Γ a Γ_1 protínejteż se v přímkách lineární kongruence $[g, g']$ a o přímkách této kongruence dokážeme, že náleží našemu projektivně zobecněnému A^2 komplexu. Uvažujme libovolnou přímku t lineární kongruence $[g, g']$ a k ní vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konj. poláru t', která patrně musí opět náležeti kongruenci $[g, g^1]$, ježto tato kongruence jest vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní. Jest pak dokázati, že v kongruenci $[m n]$ existuje pár přímek, které s přímkami t, t' tvoří hyperboloidickou čtveřinu.

To dokážeme tím, že přímkami m, n proložíme lineární komplex, jehož jeden pár konjugovaných polár tvoří přímky t, t'. Hledaný ten lineární komplex, který označíme Φ obdržíme jako společný lineární komplex

lineárního systému 3. stupně všech lin. komplexu procházejících přímkami m, n a pak svazku lineárních komplexů o základní lin. kongruenci $[t, t']$. Aby však náš komplexový systém 3. stupně a svazek komplexový se v nějakém komplexu pronikaly, jest nutno, aby se nacházely v témže komplexovém lineárním systému 4. stupně; což jest v geometrii bodové analogické tomu, že v prostoru pětirozměrném R_5 prostor třírozměrný R_3 má s přímkou R_1 jeden bod společný jen v tom případě, že R_3 a R_1 nacházejí se v nějakém prostoru čtyřrozměrném R_4 obsaženém v R_5. Prostory R_i značily nám patrně lineární prostory. A v daném případě lineární komplexový systém 3. stupně o základních přímkách m, n a komplexový svazek o základní kongruenci $[t, t']$ nacházejí se v lineárním komplexovém systému stupně 4., totiž v systému všech ∞^4 lineárních komplexů, které jsou ku komplexu Γ polárně invariantními. Jest totiž svazek lin. komplexů o základní kongruenci $[t, t']$ ku Γ polárně invariantním, ježto všecky komplexy jeho obsahují pár konj. polár t, t', které jsou přímkami komplexu Γ. A to jak z theorie lineárních komplexů známo, ku polární invarianci úplně postačí. Rovněž tak všechny ∞^3 lineární komplexy přímkami m, n procházející jsou ku Γ polárně invariantními, ježto jejich společné komplexové přímky m, n jsou párem konj. polár lineárního komplexu Γ. Tím jest existence lineárního komplexu Φ dokázána.

Ku libovolné přímce h lineární kongruence $[m, n]$ příslušná konj. polára h' vzhledem ku lin. komplexu Φ náleží opět této kongruenci, neboť přímky m n jsou přímkami komplexu Φ. I tvoří libovolný pár přímek t, t' ku $\mathfrak{A}^2$ konjugovaných a v polárně invariantní vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ kongruenci $[g, g']$ ležících s párem přímek h, h' kongruence $[m, n]$ hyperboloidickou čtveřinu přímek, jakožto dva páry konjugovaných polár komplexu Φ. A to bylo dokázati, aby bylo patrno, že zobecněný A^2 komplex lze pokládati za výtvor dvou polárních komplexových svazků o základních lin. kongruencích $[m, n]$ a $[m,' n']$.

Obě transversály p, q čtyř mimoběžek m, n, m', n' náleží patrně ku všem ∞^1 lineárním kongruencím, které vyplňují náš zobecněný A^2 komplex a jsou, jak z theorie qvadratických komplexů známo, dvojnými přímkami toho komplexu. Komplex tohoto typu označuje se

$$[(11)\,1\,1\,1\,1]$$

kteréžto označení, jak známo, vzato jest z Weierstrassovy theorie základních dělitelů.

Z theorie quadratických komplexů jest dále známo (viz Sturm: Liniengeometrie III., p. 393), že řídicí přímky obou systémů lineárních kongruencí vyplňujících quadratický komplex přísluší téže sborcené ploše stupně čtvrtého, která jest singulární plochou tohoto komplexu. Uvažujme pár přímek x, y, které jsou řídicími přímkami jedné lineární kongruence v zobecněném A^2 komplexu a tedy přímkami singulární plochy. Kongruenci $[x, y]$ lze považovati za pronik dvou lineárních komplexů

Ψ a Ψ_1, které si odpovídají v obou komplexových svazcích o základních kongruencích $[m, n]$ a $[m', n']$ jakožto navzájem polární komplexy vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$. Jsou pak přímky x, y konjugovanými polárami vzhledem ku Ψ, libovolnému to komplexu komplexového svazku o základní kongruenci $[m, n]$. Ježto pak x, y jsou též párem konjugovaných polár vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$, můžeme x, y pokládati za zobecněný pár osový libovolného lin. komplexu Ψ ze svazku o základní kongruenci $[m, n]$. Vyplňují tedy řídící přímky $x\,y$ zobecněný cylindroid P^1, příslušný lineární kongruenci $[m, n]$, který jest tedy singulární plochou zobecněného A^2 komplexu.

Výsledky naše můžeme shrnouti ve věty:

Geometrické místo konj. polár dané plochy 2. stupně $\mathfrak{A}^2$, které s libovolnými dvěma přímkami dané lineární kongruence $[m, n]$ tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, jest quadratický komplex o dvou mimoběžných přímkách dvojných, které dostaneme jakožto transversály řídících přímek kongruence $[m, n]$ a přímek k těmto vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárným. Komplex tento nazveme zobecněným A^2 komplexem.

Singulární plochou tohoto komplexu jest plocha sborcená 4. stupně o dvou přímkách dvojných, již vyplňují páry konjugovaných polár $\mathfrak{A}^2$, které s řídicími přímkami kongruence $[m, n]$ tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek. Dvojné přímky singulární plochy jsou dvojnými přímkami příslušného zobecněného A^2 komplexu. Plocha ta jest zobecněným cylindroidem.

Náš zobecněný A^2 komplex lze pokládati za geometrické místo zobecněných párů osových, které náleží všem lineárním komplexům systému S_3. Singulární plochou tohoto komplexu jest zobecněný cylindroid příslušný svazku lineárních komplexů, který jest se systémem S_3 v involuci.

Ukázali jsme dříve, že našemu zobecněnému A^2 komplexu náleží lineární kongruence $[m, n]$, $[m', n']$, $[m, m']$, $[n, n']$ a dále, že náleží náš komplex do kategorie quadratických komplexů, které obsahují dva systémy ∞^1 lineárních kongruencí. Řídicí přímky těchto dvou systémů lineárních kongruencí vytínají, jak z theorie těchto komplexů jest známo [Sturm: Liniengeometrie III., p. 393], na singulární ploše tohoto komplexu dvě spojené involuce. V našem případě jsou m, n; m', n' páry jedné a m, m'; n, n' páry druhé s prvou spojené involuce. Jsou to patrně naše dvě význačné involuce na zobecněném cylindroidu. Máme tedy výsledek:

Zobecněný A^2 komplex lze pokládati za souhrn všech lineárních kongruencí, jejichž řídící přímky tvoří páry první nebo druhé význačné involuce na zobecněném cylindroidu.

Vezmeme-li v úvahu druhou význačnou involuci na konoidu Plückerově, dostáváme vytvoření A^2 komplexu co souhrnu všech přímek, které protínají kolmo jednotlivé přímky konoidu Plückerova.

8. Věta o zobecněném A^2 komplexu.

Dokážeme větu:

Geometrické místo hran polárných tetraedrů vzhledem ku dané ploše 2. stupně $\mathfrak{A}^2$ a vzhledem ku jednotlivým ∞^3 plochám 2. stupně, procházejícím danými přímkami m, n jest zobecněný A^2 komplex.

Uvažujme libovolný lineární komplex Γ procházející přímkami m, n. Jelikož však v systému všech ∞^6 ploch 2. stupně daného lineárního komplexu vždy existuje jedna plocha (viz Sturm: Liniengeometrie I., pag. 307) danými dvěma přímkami komplexovými procházející a dané konjugované poláry lineárního komplexu rovněž za konj. poláry mající, můžeme ku každému lineárnímu komplexu Γ jdoucímu přímkami m, n přiřaditi jednu plochu 2. stupně přímkami m, n procházející tak, že Γ a ona plocha mají společné konj. poláry. Každé ploše odpovídají však tři lineární komplexy, jejichž tři páry konjugovaných polár tvoří tři páry polár na polárním tetraedru.

Tím věta dokázána.

Nahradíme-li $\mathfrak{A}^2$ kulovou kružnicí v nekonečnu, tu dostáváme větu o osách všech ∞^3 ploch 2. stupně, jdoucích dvěma mimoběžnými přímkami na kterou upozornil pan Dr. Klobouček v práci „Methodické poznámky ku theorii A^2 komplexu“ (Rozpravy České Akademie r. 1905).

9. Sestrojení komplexových křivek a kuželů.

Poněvadž jsme dokázali, že ku zobecněnému A^2 komplexu náleží lineární kongruence $[m, n]$, $[m', n']$, $[m, m']$, $[n, n']$ stačí stanoviti si v libovolné rovině π průsečíky čtyř přímek m, n, m', n', a tyto průsečíky spojiti přímkami tak, abychom dostali čtyři přímky z uvedených čtyř lineárních kongruencí. Tu máme hned čtyři tečny komplexové kuželosečky. Pátou tečnu dostaneme jako spojnici průsečíků přímek r, s, které tvoří pár druhé význačné involuce na singulární ploše P^4 našeho komplexu a které sestrojíme dle způsobu udaného v odstavci 4. citovaného zde mého pojednání „O zobecněném cylindroidu“. Tím jest komplexová kuželosečka libovolné roviny stanovena.

Způsobem zcela duálním stanovil by se komplexový kužel v libovolném bodě jakožto svém vrcholu.

V případě, že absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ obsahuje reálné přímky, dospíváme k jednodušší konstrukci komplexových křivek a kuželů a proto o tom případě pojednáme zvlášť. Přicházíme zároveň při sborcené absolutní ploše ku jiné definici projektivně zobecněného A^2 komplexu, která zní:

Vytkneme-li na hyperboloidu $\mathfrak{A}^2$ v každém systému jeho přímek obyčejnou involuci a přiřadíme-li tyto involuce projektivně, dostáváme na $\mathfrak{A}^2$ ∞^1 sborcených čtyřúhelníků, jejichž diagonály jsou řídícími přímkami ∞^1 lineárních kongruencí,

jejichž přímky vyplňují quadratický komplex o dvou mimoběžných přímkách dvojných, který jsme nazvali zobecněný A^2 komplex.

Tyto dvojné přímky tvoří pár diagonál sborceného čtyřúhelníka, jehož dvě a dvě protější strany tvoří páry samodružných přímek v obou daných involucích.

Singulární plochou tohoto komplexu jest zobecněný cylindroid P^4 diagonálami všech ∞^1 sborcených čtyřúhelníků vyplněný.

Patrno jest, že oba systémy přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ náleží zobecněnému A^2 komplexu. Páry diagonál uvedených sborcených čtyřúhelníků tvoří patrně druhou význačnou involuci na P^4.

Při konstrukci komplexových křivek a kuželů užijeme týchž označení, jako jsme byli užili při konstrukci řezu a obrysu P^4 v odstavci 6. citovaného zde již pojednání: „O zobecněném cylindroidu".

Libovolná rovina π protínejž hyperboloid $\mathfrak{A}^2$ v kuželosečce a^2. Páry přímek obou projektivních involucí v obou systémech přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ vytínají na kuželosečce a^2 dvě obyčejné involuce indukované body S, S'. Svazky paprskové o vrcholech S, S' jsou projektivné, jejich výtvorem jest určitá kuželosečka l^2. Sestrojíme-li ku kuželosečce l^2 kuželosečku k^2, která jest k ní vzhledem ku kuželosečce a^2 polární, sestrojili isme již hledanou kuželosečku komplexovou k^2. To jest ovšem ještě dokázati.

Uvažujme libovolný bod E kuželosečky l^2 a protínejtež spojnice $\overline{E\,S}$, $\overline{E\,S'}$ kuželosečku a^2 v párech bodových A, B; A', B', takže:

$$E \equiv \overline{A\,B} \times \overline{A'\,B'}$$

a dále si označme:

$$C \equiv \overline{A\,B'} \times \overline{A'\,B}$$
$$D \equiv \overline{A\,A'} \times \overline{B\,B'}.$$

Body C, D, body to quartiky řezu (viz odst. 6. pojednání „O zobecněném cylindroidu") jsou zároveň průsečíky jednoho páru druhé význačné involuce na P^4. Jest tedy spojnice $\overline{C\,D}$ přímkou komplexu. Avšak v polárném trojúhelníku E, C, D jest E bod to kuželosečky l^2, pólem poláry $\overline{C\,D}$. Jest tedy správnost konstrukce hoření dokázána, zároveň podán důkaz quadratičnosti zobecněného A^2 kom plexu, když absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ jest plochou přímkovou.

Zcela duálně sestrojíme komplexový kužel o libovolném vrcholu P. Z bodu tohoto promítají se přímky plochy $\mathfrak{A}^2$ tečnými rovinami kužele 2. třídy α^2. Páry přímek v obou projektivních involucích v obou systémech přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ promítajíce se tečnými rovinami kužele α^2, stanoví dvě projektivní involuce v tečných rovinách tohoto kužele. Buďte σ, σ' rovinami vrcholem P kužele α^2 procházejícími, které indukují tyto involuce v tečných rovinách α^2. V rovinách σ, σ' máme dva projektivní svazky paprskové o témžo vrcholu P. Výtvorem jejich jest kužel 2. třídy, který

označíme λ^2. K tomuto kuželi λ^2 vzhledem ku α^2 polární kužel $\varkappa^2$ jest komplexovým kuželem bodu P. Důkaz jest zcela duální hořením důkazu při stanovení komplexové kuželosečky k^2, proto důkaz ten zde zvlášť již uváděti nebudeme.

10 Speciální polohy základních přímek komplexového systému S_3 vzhledem ku absolutní ploše.

Uvažujme zase dle řady čtyři speciální polohy základních přímek m, n zobecněného A^2 komplexu, jako jsme uvažovali pro řídicí přímky m, n základní kongruence $[m, n]$ zobecněného cylindroidu v odst. 7. pojednání „O zobecněném cylindroidu".

Čtyři ty speciální polohy byly:

1. m, n jsou konj. polárami absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$.
2. m, n se svými konj. polárami vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ tvoří hyperboloidickou čtveřinu.
3. jedna z přímek m, n náleží ploše $\mathfrak{A}^2$.
4. obě přímky m, n náleží ploše $\mathfrak{A}^2$.

Případ první.

Jsou-li základní přímky m, n lineárního komplexového systému stupně třetího S_3 konj. polárami absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$, můžeme ∞^3 lineárních komplexů systému S_3 uspořádati tak, že tento systém jest sestaven z ∞^2 svazků lin. komplexů a řídicími přímkami základních lin. kongruencí těchto svazků jsou vždy dvě přímky t, t' lineární kongruence $[m, n]$, které jsou současně konj. polárami absolutní plochy. Každý z těchto ∞^2 svazků komplexových o základních lin. kongruencích $[t, t']$ jest patrně projektivně zobecněným svazkem lineárních komplexů souosých o společném zobecněném páru osovém $[t, t']$. Jak jsme na počátku odst. 7. v citovaném pojednání „O zobecněném cylindroidu" odvodili, existují v každém projektivně zobecněném svazku souosých lin. komplexů dva vzhledem ku absolutní ploše polárně invariantní lineární komplexy, z nichž každý má ∞^2 zobecněných párů osových, které vyplňují určitou lineární kongruenci. Tak zde při našem komplexovém systému S_3, ve kterém, jak jsme právě ukázali, existuje ∞^2 lineárních komplexů vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantních, zdálo by se na první pohled, že dospíváme ku ∞^4 zobecněným párům osovým, tudíž ku všem přímkám prostoru. Ukážeme však, že tyto přímky ve skutečnosti vytvořují dva lineární komplexy, že tedy zobecněných párů osových existuje ve skutečnosti pouze ∞^3.

Lze totiž ∞^2 párů konj. polár t, t' v lineární kongruenci $[m, n]$ uspořádati v ∞^1 prvních systémů přímkových určitých hyperboloidů H^2, z nichž každý má s plochou absolutní společný prostorový čtyřúhelník, čili z nichž každý jest vzhledem ku absolutní ploše polárně invariantním.

Toto uspořádání jest možné, neboť libovolnou přímkou x_1 prvního systému přímek na absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ a přímkami m, n stanovený hyperboloid (x_1, m, n) má s plochou $\mathfrak{A}^2$ společné dvě přímky u_2, v_2 druhého systému přímek plochy $\mathfrak{A}^2$, totiž ty přímky u_2, v_2, které tvoří jeden pár protějších stran sborceného čtyřúhelníka, který konj. poláry m, n z plochy $\mathfrak{A}^2$ vytínají. Ježto má tedy hyperboloid (x_1, m, n) s plochou $\mathfrak{A}^2$ společné dvě přímky soustavy druhé u_2, v_2, musí míti společné též dvě přímky soustavy první, a to vytčenou již přímku x_1 a pak určitou přímku y_1. Dle druhé věty vytčené v odst. 7. citovaného zde stále pojednání vidíme, že jsou přímky x, y_1 řídicími přímkami lineární kongruence zobecněných párů osových vždy jednoho vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantního lineárního komplexu, stanoveného jedním párem involuce konjugovaných polár v přímkách druhého systému ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantního hyperboloidu (x, m, n), kterou tam $\mathfrak{A}^2$ indukuje. Tedy vždy ∞^1 ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantních lin. komplexů stanovených plochou (x, m, n) má společnou lineární kongruenci zobecněných párů osových, totiž kongruenci $[x_1, y_1]$.

Všechny páry přímek x_1, y_1 tvoří obyčejnou involuci na $\mathfrak{A}^2$ o samodružných přímkách u_1, v_1, které s přímkami u_2, v_2 výše vytčenými tvoří souhrn stran prostorového čtyřúhelníka, který z $\mathfrak{A}^2$ konj. poláry m, n vytínají. Všechny pak lineární kongruence $[x_1, y_1]$ vyplňují dle známého Chaslesova vytvoření lineárního komplexu lineární komplex Γ. Způsobem týmž, v druhém systému přímek absolutní plochy involutorní páry x_2, y_2 o samodružných přímkách u_2, v_2, vytvořily by určitý lineární komplex Γ_1. Lineární komplexy Γ a Γ_1 zastupují patrně v našem speciálním případě zobecněný A^2 komplex. Každý z nich ježto obsahuje vždy jeden systém přímek plochy $\mathfrak{A}^2$ jest ku této polárně invariantním

Můžeme pak vysloviti věty:

Jsou-li základní přímky m, n lineárního systému lineárních komplexů stupně třetího S_3 párem konjugovaných polár absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$, tu příslušný zobecněný quadratický A^2 komplex rozpadá se ve dva ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní lineární komplexy.

Tyto lineární komplexy stanoveny jsou dvěma involucemi svých konjugovaných polár v obou přímkových systémech plochy $\mathfrak{A}^2$. Samodružnými přímkami těchto involucí jest vždy pár protějších stran sborceného čtyřúhelníka, který z $\mathfrak{A}^2$ přímky m, n vytínají.

K větám těmto mohli bychom též dospěti vytvořením zobecněného A^2 komplexu ze dvou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárních svazků lineárního komplexů, kteréžto vytvoření jsme též dříve byli odvodili. V daném speciálním případě mají tyto komplexové svazky společnou svoji základní lineární kongruenci $[m, n]$. Komplexy Γ a Γ_1 jsou dvěma vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantními lineárními komplexy kongruencí $[m, n]$ procházejícími.

Existenci takových dvou lin. komplexů jsme dokázali na počátku odst. 7. citovaného zde pojednání „O zobecněném cylindroidu“.

K důkazu našich vět jsme volili hoření delší cestu z toho důvodu, že jest z ní patrno uspořádání lineárních komplexů systému S_3 v této specielní poloze, zejména pak uspořádání projektivně zobecněných souosých svazků systému S_3.

Případ druhý.

V případě, že základní přímky m, n našeho komplexového systému S_3 tvoří se svými vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konj. polárami m', n' hyperboloidickou čtveřinu přímek, mají poláiní svazky lineárních komplexů o základních kongruencích $[m, n]$ a $[m', n']$ polohu perspektivní. Lze totiž dvěma páry přímek m, n; m', n' jakožto páry konjugovaných polár stanoviti určitý lineární komplex Δ, který jsa ku ploše $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantním jest oběma našim polárním svazkům komplexovým společný. Označme si jako první systém přímkový na absolutní ploše ten systém, se kterým lineární kongruence $[m, n]$ má společné dvě přímky, které si označíme u_1, v_1. Snadno lze pak nahlédnouti, že polárně invariantní lineární komplex Δ obsahuje všecky přímky prvního systému plochy $\mathfrak{A}^2$, neboť každou přímkou x_1 prvního systému a párem svých konj. polár m, n jest týž stanoven. Obsahuje pak komplex Δ všecky přímky prvního systému plochy $\mathfrak{A}^2$, ježto obsahuje tři přímky toho systému, totiž přímky x_1, u_1, v_1. Zobecněný A^2 komplex rozpadá se tedy v lineární komplex Δ a nějaký jiný ještě lineární komplex Δ_1, který máme nalézti.

Ku hledanému lin. komplexu Δ_1 náleží patrně všecky přímky druhého přímkového systému absolutní plochy, neboť vedeme-li si libovolnou přímkou x_2 tohoto druhého systému jakožto přímkou komplexovou a párem přímek m, n jakožto párem konjugovaných polár určitý komplex lineárný, tu polárně vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ odpovídající komplex tomuto komplexu bude procházeti zase přímkou x_2. Náleží tudíž všecky přímky x_2 druhého systému plochy $\mathfrak{A}^2$ komplexu Δ_1 našimi perspektivními a polárními svazky komplexovými vytvořenému. Komplexu Δ_1 náleží však též dříve vytčené přímky $u_1 v_1$. A jest tedy lineární komplex Δ_1 stanoven všemi přímkami druhého systému plochy $\mathfrak{A}^2$ a dvěma přímkami prvého systému této plochy jakožto svými přímkami komplexovými.

Máme pak věty:

Tvoří-li základní přímky m, n systému S_3 lineárních komplexů se svými, vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konjugovanými polárami m', n' hyperboloidickou čtveřinu přímek, rozpadá se systému S_3 příslušný zobecněný A^2 komplex ve dva lineární komplexy Δ a Δ_1, které jsou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantními.

Komplex Δ jest stanoven dvěma páry svých konjugovaných polár m, n; m', n' a obsahuje přímky prvního systému plochy $\mathfrak{A}^2$. Komplex Δ_1 jest stanoven involucí svých konjugo-

vaných polár v prvním systému přímek plochy $\mathfrak{A}^2$, jejímiž samodružnými přímkami jsou přímky, které z tohoto systému lineární kongruence $[m, n]$ vytíná.

V tomto druhém speciálním případě obsahuje komplexový systém S_3 ∞^1 projektivně zobecněných svazků souosých lineárních komplexů. Společné zobecněné páry osové jednotlivých těchto svazků tvoří involuci na řídícím systému hyperboloidu (m, n, m', n').

Případ třetí.

Třetí speciální případ, kdy jedna ze základních přímek m n, na př. přímka m leží v druhém systému přímek absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ jest speciálním případem případu předešlého. Lze snadno nahlédnouti, že lineární komplex A v případě druhém uvažovaný přechází v tomto případě v speciální lineární komplex, jehož řídící přímkou jest základní přímka m na ploše $\mathfrak{A}^2$ ležící.

Případ čtvrtý.

Uvažujme případ, že obě základní přímky m, n komplexového systému S_3 leží na absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ a že obě náleží témuž systému přímkovému této plochy. Pak můžeme všechny ∞^3 lin. komplexy systému S_3 uspořádati v ∞^2 projektvině zobecněných souosých svazků komplexových, jejichž společným zobecněným párem osovým jest vždy jeden pár z ∞^2 párů konj. polár plochy $\mathfrak{A}^2$ obsažených v lineární kongruenci $[m, n]$. Ježto každý projektivně zobecněný svazek souosých lineárních komplexů má dva vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní lineární komplexy, z nichž každý obsahuje ∞^2 zobecněných párů osových, dospíváme tak ku ∞^4 párům přímek, to jest ke všem přímkám prostoru.

A sice každému páru p, q konj. polár v lineární kongruenci $[m, n]$ náleží dva polárně invariantní lineární komplexy, z nichž zobecněné páry osové u jednoho vyplňují vždy lineární kongruenci $[m, n]$ u druhého pak určitou lineární kongruenci, jejímiž řídícími přímkami jest vždy jeden z ∞^2 párů přímek r, s plochy $\mathfrak{A}^2$, které s přímkami m, n tvoří vždy sborcený čtyřúhelník z plochy $\mathfrak{A}^2$ vyťatý párem konj. polár této plochy p, q. Všech ∞^2 lineárních kongruencí $[r, s]$ obsahuje všecky ∞^4 přímky prostoru.

Máme pak větu:

Leží-li obě základní přímky m, n systému S_3 lineárních komplexů na absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$, tu přechází příslušný zobecněný A^2 komplex ve všecky přímky prostoru.

To lze nahlédnouti též snadno z vytvoření zobecněného A^2 komplexu pomocí polárních svazků komplexových. Ty jsou v našem daném případě kollokálními, majíce lineární kongruenci $[m, n]$ společnou. Ježto pak všechny lineární komplexy základní kongruence $[m, n]$ v tomto pří-

padě jsou polárně invariantními vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ (jak jsme dokázali při čtvrtém speciálním případu v odst. 7. pojednání „O zobecněném cylindroidu“) přechází zobecněný A^2 komplex v souhrn všech ∞^1 lineárních komplexů svazku o základní lin. kongruenci $[m, n]$. Tyto ∞^1 lineární komplexy vyplňují patrně svými přímkami celý prostor přímkový.

11. Zobecněný A^2 komplex pro absolutní plochu degenerovanou v kuželosečku nebo v kužel druhé třídy.

Absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ budiž nahrazena absolutní kuželosečkou a^2 v rovině π. Sestrojme ku základním přímkám m, n komplexového systému S_3 konj. poláry m' n'. Ty se protínají v bodě P roviny π a buďte p, q transversálami čtyř přímek m, n, m', n'. Transversála p prochází bodem P a transversála q leží v rovině π. Uvažujme speciální lineární komplex systému S_3 o řídící přímce q. Tento lin. komplex má ∞^2 zobecněných párů osových. Lze totiž všem ∞^2 přímkám roviny π přiřaditi přímky, které s nimi tvoří zobecněné páry osové. Každá přímka x roviny π tvoří s osou q určitý paprskový svazek a v tomto existuje vždy jedna přímka x', která jest konjugovanou polárou přímky x vzhledem ku a^2. Pár x, x', pár to konj. polár absolutní kuželosečky, jest zobecněným párem osovým speciálního lin. komplexu o řídicí přímce q, ježto x, x' jsou současně patrně též párem konj. polár toho komplexu.

Rovněž prostorový svazek přímek o vrcholu P náleží našemu zobecněnému A^2 komplexu, který si v tomto speciálním případě označíme jakožto komplex $\mathcal{A}^2$. Neboť všechny přímky prostorového svazku P jsou konjugovanými polárami ku q i vzhledem ku speciálnímu lineárnímu komplexu o řídící přímce q i vzhledem ku kuželosečce a^2.

I vidíme, že náš $\mathcal{A}^2$ komplex obsahuje i prostorový svazek přímkový P i rovinné pole přímek π. Ku výsledku zcela analogickému bychom dospěli v případě duálním, když bychom nechali $\mathfrak{A}^2$ degenerovati v kužel druhé třídy α^2.

Ku $\mathcal{A}^2$ komplexu jakožto ku zobecněnému A^2 komplexu lze dospěti, jak jsme dříve byli ukázali, dvojím způsobem ze zobecněného cylindroidu, který přísluší komplexovému svazku, který jest ku našemu komplexovému systému S_3 v involuci. A sice, jak jsme ukázali, lze jej vytvořiti dvojím způsobem jakožto geometrické místo dvou systémů lineárních kongruencí, jejichž řídicí přímky tvoří páry dvou význačných zobecněných involucí na zobecněném cylindroidu. Vezmeme-li v úvahu druhou význačnou involuci, která zde přechází, jak jsme v odst. 8. pojednání „O zobecněném cylindroidu“ dokázali, v projektivní přiřazení přímek našeho zobecněného cylindroidu P^3 a přímek svazku $(P\,\pi)$ tu vidíme, že komplexu $\mathcal{A}^2$ náleží dvě parabolické kongruence přímkové o splývajících řídících přímkách t_1, t_2, které jsou tečnami z bodu P ku a^2.

Přímky tyto t_1, t_2 jsou dvojnými přímkami komplexu $\mathcal{A}^2$, neboť každému bodu T_1 na př. přímky t_1 přísluší paprskový svazek příslušné

parabolické lin. kongruence jakožto svazek paprsků komplexových a svazek ten obsahuje patrně též přímku t_1. Avšak komplexu A^2 přísluší též paprskový svazek $(T_1\,\pi)$ ježto, jak jsme právě ukázali, všecky přímky rovinného pole π přísluší komplexu A^2. Přímka t_1 jsouc pro každý svůj bod T_1 společnou přímkou dvou komplexových svazků, jest patrně dvojnou přímkou quadratického komplexu A^2. Podobně to platí i o přímce t_2.

Dále jsou přímky p, q dvojnými přímkami komplexu A^2, což vyplývá z toho, že jsme to dokázali o těchto přímkách při obecnějším komplexu, totiž Γ^2 komplexu. Obsahuje tedy komplex A^2 čtyři dvojné přímky

$$p,\ q,\ t_1,\ t_2,$$

uspořádané ve dva páry tak, že první pár p, q jsou přímky mimoběžné, druhý pak pár t_1, t_2 jsou různoběžky, které leží v rovině absolutní kuželosečky a^2, které protínají přímky p, q. A sice tvoří tento druhý pár dvojných přímek s jednou dvojnou přímkou p prvního páru prostorový trojhran a s druhou přímkou q prvního trojúhelník. Quadratický komplex obsahující čtyři přímky dvojné této vlastnosti náleží mezi quadratické komplexy, kterým dle symboliky v klassifikaci quadratických komplexů obvyklé přísluší označení (viz Sturm: Liniengeometrie III., pag. 438):

$$[\,(1\,1)\,2\,2\,].$$

Singulární plochou našeho komplexu A^2 jest zobecněný cylindroid 3. stupně P^3 a mimo to jest patrně každý bod roviny π bodem singulárním a každá rovina prostorového svazku rovin bodem P procházejících rovinou singulární. To jest patrno z toho, že komplexu A^2 náleží všecky přímky v rovině π a všecky přímky bodem P jak jsme dříve ukázali.

Kdybychom $\mathfrak{A}^2$ nechali degenerovati v kužel 2. třídy α^2, dospěli bychom k výsledkům zcela duálním, jež netřeba zvlášť vyvozovati. Můžeme pak o našem komplexu A^2 vysloviti věty:

Degeneruje-li absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ v kuželosečku a^2 nebo v kužel 2. třídy α^2, tu přechází zobecněný A^2 komplex v komplex quadratický o čtyřech přímkách dvojných, jichž jeden pár jest mimoběžný a druhý pár s jednou přímkou prvního páru tvoří trojhran a s druhou přímkou tohoto páru tvoří trojúhelník.

Singulární plochou tohoto komplexu jest zobecněný cylindroid 3. stupně P^3 a dále všecky

body roviny π, v níž leží absolutní kuželosečka a^2 a všecky roviny bodem P, ve kterém dvojná řídící přímka zobecněného cylindroidu P^3 rovinu π protíná.

roviny vrcholem P absolutního kužele 2. třídy α^2 a všecky body roviny μ, kterou dvojná řídící přímka zobecněného cylindroidu P^3 s vrcholem P stanoví.

Čtyři naše dvojné přímky u A^2 komplexu, který jest patrně speciálním případem našeho A^2 komplexu, tvoří hlavní osa základní kongruence komplexového systému S_3, přímka k ní kolmá v rovině nekonečně vzdálené a dvě isotropické přímky v nekonečně vzdálené rovině procházející bodem hlavní osy základní kongruence.

12. O zobecněných cylindroidech a hyperboloidech v zobecněném A^2 komplexu.

Zobecněný A^2 komplex neboli Γ^2 komplex, jak jsme jej dříve označili, obsahuje ∞^3 párů konjugovaných polár, ∞^4 zobecněných cylindroidů a ∞^3 zobecněných kongruencí Wälschových. To jest patrno z toho, že v lineárním komplexovém systému 3. stupně S_3 jest obsaženo ∞^3 lineárních komplexů ∞^4 komplexových svazků a ∞^3 lin. komplexových systémů 2. stupně.

Libovolná přímka k v našem komplexu Γ^2 stanoví určitý lineární komplex systému S_3. Lineární komplex ten určen jest přímkou k a její vzhledem ku $\mathfrak{Q}^2$ konj. polárou k' jakožto párem svých konjugovaných polár a jednou ze základních přímek m, n jakožto přímkou komplexovou.

Libovolné dvě přímky komplexu Γ^2, přímky x, y stanoví určitý svazek komplexový v našem komplexovém systému S_3 a zároveň určitý zobecněný cylindroid v tomto systému. Zobecněný ten cylindroid označíme si P_1^4. Ježto přímkových párů x, y v komplexu Γ^2 existuje ∞^6, zdálo by se na první pohled, že existuje ∞^6 ploch P_1^4 v komplexu Γ^2. Množství toto redukuje se však na ∞^4 ježto na každé ploše P_1^4 můžeme přímkový pár x, y zvoliti na ∞^2 různých způsobů. Dvojné přímky d, d' zobecněného cylindroidu P_1^4 přímkami x, y procházejícího nalezneme jako obě společné transversály čtyř přímek x, y, x', y', kde x', y' jsou konjugovanými polárami přímek x, y vzhledem ku absolutní ploše. Každému páru x, y přísluší však ještě určitý pár přímek u, v, řídicích to přímek základní kongruence komplexového svazku přímkami x, y stanoveného. Pár přímek u, v musí býti patrně vždy obsažen v lineární kongruenci $[m, n]$, kde m, n jsou zase základními přímkami komplexového systému S_3, zároveň pak musí ale též protínati obě dvojné přímky d, d' zobecněného cylindroidu P_1^4. Sestrojíme tedy řídicí přímky u, v, základní kongruence komplexového svazku vytčeného v systému S_3 dvěma přímkami $x\,y$ komplexu Γ^2, jakožto obě transversály čtyř přímek d, d', m, n.

Dvojné přímky d, d' kteréhokoli cylindroidu P_1^4 v Γ^2 komplexu obsaženého jsou párem konj. polár absolutní plochy, ježto jsou párem transversál dvou párů konj. polár této plochy, totiž párů $x\,x'$; y, y'. Zobecněný cylindroid P_1^4 jeví se nám zde jako pronik komplexu Γ^2 s lineární kongruencí $[d, d']$. A každý pár p, p' konj. polár absolutní plochy lze pokládati za dvojné řídicí přímky jednoho z ∞^4 zobecněných cylindroidu P_1^4 v kom-

plexu Γ^2 obsažených, neboť lze vždy vytknouti (dokonce na ∞^2 způsobů) pár přímek x, y lineární kongruence $[p, p']$, které náleží Γ^2 komplexu, a které vedou ku určité ploše P_1^4. Dostáváme tedy celý systém ∞^4 ploch P_1^4 v komplexu Γ^2 obsažených jako proniky všech ∞^4 vzhledem ku $\mathfrak{P}^2$ polárně invariantních lineárních kongruencí s tímto komplexem.

Ukážeme nyní souvislost singulární plochy našeho komplexu Γ^2, kterouž jsme označovali jakožto zobecněný cylindroid P^4 s ∞^4 zobecněnými cylindroidy P_1^4, které jsou v komplexu Γ^2 obsaženy. Buď zase d, d' libovolný pár konj. polár plochy $\mathfrak{P}^2$. Máme-li pak sestrojiti pronik lineární kongruence $[d, d']$ s komplexem Γ^2, můžeme sestrojiti postupně ∞^1 párů transversál čtyř přímek, z nichž dvě jsou přímky d, d' a další dvě vždy jeden pár z první nebo druhé význačné involuce na singulární ploše P^4 komplexu Γ^2. Ukázali jsme totiž dříve, že komplex Γ^2, který jest zobecněným A^2 komplexem, můžeme považovati za souhrn ∞^1 lineárních kongruencí, jejichž řídící přímky tvoří páry první nebo druhé význačné involuce na jeho singulární ploše, zobecněném to cylindroidu P^4.

Máme tedy následující souvislost:

Dán-li zobecněný cylindroid P^4 a sestrojíme-li ku určitému páru d, d' konjugovaných polár absolutní plochy a postupně ovšem párům první nebo druhé význačné involuce na P^4 páry společných transversál, tu vyplňují tyto páry opět zobecněný cylindroid, který označíme P_1^4. Poláry d, d' jsou dvojnými řídícími přímkami tohoto nového zobecněného cylindroidu.

Takto existuje ku každému zobecněnému cylindroidu P^4 systém ∞^4 zobecněných cylindroidů P_1^4, o kterých budeme říkati, že jsou s prvým v involuci.

K pojmenování, že P_1^4 jsou ku P^4 v involuci nás opravňuje fakt, že všechny ∞^4 cylindroidy P_1^4 přísluší ∞^4 komplexovým svazkům v komplexovém systému S_3, t. j. systému všech lineárních komplexů základními přímkami m, n procházejících, kterýžto systém jest v involuci ku komplexovému svazku o společných konjugovaných polárách m, n, t. j. komplexovém svazku, který přísluší zobecněnému cylindroidu P^4.

Každému jednotlivému zobecněnému cylindroidu P_1^4 našeho systému přísluší involutorně určitý zobecněný A^2 komplex, který si označíme Γ_1^2. Říkáme „přísluší involutorně“ poněvadž svazek komplexový, kterému přísluší P_1^4 jest v involuci s lineárním komplexovým systemem 3. stupně, kterému přísluší komplex Γ_1^2. Přísluší tedy každému komplexu Γ^2 ∞^4 komplexů Γ_1^2. Budeme pak z důvodu shora uvedeného říkati, že ∞^4 komplexů Γ_1^2 jest v involuci ku komplexu Γ^2. V každém komplexu Γ^2 existuje zase, ježto tento komplex jest zobecněným A^2 komplexem, systém ∞^4 zobecněných cylindroidů a jedním z těchto zobecněných cylindroidů jest patrně singulární plocha P^4 komplexu Γ^2 příslušného našemu komplexo-

vému systému S_3. Tímto zobecněným cylindroidem P^4 prochází tedy systém všech ∞^4 komplexů Γ_1^2.

Shrneme-li výsledky našich úvah, máme věty:

V každém zobecněném A^2 komplexu, který si označíme Γ^2 leží ∞^4 zobecněných cylindroidů P_1^4. Dvojnými přímkami těchto ∞^4 ploch P_1^4 jsou všechny ∞^1 páry konjugovaných polár absolutní plochy. Každému z těchto ∞^4 zobecněných cylindroidů P_1^4 přísluší involutorně určitý komplex Γ_1^2.

Přísluší tedy ke každému komplexu Γ^2 systém ∞^4 komplexů Γ_1^2, o kterých říkáme, že jsou v involuci s tímto komplexem Γ^2.

Každým zobecněným cylindroidem P^4 prochází ∞^4 zobecněných A^2 komplexů, jež si označíme jakožto komplexy Γ_1^2. Dvojnými přímkami těchto ∞^4 komplexů Γ_1^2 jsou všechny ∞^4 páry konjugovaných polár absolutní plochy. Každému z těchto ∞^4 komplexů Γ_1^2 přísluší involutorně určitý zobecněný cylindroid P_1^4.

Přísluší tedy ke každému zobecněnému cylindroidu P^4 systém ∞^4 zobecněných cylindroidů P_1^4, o kterých říkáme, že jsou v involuci se zobecněným cylindroidem P^4.

V našem komplexovém systému S_3 existuje ∞^2 komplexových svazků, jejichž základní kongruence mají tu vlastnost, že vždy dvě přímky každé z těchto kongruencí náleží absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$. Neboť k libovolné přímce s lin. kongruence $[m, n]$ existují dvě přímky s', s'' v této kongruenci svrchu uvedené vlastnosti. Nalezneme je následujícím způsobem: přímka s vytíná z každého systému přímek na absolutní ploše $\mathfrak{A}^2$ vždy dvě přímky: l_1, r_1; l_2, r_2; přímky s', s'' dostaneme pak vždy jako druhé transversály čtyř mimoběžek: m, n, l_1, r_1 resp. m, n, l_2, r_2. První transversály tvoří patrně vždy přímka s. Ukázali jsme však v odst. 7. pojednání „O zobecněném cylindroidu", že v případě, když řídicí přímky základní kongruence komplexového svazku protínají tytéž přímky absolutní plochy, že v tomto případě přechází zobecněný cylindroid v hyperboloid vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní řídicími přímkami základní kongruence svazku proložený. Párů přímkových s, s' resp. s, s'' existuje ∞^2 právě jako přímek s lineární kongruence $[m, n]$. Obsahuje tedy komplex Γ^2 ∞^2 hyperboloidů, které jsou ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantními a sice dva systémy, poněvadž máme dva druhy přímkových párů $s\ s'$ a $s\ s''$, od kterých k našim hyperboloidům přicházíme.

Involuce konjugovaných polár na těchto hyperboloidech absolutní plochou indukovaná vede ku lineárním komplexům, které zastupují zde quadratické Γ_1^2 komplexy. Jest tedy nutno, aby těchto ∞^2 lineárních

komplexu procházelo vesměs zobecněným cylindroidem P^4 příslušným základní kongruenci $[mn]$.

Shrneme-li naše výsledky dostáváme dvojvětu:

Zobecněný A^2 komplex obsahuje dva systémy ∞^2 hyperboloidů polárně invariantních vzhledem ku absolutní ploše.

Zobecněným cylindroidem procházejí dva systémy ∞^2 lineárních komplexů polárně invariantních vzhledem ku absolutní ploše.

Ukážeme ještě jiný způsob, jak lze dospěti ku systému ∞^2 vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantních hyperboloidů v zobecněném A^2 komplexu obsažených.

Mysleme si druhou význačnou involuci na P^4 a uvažujme libovolný pár její r, r'. Vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantní lineární kongruence $[r, r']$ náleží našemu zobecněnému A^2 komplexu a ∞^2 přímky této kongruence lze uspořádati ve dva systémy ∞^1 vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariatních hyperboloidů. Každý tento systém tvoří speciální svazek hyperboloidů o základním prostorovém čtyřúhelníku, který ihned určíme.

Protínají-li r, r' v obou systémech plochy $\mathfrak{A}^2$ dva páry přímek: u_1, v_1; u_2, v_2, tu jsou prostorové čtyřúhelníky o stranách $r\ r'$, u_1, v_1 a r, r', u_2, v_2 základními čtyřúhelníky našich speciálních svazků hyperboloidu. Ježto existuje na P^4 ∞^1 párů r, r' a každý pár určuje ∞^1 hyperboloidů, dospíváme tak ku ∞^2 hyperboloidům. A sice ku dvěma ruzným systémum ∞^2 těchto ploch, dle toho, zda béřeme v úvahu první nebo druhý systém přímek na $\mathfrak{A}^2$.

Mimo právě dva vytčené systémy ∞^2 vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantních hyperboloidů existuje ještě jeden systém ∞^2 hyperboloidu, obsažených v našem zobecněném A^2 komplexu, kteréžto hyperboloidy však nejsou vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantními. Ku nějakému hyperboloidu z tohoto systému ∞^2 hyperboloidů dospějeme od kterékoli dvojiny párů přímek, z nichž každý náleží jedné význačné involuci na P^4. Takových dvojin existuje ∞^2. Buďtež dva páry r, r'; u, v takovou dvojinou párů. Dle vlastnosti obou význačných našich involucí, že kterýkoli pár jedné musí se všemi páry druhé tvořiti hyperboloidickou čtveřinu, tvoří takovou čtveřinu čtyři přímky r, r'; u, v. Řídicí systém hyperboloidu (r, r', u, v) náleží patrně našemu zobecněnému A^2 komplexu.

A tak dospíváme ku ∞^2 hyperboloidům, které jsou v našem zobecněném A^2 komplexu obsaženy. Průsečná křivka 8. stupně zobecněného cylindroidu P^4 a kteréhokoli hyperboloidu z tohoto systému rozpadá se v 8 přímek. Přímkami těmi jsou vždy 4 přímky r, r', u, v a pak obě dvojné řídící přímky p, q zobecněného cylindroidu P^4, z nichž se každá počítá dvojnásobně. Hyperboloidy tyto nemohou býti vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantními, neb kdyby jimi byly, tu by mimo uvedených 8 přímek měly ještě 2 přímky s P^4 společné, totiž přímky u', v', které jsou konj.

polárami přímek u, v vzhledem ku absolutní ploše. To jest však nemožné, aby hyperboloid a plocha P^4 měly 10 přímek společných. Tím jest zároveň dokázáno, že tento systém ∞^2 hyperboloidů není totožným se dvěma systémy dříve uvažovaných, vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ polárně invariantních hyperboloidů.

Považujme dva páry přímek r, r'; u, v za dva páry konj. polár určitého lineárního komplexu. To zajisté jest možné, neboť tyto přímky, jak jsme dříve ukázali, tvoří hyperboloidickou čtveřinu. Pak vidíme, že kongruence $(2, 2)$, v níž takto určený lineární komplex náš zobecněný quadratický A^2 komplex proniká, rozpadá se ve dvě lineární kongruence $[r, r']$ a $[u, v]$. Existuje tudíž ∞^2 lineárních komplexů, které zobecněný A^2 komplex pronikají ve dvou lineárních kongruencích.

Poznámka. Systém ∞^2 hyperboloidů, které protínají P^4 v 8 přímkách a systém ∞^2 lineárních komplexů, které zobecněný A^2 komplex pronikají ve dvou lineárních kongruencích, existuje při všech plochách přímkových 4. stupně se dvěma dvojnými řídícími přímkami resp. při všech quadratických komplexech, které lze vytvořiti ze dvou projektivních svazků lin. komplexů. To vyplývá z toho, že vlastnosti, kterých jsme ku vyhledání těchto systémů použili při P^4 a při zobecněném A^2 komplexu, jsou zároveň vlastnostmi přímkových ploch 4. stupně se dvěma dvojnými přímkami, resp. quadratických komplexů, lineární kongruence obsahujících.

13. Applikace na A^2 komplex a Plückerův konoid.

Věty, které v tomto odstavci stručně odvodíme, jsou specialisací vět v odstavci předešlém, když nahradíme absolutní plochu $\mathfrak{A}^2$ kulovou kružnicí v nekonečnu.

Libovolné dvě přímky x, y obsažené v A^2 komplexu příslušném komplexovému systému S_3 o základních přímkách m, n stanoví určitý komplexový svazek v tomto systému obsažený a tedy též určitý Plückerův konoid K_1^3 tomuto svazku komplexovému příslušný. Osu o konoidu K_1^3 nalezneme patrně jako osu mimoběžek x, y. Pár přímek u, v, které protínají osu o kolmo, a které jsou současně transversálami mimoběžek m, n jest párem řídících přímek základní kongruence komplexového svazku, kterému přísluší Plückerův konoid K_1^3.

Tento Plückerův konoid náleží A^2 komplexu, ježto svazek komplexový, kterému přísluší jest v komplexovém systému S_3 obsažen. Dostáváme pak tento konoid jakožto souhrn všech přímek A^2 komplexu, které protínají přímku o kolmo. Jako v případě obecnějším jsme dospěli ku systému ∞^4 zobecněných cylindroidů P_1^4, tak dospíváme zde ku ∞^4 Plückerovým konoidům K_1^3 od všech ∞^4 přímek o prostoru. Konoid Plückerův příslušný komplexovému svazku, který jest s komplexovým systémem S_3 v involuci, označme si K^3.

Uvědomíme-li si v pojednání zde citovaném „O zobecněném cylindroidu“ vytčený význam obou význačných involucí na Plückerově konoidu pro vytvoření A^2 komplexu, tu dospíváme ku dvěma větám, jež jsou speciálním případem první věty v odstavci předešlém. Podotýkáme ještě, že slovem „involuce na Plückerově konoidu“ rozumíme zkráceně první význačnou involuci na této ploše.

Věty naše pak znějí:

Dán-li Plückerův konoid K^3 a libovolná přímka o v prostoru, tu geometrické místo orthogonálních transversál přímky o a postupně všech přímek konoidu Plückerova K^3 jest opět určitý konoid Plückerův K_1^3, jehož osou jest přímka o.

Dán-li Plückerův konoid K^3 a libovolná přímka o v prostoru, tu geometrické místo všech párů přímek, které protínají kolmo přímku o a vždy jeden pár involuce na Plückerově konoidu K^3 jest opět určitý Plückerův konoid K_1^3, jehož osou jest přímka o.

Od všech ∞^4 přímek o v prostoru dospíváme tak vzhledem ku pevnému Plückerově konoidu ku ∞^4 Plückerovým konoidům K_1^3. O konoidech K_1^3 budeme říkati, že jsou vzhledem ku konoidu K^3 v involuci.

Speciálním případem dalších vět v předešlém odstavci jsou věty:

V každém A^2 komplexu leží ∞^4 Plückerových konoidů K_1^3.

Každou přímku v prostoru lze považovati za dvojnou přímku jednoho z těchto ∞^4 konoidů K_1^3.

Každému z těchto ∞^4 konoidů K_1^3 přísluší involutorně určitý A_1^2 komplex. Přísluší tedy každému A^2 komplexu systém ∞^4 A_1^2 komplexů, o kterých říkáme, že jsou s A^2 komplexem v involuci.

Každým Plückerovým konoidem K^3 prochází ∞^4 A_1^2 komplexů.

Kazdou přímku v prostoru lze považovati za v konečnu ležící dvojnou přímku jednoho z těchto ∞^4 A_1^2 komplexů.

Každému z těchto ∞^4 A_1^2 komplexů přísluší involutorně určitý Plückerův konoid K_1^3. Přísluší tedy každému Plückerově konoidu K^3 systém ∞^4 Plückerových konoidů K_1^3, o kterých říkáme, že jsou s konoidem K^3 v involuci.

Dva systémy ∞^2 vzhledem ku absolutní ploše polárně invariantních hyperboloidů v zobecněném A^2 komplexu, zastupuje nám při A^2 komplexu ∞^2 svazků paprskových. Tyto svazky leží v ∞^2 rovinách proložených všemi přímkami p Plückerova konoidu jakožto singulární plochy A^2 komplexů a sestávají z paprsků ku p kolmých.

Dále ukážeme, že druhý systém ∞^2 hyperboloidů v zobecněném A^2 komplexu, které protínají jeho singulární plochu vždy v 8 přímkách, zastupuje při A^2 komplexu systém ∞^2 orthogonálních paraboloidů protínajících Plückerův konoid vždy v 6 přímkách.

Uvažujme libovolný pár x, y involuce přímek na konoidu Plückerově K^3. Budiž pak t třetí libovolná přímka konoidu K^3. Hyperboloid (x, y, t) jest paraboloidem, ježto jeho přímky x, y, t jsou rovnoběžny s řídící rovinou konoidu K^3. Jest pak orthogonálním paraboloidem, ježto má dvě kolmé řídicí roviny, totiž řídicí rovinu konoidu K^3 a rovinu ku t kolmou. Šest přímek proniku našeho orthogonálního paraboloidu s konoidem K^3 jsou přímky x, y, t, u_∞, o, kde u_∞ jest přímkou konoidu v nekonečně vzdálené rovině a o jeho osou, kterou jakožto dvojnou přímku nutno dvakrát počítati. Pár přímek x, y možno zvoliti na ∞^1 způsobů, rovněž na ∞^1 způsobů možno voliti t, dospíváme tedy skutečně ku ∞^2 orthogonálním paraboloidům svrchu uvedené vlastnosti. Zároveň pak můžeme vysloviti větu:

Geometrické místo druhých přímkových systémů ∞^2 orthogonálních paraboloidů procházejících vždy jedním z ∞^1 párů involuce na Plückerově konoidu jest A^2 komplex, který jest s konoidem v involuci:

Snadno lze nahlédnouti, že první přímkové systémy těchto ∞^2 orthogonálních paraboloidů tvoří všecky přímky osu o konoidu Plückerova kolmo protínající.

14. O kongruencích C_{33} v zobecněném A^2 komplexu.

Vytkněme si v zobecněném A^2 komplexu Γ^2 základními přímkami m, n komplexového systému S_3 stanoveném tři přímky x, y, z. Ty nám stanoví v Γ^2 určitou zobecněnou kongruenci Wälschovu C_{33}. Neboť dva páry ze tří přímek x, y, z stanoví dva svazky komplexové, kteréžto svazky stanoví určitý komplexový systém S_2 a tomuto systému přísluší C_{33}. Ježto každou ze tří přímek x, y, z můžeme voliti na ∞^3 způsobů, zdálo by se, že v komplexu Γ^2 existuje ∞^9 kongruencí C_{33}, množství to se sníží však o 6, když uvážíme, že každá z našich tří přímek může zaujmouti v kongruenci C_{33} ∞^2 různých poloh. Jest tedy v komplexu Γ^2 ∞^3 kongruencí C_{33}.

Stanovme základní hyperboloid H^2 kongruence C_{33}, když jest dána třemi přímkami x, y, z v komplexu Γ^2 obsaženými. Buďte x', y', z' konjugovanými polárami ku prvým třem přímkám vzhledem ku absolutní ploše. Sestrojme nyní ku třem čtveřinám přímek:

$$x, y, x', y'; \quad x, z, x', z'; \quad y, z, y', z'$$

páry společných transversál:

$$t_{xy}, t'_{xy}; \quad t_{xz}, t'_{xz}; \quad t_{yz}, t'_{yz}$$

a dále sestrojme ku jednotlivým těmto párům přímkovým a páru základních přímek m, n vždy dvě společné transversály:

$$u_{xy},\ v_{xy};\ u_{xz},\ v_{xz};\ u_{yz},\ v_{yz}.$$

Tyto poslední páry transversál jsou patrně páry řídících přímek základních kongruencí tří komplexových svazků, stanovených páry přímek:

$$x,\ y;\ x,\ z;\ y,\ z;$$

Tyto tři komplexové svazky leží v témže komplexovém systému 2. stupně S_2 a tedy všech 6 přímek u_{xy}, v_{xy}, u_{xz}, v_{xz}, u_{yz}, v_{yz} musí ležeti na základním hyperboloidu H^2 tohoto systému. Tím jsme základní hyperboloid H^2 stanovili.

Páry transversál t_{xy}, t'_{xy}, atd. jsouce transversálami vždy dvou přímek x, y kongruence C_{33} a dvou přímek x', y' prvým vzhledem ku $\mathfrak{A}^2$ konjugovaných, jsou páry přímek kongruence C'_{33}, která jest involutorně přidružená ke kongruenci C_{33}, jak jsme v odstavci 12. byli dokázali. Dvě takové involutorně přidružené kongruence přísluší dvěma komplexovým systémům druhého stupně, které jsou v involuci. V našem případě označme si tyto systémy S_2 a S_2'. Ježto ale S_2 leží v S_3, musí S_2' obsahovati svazek komplexový, který jest ku S_3 v involuci a to jest komplexový svazek o základní kongruenci $[m, n]$ a o zobecněném cylindroidu P^1. A když C_{33} leží v komplexu Γ^2, musí C_{33}' obsahovati zobecněný cylindroid P^1. Můžeme tedy vysloviti věty:

V zobecněném A^2 komplexu jest obsažno ∞^3 zobecněných kongruencí Wälschových C_{33}. Kongruence C_{33}' těmto involutorně přidružené procházejí zobecněným cylindroidem P^1, který jest ku našemu zobecněnému A^2 komplexu v involuci.

Zobecněným cylindroidem P^1 prochází ∞^3 zobecněných kongruencí Wälschových C_{33}'. Kongruence C_{33} těmto involutorně přidružené leží v zobecněném A^2 komplexu, který jest ku zobecněnému cylindroidu P^1 v involuci.

Uvažujme speciální případ, kdy absolutní plocha $\mathfrak{A}^2$ jest nahrazena kulovou kružnicí v nekonečnu. Budiž singulární plochou vzniklého A^2 komplexu Plückerův konoid K^3. Ježto A^2 komplex lze považovati za geometrické místo všech přímek, které protínají kolmo přímky konoidu K^3, zvolme si tři přímky x, y, z této vlastnosti. Ty nám stanoví určitou Wälschovu kongruenci v A^2 komplexu obsaženou, její základní hyperboloid nalezneme následujícím způsobem:

Sestrojme si tři orthogonální transversály t_{xy}, t_{xz}, t_{xy} vždy dvou přímek, z přímek x, y, z. Sestrojíme-li pak na třech hyperboloidech:

$$(m,\ n,\ t_{xy});\ (m,\ n,\ t_{xz});\ (m,\ n,\ t_{yz})$$

vždy dvě přímky druhých systémů přímkových, které vždy přímky t_{xy}, t_{xz}, t_{yz} protínají kolmo, tu 6 těchto přímek:

$$u_{xy},\ v_{xy};\ u_{xz},\ v_{xz};\ u_{yz},\ v_{yz}$$

leží na základním hyperboloidu Wälschovy kongruence přímkami x, y, z v A^2 komplexu vytčené.

III.

O geometrických místech konjugovaných polár společných vždy dvěma lineárním komplexům ze dvou komplexových systémů.

15. Případ kdy polarita absolutní plochy při dříve uvažovaných geometrických místech nahrazena jest polaritou lineárního komplexu.

Přistupme ku případu, že polarita absolutní plochy $\mathfrak{A}^2$ jest nahrazena polaritou určitého lineárního komplexu A a studujme geometrická místa společných konjugovaných polár, které mají společné lin. komplexy v daných lineárních komplexových systémech s konjugovanými polárami pevného lineárního komplexu A. Budeme patrně rozeznávati tři případy a sice budeme hledati společné konjugované poláry lin. komplexu A a jednotlivých lin. komplexů postupně komplexových systémů S_1, S_2 a S_3.

Případ první.

Buďte m, n řídicími přímkami základní lineární kongruence komplexového svazku S_1. Konjugované poláry m', n' těchto přímek vzhledem ku lineárnímu komplexu A tvoří s přímkami m, n hyperboloidickou čtveřinu přímek, ježto dva páry konj. polár téhož lineárního komplexu tvoří vždy hyperboloidickou čtveřinu. Označme si G^2 jakožto hyperboloid proložený touto čtveřinou přímek. Hyperboloid tento G^2 jest patrně vzhledem ku lin. komplexu A polárně invariantním, a v jeho systému přímek (m, n, m', n') existuje involuce konj. polár komplexu A a páry a, a' této involuce jsou patrně společnými konjugovanými polárami komplexu A a vždy jednoho komplexu v komplexovém svazku S_1.

Jiné páry konjugovaných polár lineárního komplexu A mimo páry a, a' na G^2 ležící nemohou hověti našemu geometrickému místu. Neboť každý pár r, r' přímek našeho geometrického místa musí tvořiti současně s m, n a s m', n' hyperboloidickou čtveřinu přímek, ale dokázali jsme v pomocné větě v odstavci 7. často zde citovaného pojednání „O zobecněném cylindroidu“, že v tomto případě pár přímek r, r' musí ležeti na hyperboloidu (m, n, m', n') a tudíž můžeme tento pár pokládati za jeden z párů a, a' naší involuce.

Můžeme tedy vysloviti větu:

Geometrické místo konjugovaných polár společných danému lineárnímu komplexu A a jednotlivým lin. komplexům

svazku S_1 jest vzhledem ku komplexu A polárně invariantní hyperboloid proložený řídicími přímkami základní kongruence komplexového svazku S_1.

Případ druhý.

Označme si H^2 jakožto základní hyperboloid daného komplexového systému S_2 a budiž Σ ten systém přímek tohoto hyperboloidu, který vyplňují řídící přímky všech speciálních komplexů systému S_2, Σ' pak systém přímek, který vyplněn jest komplexovými přímkami společnými všem ∞^2 lineárním komplexům systému S_2. Dvě přímky, které má systém přímek Σ společné s daným pevným lineárním komplexem A označme si u v, přímky pak systému Σ' v komplexu A ležící buďtež u', v'. Dokážeme, že každý pár t, t' z ∞^2 párů konj. polár lin. komplexu A, obsažených v lineární kongruenci $[u', v']$ lze pokládati za pár konjugovaných polár vzhledem k určitému lineárnímu komplexu systému S_2.

Stanoví totiž libovolná přímka k systému Σ a k ní vzhledem ku A konjugovaná polára k' s přímkami t, t' určitý ku A polárně invariantní hyperboloid K^2, který přísluší jakožto geometrické místo společných párů konj. polár komplexu A a určitému komplexovému svazku S_1 v S_2 obsaženému. Řídícími přímkami základní kongruence svazku S_1 jest přímka k a určitá přímka i, které hyperboloid K^2 ze systému Σ vytíná. A vytíná tyto dvě přímky proto, poněvadž má se systémem Σ' téhož hyperboloidu H^2 dvě přímky u', v' společné. A ve svazku komplexovém S_1 o základní kongruenci $[i, k]$ existuje patrně určitý lineární komplex, který s komplexem A má společný pár konj. polár t, t'.

V systému S_2 existuje ∞^2 svazků komplexových S_1 a každému svazku tomu přísluší určitý hyperboloid K^2 a všecky tyto hyperboloidy K^2 jsou obsaženy v lineární kongruenci $[u', v']$. Nemohou tedy našemu geometrickému místu hověti jiné páry přímek t, t', než právě jen ty, které jsou obsaženy v lineární kongruenci $[u', v']$. Řídící přímky u', v' této kongruence jsou patrně dvěma komplexovými přímkami lineárního komplexu A, které má tento komplex společné se všemi komplexy systému S_2. Jsou to patrně též základní přímky lineárního systému lineárních komplexů stupně třetího S_3, stanoveného v tomto systému obsaženým systémem S_2 a komplexem A.

Můžeme pak vysloviti větu:

Geometrické místo konjugovaných polár společných danému lineárnímu komplexu A a jednotlivým lineárním komplexům komplexového systému S_2 jest lineární kongruence, jejímiž řídícími přímkami jsou dvě komplexové přímky, které mají všechny lin. komplexy systému S_2 s lin. komplexem A společné.

Případ třetí.

Buďtež m, n základními přímkami lineárního komplexového systému S_3. Proložme si opět základními přímkami m n vzhledem ku lineárnímu komplexu A polárně invariantní hyperboloid (m, n, m', n') a buďtež u', v' přímkami tohoto systému našeho hyperboloidu, které se nalézají v lin. komplexu A. To jest u', v' jsou samodružnými přímkami involuce konjugovaných polár m, m'; n n'. Společné přímky pak řídicího systému přímkového hyperboloidu (m, n, m', n') s komplexem A označme si u, v. Uspořádejme si nyní ∞^2 přímek lineární kongruence $[m, n]$ v ∞^1 systémů přímek Σ, jež přísluší ∞^1 hyperboloidům H^2 přímkami u, v procházejícím.

K těmto ∞^1 hyperboloidům H^2 dospějeme patrně, když si v naší kongruenci $[m, n]$ vytkneme libovolný svazek paprskový a jednotlivými paprsky tohoto svazku a přímkami u, v prokládáme hyperboloidy. Máme tu patrně speciální svazek všech hyperboloidů procházejících prostorovým čtyřúhelníkem. Těchto ∞^1 hyperboloidů H^2 můžeme pokládati za základní hyperboloidy ∞^1 lineárních systémů 2. stupně S_2 obsažených v našem komplexovém systému S_3. A lze snadno nahlédnouti, že těchto ∞^1 systémů S_2 vyplňuje úplně systém S_3. Systémy přímkové Σ všech ∞^1 hyperboloidů H^2 mají s komplexem A přímky u, v společné. Druhé pak přímkové systémy Σ' jednotlivých těchto hyperboloidů mají s lineárním komplexem A společné jednotlivé páry involuce konjugovaných polár komplexu A na hyperboloidu (m, n, m', n') a samodružným párem této involuce jsou přímky u', v'.

Jednotlivé páry přímek této involuce, jak v předešlém jsme ukázali, lze pokládati za řídicí přímky lineárních kongruencí, které jsou vyplněny přímkami, jež jsou společnými konjugovanými polárami lin. komplexu A a jednotlivých lineárních komplexů určitého systému S_2 z našich vytčených ∞^1 systémů S_2 v systému S_3. Přímky pak všech našich lineárních kongruencí, jejichž řídicí přímky tvoří shora vytčenou involuci, vyplňují patrně lineární komplex, který jest ku lineárnímu komplexu A polárně invariantním. Tato polární invariance jest patrna z polární invariance vytčených ∞^1 lineárních kongruencí.

Můžeme tedy vysloviti větu:

Geometrické místo konjugovaných polár společných danému lineárnímu komplexu A a jednotlivým lineárním komplexům lineárního komplexového systému 3. stupně S_3 jest ku A polárně invariantní lineární komplex stanovený základními přímkami systému S_3 jakožto párem svých konjugovaných polár.

16. Rozšíření úvah v odstavci předešlém.

Dále rozšíříme naše úvahy tak, že místo komplexu A si budeme mysliti celý lineární komplexový systém T_k a hledáme pak geometrická

místa konjugovaných polár společných vždy jednomu lin. komplexu ze systému S_i a jednomu lin. komplexu ze systému T_k. Bude patrně třeba vyšetřiti pouze dva případy, totiž vyhledati společné páry konjugovaných polár vždy dvou lin. komplexů z různých komplexových svazků S_1 a T_1 a za druhé z komplexového systému S_2 a svazku T_1.

Případ první.

Máme nalézti geometrické místo společných konj. polár vždy ku dvěma lineárním komplexům ze dvou komplexových svazků S_1 a T_1. Buďtež s, s'; t, t' páry řídicích přímek základních kongruencí těchto komplexových svazků. Problém náš jest patrně totožný s problémem: nalézti všecky páry přímkové v prostoru, které současně se dvěma danými páry přímkovými s, s'; t, t' tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek.

Budiž p, q pár přímek, který hoví této podmínce. Obě sborcené plochy 2. stupně (s, s', p, q) a (t, t', p, q) ježto mají společné dvě přímky p, q téhož přímkového systému, mají též společné dvě přímky druhého systému. To nemohou však býti jiné přímky než společné transversály u, v čtyř mimoběžek s, s', t, t'. Náleží tudíž všecky páry přímek p, q lineární kongruenci $[u, v]$.

Avšak též všecky přímky lineární kongruence $[u, v]$ lze uspořádati tak, aby hověly naší úloze. Budiž x libovolná přímka naší kongruence $[u, v]$, tu jí odpovídá vždy druhá přímka y této kongruence, kterou dostaneme v průseku hyperboloidů (s, s', x) a (t, t', x).

Ježto přímky u, v jsou společnými komplexovými přímkami všech lineárních komplexů obou komplexových svazků S_1 a T_1, můžeme vzhledem ku docíleným výsledkům vysloviti větu:

Geometrické místo společných párů konjugovaných polár vždy vzhledem ku dvěma lineárním komplexům ze dvou různých komplexových svazků jest lineární kongruence, jejímiž řídicími přímkami jsou obě společné komplexové přímky všech lin. komplexů z obou svazků.

V případě, že řídicí přímky obou základních kongruencí $[s, s']$ a $[t, t']$ tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, přechází naše lineární kongruence $[u, v]$ v řídicí přímkový systém hyperboloidické čtveřiny (s, s', t, t'). Lineární systém lin. komplexů 3. stupně S_3 oběma komplexovými svazky S_1 a T_1 stanovený a jehož základními přímkami jsou patrně přímky u, v, přechází v určitý komplexový systém 2. stupně S_2 o hyperboloidu (s, s', t, t') jakožto hyperboloidu základním.

Případ druhý.

Máme nalézti geometrické místo společných konjugovaných polár vždy ku dvěma lineárním komplexům z komplexových systémů S_2 a T_1. Budiž H^2 základní hyperboloid systému S_2 a Σ zase jeho přímkový systém

jakožto souhrn všech řídicích přímek speciálních komplexů systému S_2. Řídicí přímky základní kongruence svazku T_1 budtež t, t'.

Geometrické místo naše bude patrně určitý komplex, neboť každý z ∞^1 lin. komplexů svazku T_1 můžeme spojiti s kterýmkoli z ∞^2 lin. komplexů systému S_2 a tak dospíváme ku ∞^3 dvojinám lineárních komplexů, jejichž ∞^3 páry společných konj. polár vytvoří zmíněný komplex.

Ukážeme, že tento komplex obsahuje ∞^2 lineárních kongruencí, kterážto vlastnost přísluší jedině komplexu lineárnímu, a že tedy náš komplex jest komplexem lineárním. V systému Σ základního hyperboloidu H^2 můžeme si vytknouti ∞^2 párů přímek x, y a lineární kongruence $[x, y]$ jakožto kongruence základní stanoví vždy jeden z ∞^2 komplexových svazků S_1, obsažených v systému S_2. Sestrojíme-li vždy ku jednomu z ∞^2 párů x, y a páru t, t' obě společné transversály p, q, tu dle věty předešlé jsou lineární kongruence $[p, q]$ geometrickým místem společných konj. polár vzhledem ku lineárním komplexům ze svazků S_1 a ze svazku T_1.

Náleží tudíž všechny ∞^2 lineární kongruence $[p, q]$ našemu hledanému geometrickému místu, které jest tudíž lineárním komplexem. Tomuto lineárnímu komplexu náleží patrně i řídicí přímky t, t' základní lin. kongruence svazku komplexového T_1 i přímkový systém Σ základního hyperboloidu komplexového systému S_2. Jest tedy náš lineární komplex těmito dvěma útvary jednoznačně stanoven. Výsledek našich úvah můžeme shrnouti ve větu:

Geometrické místo společných párů konjugovaných polár vždy vzhledem ku dvěma lineárním komplexům jednoho z daného komplexového systému 2. stupně S_2 a jednoho z daného komplexového svazku T_1 jest lineární komplex. Lineární komplex tento jest stanoven řídicími přímkami speciálních komplexů systémů S_2 a T_1 jakožto přímkami komplexovými.

Uvedeme ještě jiný tvar této věty, která zároveň nam odhaluje jednu vlastnost lineárního komplexu:

Geometrické místo párů přímek, které tvoří hyperboloidickou čtveřinu s danými dvěma přímkami a s libovolným párem přímek jednoho přímkového systému daného hyperboloidu, jest lineární komplex oněmi dvěma přímkami a tímto přímkovým systémem hyperboloidu procházející.

Šumavská jezera.

III.

Prášilské jezero.

Napsal **V. Švambera.**

Se 3 obr. a mapkou.

(Předloženo dne 13. února 1914.)

Historie výzkumu jezera Prášilského není rozsáhlá. První zmínky o něm nalezl jsem v Josefinském katastru. Jezero na panství Prášilském mělo býti tehdáž „podle vysokého nařízení ze dne 30. června 1785 geometricky změřeno". Záznam v Josefinském katastru sděluje o tom: „Toto jezero, jež se nalézá v panském lese zv. Seerucken a hraničí na panský les Mittagberg, změřil geometricky 16. srpna 1785 nadporučík v. Pemler. Jezero má plochu 5526½ čtv. sáhů čili 3 jitra 726½ sáhů. Pokud po lidském rozumu lze souditi, nebude možno tohoto jezera pro jeho vysokou a divokou polohu nikdy a nijakým způsobem zužitkovati".[1]) Rozloha jezera udávaná Josefinským katastrem jest příliš nízká, než abychom mohli zmíněné měření pokládati za správné; spíše se tu jedná, jako při Josefinském katastru jistě i jinde, pouze o hrubý odhad. Můžeme sice připustiti, že hladina jezera před umělou úpravou odtoku ve stol. XIX. byla nižší než dnes, že by však byla klesla na polovici dnešní, není možno. Nadporučík v. Pemler patrně nepořídil ani žádné skizzy a tak objevuje se jezero Prášilské teprve při stabilním katastru poprvé v určitých obrysech na mapě.[2]) Katastrální mapu této končiny shotovil geometr Karel Struska r. 1837. I v textu provázejícím mapu katastrální jest jezero bezejmenné, ačkoliv se tu podrobně udávají jeho rozměry. Ovšem jest jezero schematicky a beze jména pod nejmenovanou horou zakresleno již na mapě Kreybichově.[3]) Na známé mapě Müllerově z počátku XVIII. stol. ještě po něm není stopy. Nějaké

[1]) Josefinský katastr. Dominium Stubenbach. Položka č. 162 a zvláštní protokol. 1786.

[2]) Stabilní katastr. Stubenbach. I. Teil. Bl. VIII, 1 : 2880. 1837.

[3]) Fr. Jac. H. Kreybich, Charte vom Prachiner Kreise. Prag 1831.

určitější zprávy přináší poprvé Sommer.[1]) „Jezero nalézá se ve vysoké poloze na Seerücken ve skalní kotlině, má plochu 7 jiter a hloubku 9 sáhů. Stavidlem v skalisté hrázi lze vody jeho použiti ku plavení dříví na jezerním potoku. Potoky jsou bohaté na pstruhy a někdy vyskytují se v nich i lososi.“ Určitější, authentické zprávy přináší na základě vlastní návštěvy F. Hochstetter. U něho[2]) nalézáme poprvé zmínku o zvlášt typické přírodní hrázi, jež v severu a na východě jezero obkličuje. Hochstetter udává její výšku 20—30 stop, v jiné současné zprávě[3]) na 30—40 stop. Právě na tomto jezeru konstatoval Hochstetter důležitou hranici mezi žulou a rulou. Hochstetter také sdělil[4]) první měření nadmořské výšky jezera a sice 3352 stop jako průměr ze dvou pozorování barometrických. Pro Polední horu měřil 4164·4 stop, kdežto trigonometrické měření úřední udává 4213·74 stop. Na první specialní mapě úřední[5]) nedostalo se jezeru ani jména, ba ani toho označení jako na mapě Kreybichově; jest tu sice správně, ale beze všeho označení zaneseno. Krejčí jezero asi sám viděl, nepodává však[6]) vůči Hochstetterovi nic nového.

Nejbližším rozmnožením vědomostí o jezeru Prášilském jest zpráva A. Friče,[7]) jenž navštívil jezero v červnu 1871. Frič se svým assistentem H. B. Hellichem a sběratelem J. Štaskou nemohl na voru pořízeném z čerstvých kmenů podniknouti plavbu po jezeře, takže nebylo mu lze zoologický výzkum úplně provésti. Hloubku jezera odhadoval jenom asi na 15 stop. K tomuto výzkumu pojí se také publikace Bohusl. Hellicha.[8])

Časově následuje nové mapování vojenského geografického ústavu ve Vídni r. 1878. Zdejší sekce původního mapování[9]) poprvé podává terrain ve správné formě. Na starší mapě specialní v měř. 1:144000 byl naznačen ještě schematichy, nyní poprvé vidíme tuto končinu s detaillem celkem správným a poprvé na mapě číslo nadmořské výšky (1079 *m*). Specialní mapa v měř. 1:75000[10]) jest zde celkem věrným zmenšením původní mapy v měř. 1:25000.

---

[1]) J. G. Sommer, Das Königreich Böhmen. IX. Budweiser Kreis. Prag 1841, p. XXX, 258.

[2]) *t.*, Geognostische Studien aus dem Böhmerwalde. Jahrbuch der k. k. Geolog. Reichsanstalt, VI. 1855, p. 26 a 27.

[3]) F. Hochstetter, Aus dem Böhmerwald. Beilage zu Nr. 220 der Allg. Zeitung, 8. August 1855, p. 3515.

[4]) *t.*, Höhenverhältnisse des Böhmerwaldes. Tamt. VII., 1856, p. 143.

[5]) Spezialkarte von Böhmen, 1 : 144.000. List č. 29.

[6]) J. Wenzig u. J. Krejčí, Der Böhmerwald. Prag 1860, p. 42.

[7]) A. Frič, Über die Fauna der Böhmerwaldseen. Sitzber. d. k. böhm Ges. d. Wiss. Prag 1871, II., p. 6, 9, 10.

[8]) B. Hellich, Perloočky země České (Cladocera). Archiv pro přír. prosk. Čech. 3. díl č. 4. Praha 1878, p. 120 a 121.

[9]) Copien von Militär-Aufnahms-Sectionen der Öster-Ung. Monarchie, list Z. 9, C IX., S. W. 1 : 25.000.

[10]) Spezialkarte der Österr.-Ung. Monarchie, list Z. 9, C. IX., 1 : 75000. I. vyd. 1882.

Botanik Willkomm[1]). navštívil patrně osobně jezero P., ale z díla jeho dovídáme se nově jenom to, že hráz jezera jest částečně kryta klečí. Nadmořskou výšku jezera, jež se mu zdálo nehybným, udával Willkomm ok. 3500 stop. Z různých průvodců pro turisty zaslouží zmínky jenom Řivnáčův,[2]) jenž udává nadmořskou výšku jezera na 1060 *m*, výšku stěny na 160 *m*, plochu ok. 4 *ha*. Poprvé čteme tu jméno „Alte Schwelle" pro bývalé sousední jezero.

O decennium později po Fričovi přichází sem F. Bayberger.[3]) Také on neměl zde možnost spustiti se na hladinu vodní a musil se obmeziti jenom na pozorování s břehu. Přišel sem ve chvíli, kdy se zakládalo nové stavidlo a tu děkujeme právě Baybergerovi některé nové poznatky. Korriguje také Fričův názor o mělkém jezeru. Mapu jezera Bayberger nepřináší, pouze přehnaný profil stěny a jezera pod ní se nacházejícího.

Poslední můj předchůdce na jezeře Prášilském byl Dr. P. Wagner,[4]) jenž zde dlel uprostřed srpna 1896. Podává především novou petrografickou charakteristiku nejbližšího okolí jezera. O hrázi jezerní nepřináší nic nového. Wagner upozornil také na „Alte Schwelle", jež jest sice v sekci původního mapování správně, ale beze jména označena, a soudil, že zde jistě bývalo jezero, související s Prášilským. Wagnerovi také děkujeme první skutečná fysicko-geografická pozorování ve vodách jezera Prášilského. Měřil tu vedle hloubek i teplotu a průhlednost vody. Jeho mapa v měřítku 1 : 25.000 jest kopií sekce původního mapování; pouze jméno „Alte Schwelle" jest tu nově — nehledě ovšem k manuskriptním mapám lesním — zaznamenáno. Pokud se týče údajů jež se nalézají v různých průvodcích, víme, že se tu nejedná nikdy o nějaká positivní měření, nýbrž často jenom o fantastické, ničím neodůvodněné údaje.

Já sám jsem provedl výzkum jezera Prášilského koncem srpna a v první polovici září 1906 za počasí aspoň z počátku velmi příznivého. Knížecí schwarzenberská lesní správa dala mi zde pořídíti vor, na němž veškerá měření provedena. Při měření profilů pracoval jsem s jistými obtížemi, neboť mi byl v nejdůležitější chvíli nepovolanou rukou odstraněn drát přes jezero napjatý. Domácí obyvatelé báli se vody, a jediný pomocník, jehož se mi za jistého nátlaku lesní správy podařilo získati, opustil mne pro churavost hned v prvním týdnu. Asi 2 dny vypomohl mi p. učitel Söllner z Dušovic, ale potom zůstal jsem na jezeru úplně osamocen. Činnost na jezeru skončil jsem toho roku 19. září. Celkem provedl jsem v té době úplné změření hloubek a sice 258 v 10 profilech. K tomu pojilo se přes

---

[1]) M. Willkomm, Der Böhmerwald und seine Umgebung. Prag 1878, pag. 189.

[2]) Řivnáčův průvodce po království Českém. Praha 1882.

[3]) F. Bayberger, Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Ergänzungsheft Nr. 81 zu Petermanns Geogr. Mitteilungen. Gotha 1886, p. 35 a 36.

[4]) P. Wagner, Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 48 a n.

90 pozorování teploty vody jezera a jeho přítoků, pozorování průhlednosti a poprvé pozorování barvy vody. Na mapu katastrální jsem nespoléhal, rovněž ne na mapy lesní, jež jsou v měřítku pro limnologický výzkum příliš malém, pročež pořídil jsem na základě vlastních měření mapu jezera v měřítku 1 : 1000, jež odpovídá tehdejšímu stavu vody 1·5 *m* pod niveau hráze.

O prázdninách r. 1907 zavítal jsem třikráte na j. P., vždy ovšem jenom na krátko, a sice 28. června, potom 15. srpna, kdy jsem měřil teplotu sloupce vodního a barvu, kdežto měření průhlednosti bylo překaženo bouřkou, jež zrovna s orkánovou prudkostí vypukla, a konečně 18. září, kdy jsem mohl měřiti teplotu a průhlednost vody.

V létě 1908 sdělil mi p. M. Bronec, kníž. schwarzenberský lesní v Neubrunnu, že hladina jezerní nalézá se na nejnižším téměř stavu. Zavítal jsem sem 26. srpna s posluchači p. Baslem a Hamáčkem, a nalezl jezero skutečně jen 20 *cm* nad nejnižším stavem. Poněvadž tu nebylo plavidla, nemohli jsme měřiti na vodě, navštívili jsme však ještě „Alte Schwelle". Prohlídce terrainu jezero obklopujícího a zvláště hráze jezero obkličující věnována byla ještě návštěva ve dnech 7. až 9. září 1910.

Při různých těch pobytech na j. P. setkal jsem se s velkou ochotou kníž. revírníka ve Prášilech p. Marxa a jeho náčelníka tupce p. Prantla a nalezl jsem zvlášť účinnou podporu jmenovaného již lesního p. Bronce, jehož myslivna nalézala se nejblíže jezeru P. Týž sledoval s velkým zájmem moji práci a zacvičil se sám v technice měření teploty vodní mým reversním teploměrem Negretti-Zambra za účelem pozorování zimních, jež také provedl počátkem března 1913. Pan Bronec rád by byl pokračoval v těchto pozorováních, ale náhlá obleva, jež ve dnech nejbližších nastala, překazila jeho úmysly.

Přístup k jezeru Prášilskému z osady Prášil poprvé stručně líčil Hochstetter:[1]) „Z Prášil lze pohodlně za 1½ hodiny dosíci jezera Prášilského, položeného jihovýchodně od Prášil na severním úpatí vysoké Polední hory (Mittagsberg 4087′) a na zadním úpatí Seerucku (3992′). Sledovavše dlouho Jezerní potok a vystoupivše po rulových a žulových balvanech, stojíme najednou překvapeni před valem 20—30 stop (jinde udává Hochstetter 30—40 stop) vysokým, jenž částečně se skládá z kolosálních balvanů. Teprve když vystoupíme na tuto přírodní hráz, máme pohled na chmurnou, černou, jako zrcadlo hladkou plochu jezera, se všech stran vysokými horami a temnem smrkového lesa obklopeného. Na západní straně trčí příkré stěny, jichž severní část skládá se z hrubozrné žuly ve velikých kubických balvanech, jižní část naproti tomu sestává z ruly nebo vlastně z více méně slídnaté křemencovité břidlice, jejíž velké rovné, břidlové nebo vrstevnaté plochy zapadají v hodině 7·10 se sklonem 45°

[1]) F. Hochstetter, Geognostische Studien aus d. Böhmerwalde. Jahrbuch d. Geol. Reichsanstalt, VI. 1855, p. 26 a 27.

k severovýchodu, tak že zde rula na své nejjižnější hranici nalézá se nad krystallinickými břidlicemi.“ V jiné své práci poznamenává Hochstetter,[1]) že severní a východní břehy jezera Prášilského objímá věncovitě mohutný val ze žulových a rulových balvanů, jenž se v západu přimýká na příkrou stěnu Polední hory.

Dnes jest přístup k jezeru jistě daleko snadnější, než za časů Hochstetterových. Z osady Prášil jdeme po cestě bílou a modrou barvou značené nejprve mezi mokrými loukami, později po kostrbaté cestě nevalně pěstěným selským lesem a konečně lesem knížecím. Cesta k jezeru jest vlastně nejhorší u Prášil samých. Nedaleko před jezerem cesta se trochu snižuje a zde máme pohled na hráz jezero obklopující. Teprve, když vystoupíme úplně na hráz, spatříme před sebou jezero. Cesta z Prášil až sem trvá necelou hodinu. Ještě blíže jest sem z Neubrunnu a nejbližším obydlím jest hájovna něco přes $^1/_4$ hodiny cesty pod jezerem.

Mimo Hochstettera podal stručné líčení krajinného rázu Bayberger,[2]) jenom že zde nesprávně udává orientaci jezera podle světových stran. Poprvé mluví o neobyčejně konickém tvaru bassinu a klade podle odhadu největší hloubku doprostřed jezera. Vlastní pozorování Bayberger-rova omezují se zde vlastně na val jezero obklopující. Bayberger byl zde r. 1883, v době, kdy jezero za účelem pořízení nového stavidla bylo vypuštěno o 2—3 *m*. „Hluboké vykopávky, jež při tom byly udělány, nedály se v pevné skále, nýbrž mezi volnými balvany (in losen Blöcken).“

Bayberger praví, že může jen nepatrně něco připojiti k poznámkám Krejčího a Wilkma. Val, jenž místy jeví se skutečně tak jako by byl nasut, jest tak výrazný ano nápadný každému, že docela i u zdejšího obyvatelstva vyskytalo se mínění, že byl uměle vybudován nějakým starým kmenem („daß er von alten Völkern gebaut worden sei“). K jakému účeli, nemohl průvodčí Baybergerův říci. Dílo ruky lidské jest tu ovšem vyloučeno. Bayberger sledoval tento val, pokud nebyl kryt křovím — jak praví — velmi důkladně a dospěl k úsudku, že zde dlužno jen a jedině počítati s prací geologickou. „Tak dokonalé vytváření se valu nebylo dosud na žádném jiném jezeru pozorováno.“ „Dlužno podotknouti, že balvany na sobě neb vedle sebe ležící nejsou identické s rulou nebo žulou, nýbrž vykazují jich variety; tak se střídá hrubo- a jemnozrná slídnatá rula se žulou, jež jest různého rázu, různé velikosti, zpravidla ostrohranná a rohatá. „Nirgends vermochte ich eine Abnutzung beobachten.“ „Zvětrání balvanů rovná se až podnes nule, nejbezpečnější důkaz, že nevznikly větráním. Plochy zlomové (Bruchlinien) jsou dosud úplně čerstvé a neporušeny.“ Nějakého stmelení nemohl B. najíti. „Během doby počala prsť vyplňovati mezery.

---

[1]) *t.*, Aus d. Böhmerwald. Beilage zu Nr. 220 d. Allg. Zeitung, 8. Aug. 1855, p. 3515.

[2]) F. Bayberger, Geographisch-geologische Studien. Gotha 1886, p. 35 a 36.

Tak vzniklo takové zaoblení valu, že to skutečně snadno svádí k úsudku, spatřovati v takové dokonalosti práci lidskou; jest to mimo vši pochybnost moréna. Analogicky ostatním jezerům šumavským jest odtok ve směru dolů provázen spoustou nesmírných trosek (von enormen Trümmerhaufen begleitet)." Bayberger nemá žádnou mapu j. P., uvádí však příčný profil od vrcholu Polední hory ve směru od jz. k sv. přes jezero (P. 2), při čemž stěna spadá v sklonu 75°, jezero má konický tvar s největší hloubkou 30 *m* a odtok Jezerním potokem děje se ve sklonu 11°.

Petrografickou charakteristiku břehů studoval Dr. Wagner r. 1896.[1]) Stejně jako Hochstetter konstatuje, že se zde nalézáme na důležité hranici petrografické. Hochstetter označuje jižní část stěny jako z ruly a slídnaté křemencovité břidlice, ale podle Wagnera byly výbrusy úplně bez živce, takže musíme zde mluviti o svoru. „Jest tu hojně biotitu a muskovitu, ale muskovit často tak roztříštěn a zvlákněn, že jej můžeme označiti spíše jako sericit; také cirkony a apatity vyskytují se v hornině; křemen pravidelně přimísený tvoří silné lože. Místy vytvořuje hydroxyd železitý rudé zabarvení. Čistou křemencovitou břidlici bylo lze konstatovati pouze v balvanech, nikoli však v pevné skále. Svorové vrstvy zapadají N. 100° E. a lysá místa jeví zapadání 50° ku jezeru. Veliký výstupek svoru vyčnívá se sklonem 40—45°, ano místy i 60°. Potom skály trochu ustupují, aby zase znovu podruhé vyrazily v křemité břidlici a potřetí v značně tvrdé žule (sklon 45°). Marně hledáme nějaký topografický ohlas této změny horniny, již lze ostře sledovati až po samu hladinu vodní. Svor i žula tvoří stejně utvářené útesy. Dva vnějškem podobné výběžky obklopují jezero v jihu a v severu; ovšem jest zde žulová strana více balvanitá. Na východní straně setkáme se konečně s onou klasickou balvanitou hrází, jež dosud byla na první pohled každému nápadnou. "I prof. Laube, jenž po několik prázdnin prozkoumával Šumavu a s velkou skepsí se Wagnerovi vyslovoval o ledových stopách na Šumavě, zde přece připouští „einen Firnmoränencharakter." „Asi na 3 *m* zvedá se tato hráz od hladiny. Mohutné balvany žuly, svoru a křemencovité břidlice, spojené volnou vrstvou humusovou, skládají tento val, jenž spadá vně jezera asi na 10 *m* a jest v okolním terrainu tak znatelným jako žádný jiný na Šumavě. Při odtoku jest dnes uměle vyzděn, tak že lze jezero dosti vysoko nastaviti. Zde jezerní potok řítí se přes mohutné spousty balvanů."

Wagner připomíná, že „nádherný vysoký les" korunuje tuto hráz. S tím sotva lze souhlasiti. Ještě dnes tento les celkem velmi málo imponuje. Jezerní břehy jsou pokryty smrkovým lesem nevelkého stáří — větší stromy jsou asi od velkého polomu, 35—40 let staré, ostatní mladší. Celá hráz jest pokryta takovým lesem, jenom několik výminečně starých smrků, asi přes 70 let starých nalézá se u odtoku.

---

[1]) P. Wagner, Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 49.

Na břehu jest jednotvárný porost smrkový přerušen jednotlivými stromy listnatými, tak zvláště na sever od stěny. Nalezneme tu jeřáby, osyky, stromovité i křovité jívy. Zvlášť typickým stromem pro severní břeh jest jedna stará bříza a veliká rozložitá osyka. V jisté výši nad jezerem nalezneme ojedinělé buky.

Měřil jsem hloubky jezera za prostředního stavu, viděl jsem však jezero i za nejvyššího stavu v září 1910, kdy chyběl jen nějaký decimetr, aby jezero přetékalo, i za zcela nízkého v srpnu 1908, kdy nalézalo se jen 20 *cm* nad nejnižším stavem.

Za tohoto nízkého stavu r. 1908 vynořil se podél celého břehu jezera, vyjma část západní, kde skály do jezera příkře spadají, pruh suché půdy asi 6—10 *m* široký. Úbytek hladiny jezerní jevil se zvláště vzadu, totiž v jižní části jezera, potom severozápadně od odtoku a nejvíce asi u košatých stromů proti odtoku při našem bodu č. 2. Velmi smutný dojem zvyšují právě v těchto místech spousty velikých starých kmenů zde ve vodě ležících, zbytků to bývalého pralesa, jenž ještě před polomem v l. 60tých jezero obklopoval. S jistou opatrností a stoupajíce po kmenech z vody vyčnívajících neb docela na suchu ležících dosáhli jsme od odtoku samé stěny. Zcela jiný jest vzhled za vysoké vody. Tu jezero sáhá ve všech směrech buď po příkrou skálu, j. v západu, nebo až po samé kmeny stromů. Odumřelé kmeny zmizí úplně pod vodou a jen tu a tam vyčnívá nějaká jich část. Bažinatý břeh jest v tu dobu nejspíše ještě znatelný v jižní části jezera. Přítok, jejž na naší mapě zakreslujeme u č. 4, zanáší jezero s této strany a lze zde konstatovati jistý vzrůst půdy, ač nevelký a pomalý. Mezi ústím tohoto přítoku a cestou na Polední horu jest terrain dosti plochý, a již zde jest počátek oné hráze, jež na dlouho lemuje jezero. Tam, kde cesta na Polední horu odbočuje od jezera, jest hráz tato již znatelně vyvinuta. Nejvyšší její část zdvihá se zde sotva 2 *m* nad nejvyšší stav jezera. Čím dále k odtoku, tím určitější stává se hráz. Jest dnes zcela porostlá lesem. Pěšina vede po ní u vzdálenosti několika metrů od jezera. Odtok proráží hráz mezi množstvím balvanů. V této končině nalézá se niveau hráze místy aspoň 10 ano snad až 15 *m* nad potokem. Ojediněle vyskytují se vedle potoka ohromné balvany. Tam, kde odtékající potok zahýbá okolo hráze, překročil jsem jej ve směru východním na druhou stranu a shledal jsem, že pravý jeho břeh lemován jest rovněž mírnou vypnulinou, za níž nalézá se zase skleslina.

Malá, sotva znatelná pěšinka tudy vede. Od zmíněného zahybu potoka pokračuje skleslina mezi oběma vypnulinami dále ke svahům Polední hory. Hráz velmi určitě a krásně vyvinutá obmýká jezero i v severu až k bodu č. 2 n é mapy. Zde odlučuje se od svahu Polední hory ponenáhle, stejně jako tomu bylo na druhé straně.

Na žádném ze šumavských jezer nespadá vlastní stěna tak bezprostředně a tak příkře do vody jako na jezeru Prášilském. Platí to ovšem jenom o nejdolejší části stěny, jež tu jako skála z celého svahu vystupuje a od ostatního okolí se odlišuje menším množstvím vegetace. Spadá do

jezera v jeho západní části. Ovšem ani na této stěně není sklon tak příkrý, jak jej udává Bayberger,[1]) jenž kreslí profil stěnou a jezerem a přičítá stěně výšku 250 *m* (Wagner správněji 235 *m*) a sklon 75°. Sotva s polovičkou toho sklonu lze počítati, čemuž asi odpovídá schematický profil, jejž podal Dr. Wagner.[2]) Obraz stěny, jejž připojujeme, byl pořízen od bodu č. V. naší mapy.

Do jezera ústí jeden přítok v jižní části a jeden nedaleko odtud na jihovýchodním břehu. Avšak vedle těchto přítoků zjistil jsem ještě dva přítoky, jež v nepatrné hloubce jako podzemní ústí do jezera mezi č. 6 a 7 a severně č. 4 mé mapy. Jsou to asi táž neobyčejně chladná místa ve vodě, jež lesníci — jak Wagner sdělil — svého času při koupání v jezeru konstatovali.

Jezero vylévá se v severovýchodu (čís. I. na mapě) odtokem, jejž lze regulovati, pode jménem Jezerního potoka (Seebach) směrem ku Prášilům do Křemelné a touto do Vydry. Na přiloženém obrázku — asi první fotografie z této končiny — jeví se typicky hraz, fotografovaná zd la nahoru. Oblast, z níž jezero sbírá vodu, odhadoval Wagner pouze na 50 *ha*, tedy nejméně ze všech šumavských. Za to počítá zde Bayberger s bývalou firnovou plochou příslušnou k Polední hoře, o rozloze 5·5 *km*², tudíž nejvíce při jezerech šumavských. Že čísla tato, jichž dosáhl Bayberger na základě dnešních poměrů horopisných, dlužno přijímati s největší skepsí, nemusím snad zvláště odůvodňovati.

Téměř na jih od jezera Prášilského, s malou jen úchylkou k východu nalézá se končina, již lesní mapy označují jako „Alte Schwelle". Dostaneme se sem, jdeme-li od hájovny mezi Neubrunnem a jezerem Prášilským ku pramenům Jezerního potoka, jež končinu tu odvodňují. Cestu tu nazývá Wagner „Seebachsteig". Já jsem navštívil místo to 26. srpna 1908. „Alte Schwelle" jest dnes úplně plochá a lesem porostlá. V západu a jihu a částečně i na východě zvedají se poměrně příkré stěny, tak že zde stojíme v cirku vlastně typičtějším, než jak se jeví na jezeru Prášilském. Wagner, jenž navštívil „Alte Schwelle" r. 1896, uvádí, že jest vyplněna slatí značné mocnosti. Úřední dobrozdání lesní správy praví, „že by se následkem nedostatečného spádu odvodňování zde sotva vyplatilo". „Z toho vidíme zřejmě, jak ploché jest údolí před námi, a nepochybujeme, že jest to bývalé jezero cirkové."

Katastr (Wagner p. 50) udává pro „Alte Schwelle" rozměry 2 jitra 1481 čtv. sáhů = 1 *ha* 6835 *m*². Mně se zdají rozměry ty příliš malými a mám za to, že rovná plocha zdejší převyšuje rozměry jezera Prášilského. Stejně jako Wagner mám za to, že zde máme co činiti s bývalým jezerem. Bohužel nemáme tu rozhledu a chceme-li si skutečně shlédnouti zdejší

---

[1]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886. T. II.

[2]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, T. II.

terrain v souvislosti, tu učiníme nejlépe, když od Neubrunnské myslivny sledujeme západní svah Seerucku. Z paseky mezi kotami 1235 a 1265 *m* máme tu z dálky pohled na jez. Prášilské a „Alte Schwelle". Já jsem za přispění p. lesního Bronce vyhledal místo to několikráte, bohužel však byl jsem tu vždy za počasí mlhavého, tak že nebylo určitých obrysu. Podle sekce původního mapování — mapa Wagnerova jest tu prostou kopií — nalézá se „Alte Schwelle" uvnitř isohypsy 1120 *m*.

Jméno jezera. V josefinském katastru a na původní mapě stabilního katastru vyskytuje se prostě označení „See". Na mapě Kreybichově nalézá se jezero vůbec ještě bez jakéhokoliv označení. Jméno „Stubenbacher See" první asi do literatury uvedl F. X. M. Zippe.[1]) Nejbližší osadou Stubenbach (Prášily) ovšem není, nýbrž Neubrunn. Krejčí ve svém známém díle mluví také o „See des Mittagsberges". V češtině ujalo se jméno jezera Prášilského, ačkoliv stejně často užívá se i označení „jezero Stubenbašské".

Mapa jezera. Poprvé objevuje se jezero v určitých obrysech na mapě katastrální, potom v menším měřítku dosti správně, ale jak již řečeno bezejmeně na starší mapě speciální. Při novém mapování a na nové mapě speciální vyskytuje se poprvé udání výšky nadmořské. Sekce původního mapování celkem správně podává terrain. Mapy lesní mohly by býti nejlepšími mapami pro tuto končinu, kdyby při nich bylo dbáno — jako se to děje hned v bavorském sousedství — poměrů výškových. Já jsem pro novou konstrukci mapy jez. P. použil na pevném stativu Schmalkaldské busoly s velmi přesným dělením a jehlou délky 10 *cm*. Na všech ostatních jezerech šumavských pracoval jsem buď s tachymetrem neb theodolitem. Původní mapu pořídil jsem, jako na jiných jezerech, v měřítku 1 : 1000, a redukoval jsem ji v příloze na měř. 1 : 2000.

Poloha jezera jest podle mapy speciální 49° 4·5′ s. š., 31° 4′ v. d. F. nebo 13° 24′ 14″ v. d. G.

Nadmořská výška jezera. Poprvé výšku j. P. měřil F. Hochstetter, jenž jako průměr ze dvou pozorování udal 3352·6 stop = 1060 *m*. Toto pozorování platí, ovšem s příslušnou redukcí, jež odpovídá změně pražského normalu, až podnes. Přejal je Krejčí i průvodce Řivnáčův nezměněně kdežto Partsch[2]) provedl opravu a zaokrouhlil je na 1080 *m*. Willkomm jednou přijímá neredukované číslo Hochstetterovo, na jiném místě udává však 3500′ = 1106 *m* jako vlastní pozorování. Jak vidno z rozdílu 50 stop při měření výšky Polední hory, jež provedl Hochstetter a vojenským měřením trigonometrickým (Hochstetter 4164·4 stop, △ 4213·74′), nelze dosud číslo pro nadmořskou výšku jez. P. udávané pokládati za bezpečné.

Plocha jezera. Josefinský katastr z r. 1785 udává 3 jitra 726½ čtv. sáhu čili 1·9877 *ha*. Číslo to jest jistě i pro onu dobu nízké a sice i v tom pří-

[1]) J. G. Sommer, Das Königreich Böhmen. VIII. Prachiner Kreis. Prag 1840, p. XXX.

[2]) J. Partsch, Die Gletscher der Vorzeit in den Mittelgebirgen Deutschlands. Breslau 1882, p. 106.

padě, že připouštíme pro tehdejší dobu hladinu značně nižší než dnes a počítáme se značným zvýšením hladiny jezerní následkem regulovaného odtoku. Katastr z r. 1837 udává již 6 jiter 1150 čtv. sáhů č. 3·8615 *ha*, tedy číslo, jež se blíží dnešním poměrům. Sommer zaokrouhluje patrně číslo to na 7 jiter = 4·0282 *ha*, kdežto Möchel uvádí nesmyslné číslo 15·6 *ha*, pro něž jistě není důvodů. Wagner vypočítal pro hladinu jezera 3·5757 *ha*, číslo patrně trochu nízké. Za stavu hladiny, při níž jsem měřil, určil jsem povrch jezera na mapě terčovým planimetrem Coradiovým na 3·7200 *ha*. Při nejvyšším možném stavu, jenž jest asi o 1 *m* vyšší, než onen, při němž jsem já hloubky měřil, zvětší se plocha jezera značně, asi o 1900 m^2 a obnáší potom 3·9100 *ha*.

Rozměry jezera podle délky a šířky udával posud jedině Dr. Wagner a sice největší délku na 290 a největší šířku na 175 *m*, s čímž souhlasí i jeho mapka. Čísla ta neliší se podstatně od mých, neboť podle mé mapy měří nejdelší osa jezera 283 *m* a největší šířka jezera asi směrem od odtoku k západu ok. 185 *m*.

Nejvzdálenější bod jezera od břehu nalézá se v severním výběžku isobathy 14 *m*, spíše směrem trochu k východu, a obnáší tu největší vzdálenost od břehu 90 *m*.

Přírůstek dna proti hladině (základní hodnoty uvedeny na svém místě) jest u jezera P. tento:

Mezi isobathou 0 (hladinou, při níž jsem měřil) a nejvyšší možnou hladinou asi o 1 *m* vyšší = 142 m^2, mezi isobathou 0 a 1 *m* = 78 m^2, mezi 1 a 2 *m* = 65·7 m^2; 2 a 3 *m* = 63·4 m^2; 3 a 4 *m* = 78·5 m^2; 4 a 5 *m* = = 75·1 m^2; 5 a 6 *m* = 60·3 m^2; 6 a 7 *m* = 57 m^2; 7 a 8 *m* = 97·2 m^2; 8 a 9 *m* = 52·5 m^2; 9 a 10 *m* = 46·9 m^2; 10 a 11 *m* = 28·8 m^2; 11 a 12 *m* = = 27·9 m^2; 12 a 13 *m* = 19·8 m^2; 13 a 14 *m* = 10·8 m^2; 14 a 14·5 *m* = 3 m^2.

Vnitřek isobathy 14·5 *m* dlužno pokládati za úplně plochý a platí to vlastně již o celé ploše uzavřené isobathou 14 *m*. Obnáší tudíž přírůstek dna proti hladině, při níž jsem měřil, 765 m^2, a proti nejvyšší možné hladině 907 m^2.

Vývoj břehů má ze všech šumavských jezer Prášilské nejmenší; není tu žádné zátoky, není tu žádného poloostrova. Obvod jezera — délka břehů — obnáší za hladiny námi měřené 730 *m* a zvýší se za nejvyššího stavu jenom asi o 20 *m*. Ovšem není tu ani vzrůst plochy nějak zvláště značný, nejvýše asi ok. 1900 m^2 (podle měření 1920 m^2). Za nejvyšší vody rozšíří se hladina nejvíce v severozápadní části jezera, asi mezi našimi body 1 a 3, jak z mapy vidno, dále v jižní části jezera a u odtoku. Západní břeh spadá téměř všude do jezera v tak velkém sklonu, že zde stav vodní ve směru horizontálním nejeví nějak zvláště znatelných rozdílů. Poměr mezi obvodem jezera při hladině námi měřené k obvodu kruhu, jehož plocha jest stejně velká jako plocha jezera, lze vyjádřiti poměrem 1·07 : 1. Počítáme-li nejvyšším možným stavem vodním, tu poměr ten se mění jen neznatelně; nebo vlastně téměř se nemění.

Relief dna. První zmínku o nějaké hloubce jezera Prášilského nalezneme u Sommera,[1]) jenž ji udává na 9 sáhů = 17 *m*. Právě tento údaj ze všech starších jest nejpravděpodobnější, blíží se nejvíce skutečnosti a spočívá asi na nějakém měření. Po dlouhé době shledáváme se zase s odhadem u A. Frič e,[2]) jenž soudí na hloubku 15 stop uprostřed jezera a dokládá, že jezero jest trochu hlubší než Lakka. Také assistent jeho Hellich[3]) podceňuje hloubku jezera výrokem, že jezero Štubenbašské a Lakka mají hloubku nepatrnou. Připouštím, že v době návštěvy Fričovy a Hellichovy jezero Lakka činilo snad dojem hlubšího než dnes, ale k zmíněnému úsudku a odhadu vzhled jezera Prášilského jistě nikdy neoprávňoval. Podle Willkomma[4]) platí jezero v ústech lidu za bezedné. Möchel[5]) uvádí hloubku 23 *m*, neuvádí však pramenu pro toto číslo. Čísla Möchelem pro šumavská jezera citovaná nezasluhují vůbec víry. Bayberger ovi[6]) sdělil jeho průvodce, že lesní z Prášil měřil s jeho assistencí na 3 místech otvorem v ledu prosekaným hloubku jezera na 16 sáhů (= 30—36 *m*). Bayberger měl za to, že číslo toto zasluhuje víry a že podle celkového vzhledu nezdá se odporovati faktům známým z jiných jezer. Snad tu byly zaměněny metry za sáhy! Bayberger zastihl jezero na nízkém stavu a z konfigurace pobřežní soudil na neobyčejně konický tvar bassinu jezerního, ale odhad na takovou hloubku nebyl přece dosti kritický. Mně samotnému sdělil r. 1910 p. Eggerth, majitel papírny v Prášilech, jehož údaj lze pokládati za hodnověrný, že počátkem let šedesátých stol. XIX, jako mladík měřil hloubku uprostřed jezera mezi 50 a 60 stopami. Dr. Wagner[7]) uvádí, že prý před 50 léty, tedy asi v létech 40tých stol. XIX. lesník jménem Gulasch (!) měřil hloubku 24 sáhů.

To jsou vesměs odhady nebo nezajištěná měření neodborníků. První a až po můj výzkum jediná měření odborná provedl Dr. Wagner uprostřed srpna 1896.

Wagner měřil tu jeden podélný profil (*a b*), asi trochu na východ od našeho bodu 1 k ústí potoka do jižního cípu jezera, a sice 2·5, 8, 12·5, 15, 13·5, 11, 4 *m* a potom 4 profily příčné, z nichž jeden (*a f*) vede asi od našeho bodu I ku bodu 3, s hloubkami 2·5, 3, 3, 2·5, druhý (*e f*) od našeho bodu I ku bodu 3 s hloubkami 3, 7, 12, 11, 7, třetí (*e d*) odpovídá asi našim bodům I 6 a vykazuje hloubky 2, 6, 11·5, 14, 15, 14·5, 11·5, 4, čtvrt

---

[1]) J. G. Sommer, Das Königreich Böhmen. VIII. Prachiner Kreis. Prag 1840, p. 258.

[2]) A. Frič, Über die Fauna des Böhmerwaldsees. Sitzungsberichte der kgl. böhm. Ges. d. Wiss. Prag 1871, II, p. 9.

[3]) B. Hellich, Perloočky země České (Cladocera). Archiv pro přírod. prozkoumání Čech. 3. díl, č. 4. Praha 1878, p. 120.

[4]) M. Willkomm, Der Böhmerwald. Prag 1878, p. 189.

[5]) Möchel, Průvodce na trati Plzeň-Eisenstein-Deggendorf. 1878.

[6]) F. Bayberger, Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886, p. 36.

[7]) P. Wagner, Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 50.

c d) shoduje se asi s naším směrem IV. 6, s hloubkami 2, 7, 9·5, 6 *m*. Celkem měřil Wagner v 5 profilech 28 hloubek a konstruoval první bathymetrickou mapku jezera v měřítku 1 : 5000, podle níž má jezero skutečně pravidelnou konickou, ano kráterovou podobu.

Mám za to, že Wagner sice správně měřil, ale soudím zároveň, že měření svá nesprávně lokalisoval. Odhadování vzdálenosti podle počtu temp veslových předpokládá poměrně klidnou hladinu vodní, neobyčejně obratného a zkušeného veslaře a dobrého plavidla. Aspoň ty dvě poslední vlastnosti při měření Wagnerově scházely. Hajný Prokop Schmid zde jako veslař nikterak nemohl stačiti a také vor nebyl tu plavidlem bezvadným. Měl jsem sám za svého pobytu na jezerech šumavských místy výborné veslaře, pionéry, sportovní veslaře a dokonce i člena rak.-uh. válečného loďstva s nepoměrně jiným porozuměním práci, a přece bychom bez napjetí drátů nebyli bývali s to pracovati s příslušnou jistotou. Pokud se jedná o největší hloubku jezera Prášilského, tu Wagner domníval se, že se nalézá uprostřed jezera, zatím však byl značně blíže břehu západnímu.

Niveau vodní, při němž jsem já pracoval, bylo asi stejné (spíše nižší), jako ono, při němž měřil Wagner, jak mi dosvědčil průvodce Wagnerův, hajný Prokop Schmid a rovněž hajný Mayer, muž jistě spolehlivý, jenž za třídenního zdejšího pobytu Wagnerova také jeden den na jezeru dlel.

Za mého měření nalézala se hladina jezera 150 *cm* pod niveau hráze jezerní u odtoku.

Vlastní měření v srpnu a září 1906.

Profil 1 I.

Západní břeh | $1^1/_4$, 1·5, $1^3/_4$, 2, 2, $2^1/_4$, $2^1/_4$, 2·5, $2^3/_4$, 3, 3·2, 3, $3^1/_4$, 3·3, 3·3, 3·5, 2, 2·6, 2·6, 2·6, 2·1, 2·1, 1·5, 1·1, 1·1 | Východní břeh.

Profil 2 I.

Západní břeh | $1^3/_4$, 2, $2^3/_4$, $4^3/_4$, 5, ., 5, $6^3/_4$, 7, $7^3/_4$, 8, 8·1, $8^1/_4$, 8·5, $9^1/_3$, 9·4, $9^1/_4$, 8·4, 8, 8·1, 7, 7, 6·3, 6, 5·4, 5, $2^3/_4$, $2^3/_4$, $1^3/_4$, 1, 2·3 |

Profil 3 I.

Západní břeh | 1, 1·5, 3, ., 6, ., 7·3, ., 10, ., 10·2, ., 12, ., 13, ., 13 ., 13, ., 12·3, ., 12, ., 11, ., 9·5, ., 7, ., 6, ., 4, ., 2, ., $1^1/_4$ |

Profil 4 II.

Západní břeh | ., 2·6, 4·6, 6·6, 7·9, 9·9, 11·5, 12·6, 12·9, 13·3, 13·9, 14·6, 14·6, 14·9, 14·9, 14·8, 14·8, 14·6, 14·6, 14·4, 14·4, 14·2, 13·9, 13·1, 12·6, 12·5, 11·4, 9·9, 8·1, ., ., ., ., . |

Profil 5 I.

Západní břeh | 2·5, 3, 3¾, 5, 7¾, 10, 11¾, 13, 13, 13, 13¼, 14·2, 14·5, 14·8, 14·9, 14·9, 14·9, 14·8, 14·8, 14·6, ., 14¼, ., 13¾, ., 12¾, ., 11·2, ., 9·4, ., 7, ., 6, ., 3·4, ., 2 |

Profil 5 III.

Západní břeh | 3·5, 3·5, 5, 7·5, 9¾, 12, 12·6, 12·8, 12·8, 12·8, 13, 13·1, 13·8, 14·5, 14·5, 14·5, 14¾, 14¾, 14·7, 14·5, 14¼, 13¾, 13¼, 12·5, 12, 11, 9¼, 7¾, 7, 6, 5, 4, 2 |

Profil 6 III.

Západní břeh | 2·8, 3¼, 6, 8, 9·3, 11, 12, 13¼, 13¼, 14¼, 14¼, 14¼, 14·5, 14·4, 14¼, 14·1, 13¾, 13¼, 12·5, 11·5, 11·5, 10, 8·5, 8, 7·2, 6·2, 5·3, 4·1, 3, 2 |

Profil 6 IV.

Západní břeh | 2¾, 4, 5·3, 7·3, 8·5, 9, 11·1, 11·8, 12·2, 12·4, 12·8, 12·6, 12·5, 12¼, 11·5, 10, 8·1, 6·8, 5¾, 4·9, 3·8, 2¾, 2·1, 2, 1¼ |

Profil 6 V.

Západní břeh | 2, 2·7, 4, 4, 5, 6¾, 7¾, 8¼, 8¼, 8·3, 8·8, 9, 9·6, 9¼, 9, 8, 6·1, 4·3, 2¼, 1¾, 1¼, 0·5 |

Profil 7 V.

Západní břeh | 1, 1, 2, 2·5, 2·5, 2¾, 2·8, 3, 3¼, 5, 3¼, 2·5, 2·1, 1·8, 1·6, 1, . |

Hloubka mezi isobathou *m*	*Plocha* m^2	%	*Vývoj isobath*	*m*	*Obsah vrstvy* v m^3
0 a 1	3232	8·6	břeh	730	35.569
1 — 2	3392	9·1	1	690	32.152
2 — 3	3080	8·3	2	645	29.018
3 — 4	2256	6·1	3	605	26.362
4 — 5	2000	5·37	4	585	24.210
5 — 6	2248	6·09	5	560	22.008
6 — 7	2128	5·7	6	536	20.019
7 — 8	2104	5·7	7	505	17.806
8 — 9	1864	5·0	8	480	15.821
9 —10	1816	4·85	9	460	13.215
10 —11	1640	4·4	10	425	12.251
11 —12	2104	5·7	11	400	10.375
12 —13	1984	5·33	12	365	8.322
13 —14	3632	9·76	13	320	5.448
14 —14·9	3720	10·0	14	240	1471
(14·5—14·9)	(100)		14·5	(40)	—
					274.047 m^3

Při nejvyšším stavu vody zvýší se obsah vodní o 38.150 m^3 a obnáší potom 312.197 m^3. Čísla ta lze zaokrouhliti na 274.000 a na 312.200 m^3.

Wagner udává obsah vodní v m^3:

ve vrstvě	1— 5 *m*	při ploše	18.596 m^2 . . .	46.490 m^3
„	5—10 „	„ „	9.156 „ . . .	68.670 „
„	10—15 „	„ „	7.352 „ . . .	91.900 „
„	15 „	„ „	623 „ . . .	9.795 „
			3 *ha* 57 *a* 57 m^2. . .	216.855 m^3

Wagner pokládá nejhlubší vrstvu za válec ode dna ku povrchu a ostatní za prstenové obaly tohoto válce, kdežto já počítám tento obsah podle jednotlivých horizontálních vrstev, jak ode dna ku povrchu za sebou následují. Lze tudíž mezi hodnotami jeho a mými srovnávati pouze plochu jednotlivých vrstev, nikoli však jich vodní objem. Ovšem lze z čísel mnou udaných vyvoditi i hodnoty konformní Wagnerovým.

Podle mého měření dlužno pokládati za jisté, že relief dna není tak neobyčejně souměrný, jak Wagner udává. Vysvětlil jsem již, jak asi dospěl ku svému náhledu o pravidelně konickém tvaru bassinu jezerního s největší hloubkou uprostřed. Tak tomu není; sklon se strany západní, tedy od stěny, jest mnohem příkřejší, než s ostatních stran. Zvláště příkrý jest sklon až po isobathu 12 *m*. Isobatha 13 a 14 *m* jeví charakteristické vypnutí ve směru na západ a také nejhlubší místo 14·9 *m* jest posunuto značně na západ od středu jezera. Při břehu západním přichází velmi mnoho nánosu do jezera, neboť zde mohl jsem na více místech bez velkého namáhání zaraziti tyč na 1½ *m* do bahna. Na straně jižní přičiňují se přítoky o zmenšení jezera; zde také vegetace postupuje zvolna do jezera. Na tabulce II., této práci přiložené, vidíme, jak ohromné množství vegetace přichází polomem do jezera.

Hladina jezera jest celkem klidná, mimo Laka snad nejklidnější ze všech jezer šumavských.

V Prášilech mně ovšem říkali, že jest nebezpečný vír v jezeře.

Teplota vody. První a až po náš výzkum jediné pozorování teploty vody jezera Prášilského sdělil P. Wagner,[1]) jenž zde pozoroval 16. srpna 1896.

Wagnerovi zdálo se zde nápadným rychlé ubývání teploty vody do hloubky. Ježto lesníci při koupání našli dvě neobyčejně studená místa v jezeře, zdá se mu jistým, že zde chladná voda není snad jen následkem zimy (Winter) nebo tání sněhu, nýbrž že zde skryté pod hladinou přítoky neustále přivádějí novou chladnou vodu.

[1]) P. Wagner, Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 51.

Pozorování Wagnerovo:

Vzduch . . .	9⁰	Pramen Jezerního potoka měl 4·5⁰;	
Povrch vody	15⁰	první jeho ústí 9·5, druhé 9·25,	
1 *m*	14·9	třetí malý potok 10⁰, Schwellbach	
2 „	14·25⁰	(míněn tím snad odtok?) 9⁰.	
3 „	12⁰		
4 „	8⁰		
5 „	6⁰		
6 „	5·3⁰		
7 „	4·9⁰		
8 „	4·5⁰		
9 „	4·5⁰		
14 „	4·2⁰		

Vlastní pozorování r. 1906 a 1907.

	30. srpna 1906[1]) 12—1 hod. odp.	30. srpna 1906[1]) 4 hod. 30 min. až 5 h. 30 m. odp.	1. září 1906[1]) 3 hod. 30 min. až 4 hod. 30 min.	13. září 1906[2]) 5 hod. 30 min. až 6 hod.	19. září 1906[3]) 12 hod. 45 min. až 1 hod. 45 min.	15. srpna 1907[4]) 4 hod. až 5 hod odpol.	18. září 1907[5]) 2 hod. až 3 hod. odpol.
vzduch . . .	18⁰ C	15.75	22·5	6·25	9	25·5	9·5
povrch vody	15	16·5	18·5	13	10·75	20·1	12·5
1 *m* . . .	14	14·5	15·5	12·5	10·25	19·5	12·5
2 „ . . .	13·5	13·5	14·25	12·5	10	17·5	12·5
3 „ . . .	12·75	12·5	12·75	12	9·9	13·5	12·4
4 „ . . .	9	9·25	9	9	9·5	10·5	10·6
5 „ . . .	7	7	7	6·7	6·75	8	8·5
6 „ . . .	6	6	6	—	6	6·5	6·75
7 „ . . .	5	5·2	5·25	—	—	5·8	5·8
8 „ . . .	5	5	5	—	—	5	—
9 „ . . .	4·75	5	4·8	—	—	—	—
10 „ . . .	4·75	—	4·75	—	4·6	—	—
11 „ . . .	4·75	—	4·5	—	—	—	—
12 „ . . .	—	—	4·4	—	—	dno: 4·5	—
13 „ . . .	4·5	—	—	—	—	—	—
14 „ . . .	4·5	—	—	—	14·6	—	—
14·5 „ . . .	—	—	14·4	—	—	—	—

[1]) Slunečno; také několik dnů před tím slunečných.

[2]) Dopoledne prší, odpoledne celkem jasno, jenom chvílemi zachmuřeno; před tím po několik dnů silné deště.

[3]) V tu dobu slunečno, před tím, dopoledne prší, později zase podmračno.

[4]) Slunečno a větrno, později prudká bouřka.

[5]) Podmračno, v noci před tím déšť.

Zajímavá pozorování tepelných poměrů jezera v zimě provedl podle mého návodu a s mými nástroji pan M. Bronec, lesní v Neubrunnu v březnu 1913. Měřil zde 9. března 1913 po 5. h. odpoledne. Nalezl na jezeře led tloušťky 0·65 *m* skládající se z 5 až 6 vrstev. V den měření bylo při severozápadním větru chladno a chvílemi sníh. Ve dnech předcházejících bylo špatné počasí, větrno, chladno, při tom vlhký sníh. Vrstva sněhu poblíž stěny a uprostřed jezera, asi 30 *m* od odtoku obnášela asi 15 *cm*, u břehu poblíž odtoku bylo navátého sněhu ok. 40 *cm*. Stav vody byl nízký. Pozorování byla konána skoro uprostřed jezera a potom v mělké části jezera, asi 30 *m* od odtoku směrem ku stěně.

9. března 1913, 5 h—6 h odp.

	Uprostřed jezera:	*V mělké části jezera*
Vzduch . . .	ve 3 *h* 30 *m* odp. + 0·2°	—
	v 6 *h* — 2·5°	
povrch vody	0·5	0·5°
1 *m*	1·2°	1°
2 „	—	1·5°
3 „	2·5°	2°
4 „	—	3°
5 „	3°	dno 2·8°
6 „	—	
7 „	—	
8 „	—	
9 „	3·5°	
10 „	—	
11 „	3·7°	
12 „	—	
13 „ (dno)	4°	

Teplota vody odtoku obnášela 5·6°.

Tato pozorování teploty vody jezerní v zimě jsou první, jež ze šumavských jezer sděluji. Až do r. 1913 nemáme vůbec žádného zimního pozorování na jezerech šumavských. Teprve 7. ledna 1913 konal první taková pozorování s mými nástroji můj posluchač p. Kříž na jezeru Plöckensteinském. V únoru t. r. vypravili jsme se s mým assistentem drem V. Dvorským za tím účelem na jezero Čertovo, kdež však nepodařilo se nám prosekat led. Přece však měřil Dr. Dvorský teplotu vody v únoru 1913 na jezeru Černém, kdež byly poměry příznivější. V lednu 1914 měřil opětně p. Kříž teplotu vody na jezeru Plöckensteinském. To jsou veškerá dosud pozorování teploty vody jezer šumavských v zimě, jež až podnes byla provedena.

Barva vody. První zmínku o nějaké barvě vody jezera Prášilského učinil F. Hochstetter,[1]) jenž ji nazývá temnou, a v jiném svém pojednání [2]) mluví docela o černé hladině jezera Prášilského, rovné jako sklo. To opětuje Krejčí [3]) i Bayberger.[4]) Také P. Wagner neměl ještě při svém zdejším pobytu skálu barev k disposici, soudí však od oka, že barva jezera odpovídá asi č. 13—14 skály Uleovy, při čemž poznamenává — ostatně správně — že se zdá povrch vodní temnějším, než ve skutečnosti jest. Já sám provedl jsem první skutečné měření barvy vody jezera Prášilského podle skály Prof. Ule 30. srpna 1906 a konstatoval jsem, že odpovídá asi č. 16 skály Uleovy a že jest tudíž značně temnější, než Wagner od oka odhadoval. Toto pozorování potvrdil ostatně můj bývalý posluchač prof. Nový, jenž o 3 hodiny později se mnou měřil, a ještě 13. září dospěl jsem za počasí zcela jiného k témuž číslu. S tím shodovalo se ostatně i moje pozorování 15. srpna 1907.

Průhlednost vody měřil poprve Dr. Wagner [5]) 16. srpna 1896 na 3·5 *m*. Já sám měřil jsem ji za slunečného dne 30. srpna 1906 v poledne několikrát uprostřed jezera i nedaleko břehu, vždy na 4—4·20 *m*, ve 3 *h* odp. okolo 5 *m*. Jevil se tu tudíž během dne rozdíl dosti znatelný. Za dosti slunného dne 13. září 1906 měřil jsem průhlednost zase 4 *m*. Při nové návštěvě 18. září 1907 ve 4 *h* odp. za počasí dosti slunečného měřena průhlednost zase 5 *m*. Mohu říci, že průhlednost tato mne dosti překvapila, neboť právě na jezeru Prášilském neočekával jsem podle vzhledu jezera průhlednost větší 4 *m*.

O *chemii vody jezera Prášilského* nebylo dosud sděleno ani slova, lze však souditi, že není tu proti jiným jezerům šumavským něco výminečného.

O živočišstvu jezerním první poznámky nalézáme v líčení Hochstetterově [6]) jenž praví: „Der See ist von den köstlichsten Forellen, aber schon hier spuken die Seejungfergeschichten, die noch allgemeiner verbreitet sind an den beiden nördlichsten Gebirgseen."

Pokud se jedná o pstruhy v jezeru Prášilském, byl by výrok Hochstetterův vzácným svědectvím, ovšem není-li tu mýlka a nevztahuje-li se poznámka Hochstetterova spíše na jezero Lakka (to jest mé mínění) a nevznikla-li nějakou nepřesností deníku.

---

[1]) F. Hochstetter, Aus dem Böhmerwalde. Beilage zu Nr. 220 der Allgem. Zeitung, 8. August 1855, p. 3515.

[2]) F. Hochstetter, Geognostische Studien aus dem Böhmerwalde. Jahrbuch der k. k. Geol. Reichsanstalt VI. 1855, p. 26.

[3]) J. Wenzig u. J. Krejčí, Der Böhmerwald Prag 1860, p. 42.

[4]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886, p. 36.

[5]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 51.

[6]) Hochstetter F., Aus dem Böhmerwald. Beilage zu Nr. 220 der Allg. Zeitung, 8. August 1855, p. 3515.

Za svého pobytu na jezeru Prášilském a i pozdějších na něm návštěv nepozoroval jsem zde jediného pstruha.

Podle sdělení pana revírníka Prantla nasadila tam lesní správa asi r. 1908 nebo 1909 něco pstruhů, patrně však s nevalným výsledkem. Novější pokus vedl snad k lepšímu výsledku, neboť při mé návštěvě v létě 1914 sdělil mi revírník p. Kroh, že sé pstruzi v jezeře ujali Pokus o zoologický výzkum učinil na jezeru Prášilském posud jedině prof. Dr. A. Frič s assistentem H. B. Hellichem v červnu 1871.[1]) Provázel je sběratel komitétu pro přírodovědecký výzkum Čech J. Štaska. Ježto vor shotovený z čerstvého dřeva se potápěl a nesnesl plavce, použil jej Frič tím způsobem, že zavlékl jej na místo, odkud vanul vítr, upevnil na voru síť do hloubky asi 3 stop a čekal na druhém břehu, až vítr tam vor zanese. Výsledek toho sdělil Frič ve slovech: Přesvědčili jsme se, že uprostřed jezera v hloubce 3 stop Holopedium gibberum se nevyskytuje. Velmi bohatá byla — jak Frič praví — kořist podél břehu. Zjištěny byly tu: Cyclops serrulatus, C. coronatus, C. minutus, Diaptomus castor, Daphnia longispina, D. quadrungula, Linceus truncatus, L. sphaercius, L. affinis, L. exiguus, L. quadrangularis, L. leucocephalus, L. exiguus, L. lamellatus, Polyphemus oculus.

V tabellárním přehledu crustaceí žijících v jezerech šumavských udává ovšem Frič pro Diaptomus castor značku negativní, patrně omylem. Chtěje zjistiti, zdali se v jezeru nalézají pstruzi, učinil Frič pokus s dynamitovými patronami, jež zatížil kameny a nechal v hloubce vybuchnouti. „Detonace nebyla pro hloubku silná, vystoupily plyny v obvodu asi 10 sáhu a po několika vteřinách zvířila se voda jako malý geysir, ale na hladině neobjevila se žádná ryba". Frič praví:„Jsou tu dvě možnosti: buď v obvodu tom bylo jenom málo ryb, jež prchly při šumění zapalovače, nebo usmrcené ryby zůstaly ležeti na dně, jak prý bylo v novější době často pozorováno". Mám za to, že jest zde, nebo byla docela dobře i třetí možnost, totiž ta, že zde pstruhů vůbec nebylo. Fričův assistent Hellich[2]) řadí jezero Prášilské zvířenou ještě ku jezerům v okolí Eisensteinu. Hellich patrně podceňuje hloubku jezera, neboť praví: „V jezeře štubenbašském a Laka, která hloubku nepatrnou mají, nebyly žádné druhy jezerní vyloveny."

Hellich vypočítává tyto perloočky: Simocephalus espinosus, Ceriodaphnia reticulata, Acroperus leucocephalus, Alonopsis elongata, Alona Leydigii, Alona affinis, Pleuroxus excisus, Pleuroxus nanus, Pleuroxus truncatus, Chydorus sphaericus, Polyphemus pediculus. Autor podotýká, že barvy těchto perlooček jsou vesměs a zvláště u lynceidek temnější, než druhy žijící v rybnících.

---

[1]) Frič A., Über die Fauna der Böhmerwaldseen. Sitzungsberichte der k. böhm. Ges. d. Wiss. Prag 1871, II., p. 6, 9 a 10.

[2]) Hellich B., Perloočky země české (Cladocera). Archiv pro přírodovědecké prozkoumání Čech. 3. díl, č. 4. Praha 1878, p. 120 a 121.

Wagner[1]) soudil, že jezero činí týž mrtvý dojem jako jezero Čertovo. Za mého pobytu v září 1910 zdržoval se na jezeře malý roháč, jehož pobyt jistě nepodporoval pokus s násadou pstruhů, jejž lesní správa nedlouho před tím učinila.

Hospodářsky má jezero P. pouze ten význam, že tvoří reservoir vody pro plavení polenového dříví.

To děje se obyčejně asi po 8 dnů v měsíci květnu. Ráno se stavidlo vytáhne a vypustí se nutné množství vody, totiž tolik, aby se voda v potoku jezerním nevylévala na luka. Na noc se odtok zase zastaví. Někdy, když v lesích jest ještě hojně sněhu a dny jsou již teplé, nebývá ani vody jezerní třeba, neboť tu stačí na plavbu dříví voda vzniklá táním sněhu; jindy ovšem, když nastane v červnu sucho a na Vydře jest málo vody, vypomůže se zase vodou jezera Prášilského. Podle toho, jak mnoho jest sněhu v lese, a ovšem i podle množství srážek naplní se zase jezero za 2 až 4 týdny. Vyjímaje dobu, kdy se dříví plaví, udržuje se jezero zpravidla na vysokém stavu.

Jezero Prášilské náleží ku kníž. schwarzenberskému revíru v Prášilech (panství Dlouhá ves).

Turisty jest méně vyhledáváno, než ostatní jezera na české straně; po Malém Javorském snad nejméně ze všech šumavských. V první polovici září r. 1906 nespatřil jsem tu po celé dny jediného turisty a také v ostatních měsících letních jsou návštěvy na jezeru daleko řidčí než na ostatních.

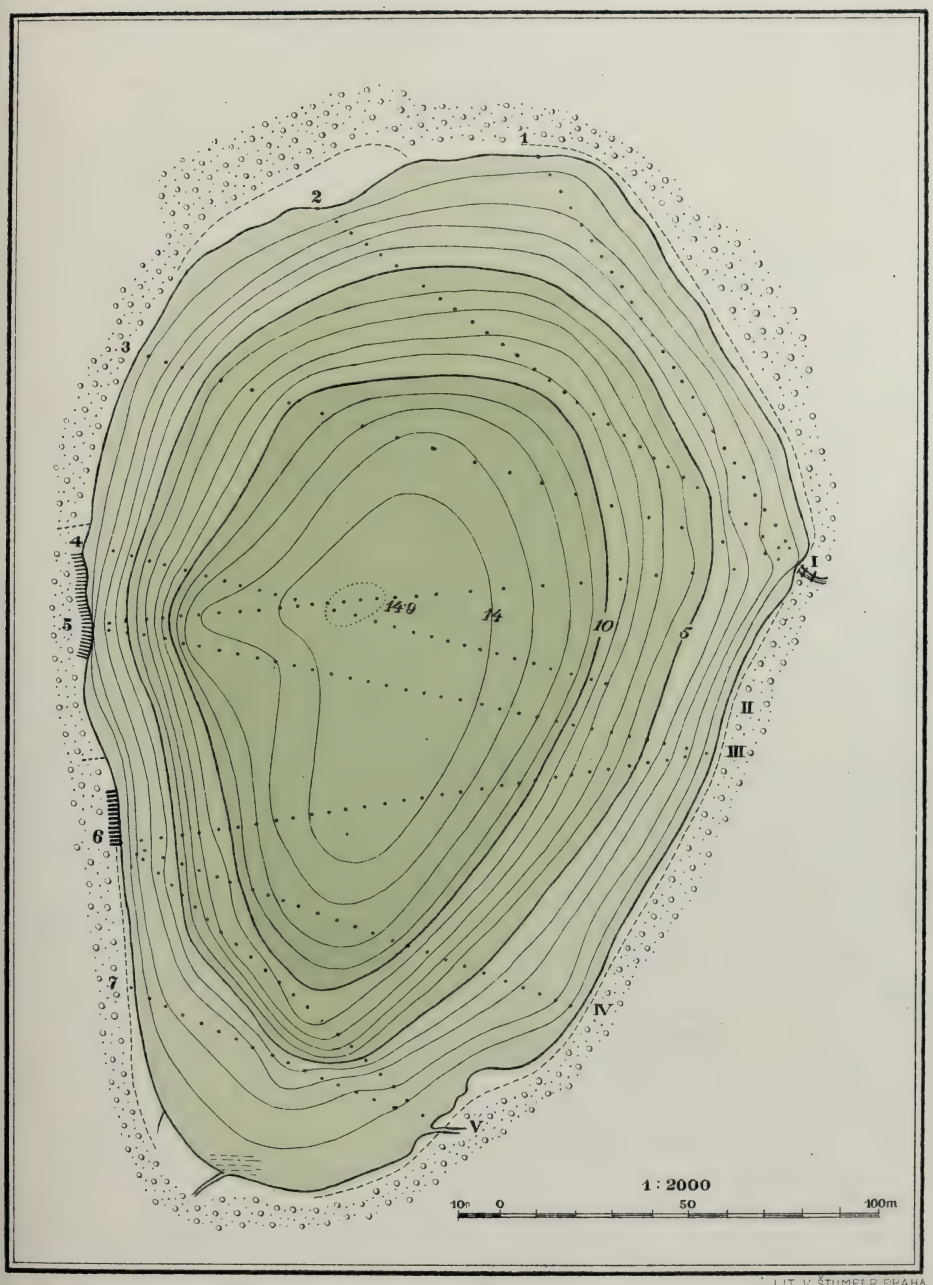
---

[1]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 52.

Pohled přes jezero Prášilské směrem ku stěně za nejnižší vody.
Fot. V. Švambera.

Západní břeh jezera Prášilského za nejnižší vody od severu.
Fot. V. Švambera.

Odtok jezera Prášilského.
Fot. V. Švambera.



V. ŠVAMBERA: Jezero Prášilské

podle měření v září 1906.

Rozpravy II. třídy České Akademie, ročník XXIII. (1914), čís. 16.

Některé potenční vlastnosti ploch 2. stupně.

Napsal

J. Sobotka.

Předloženo dne 27. února 1914.

1. Pojem potence má v geometrii kruhové a kulové důležitou úlohu. Přenesení tohoto pojmu na kuželosečky a na plochy 2. stupně vzbuzuje již z toho důvodu jistý zájem. Proveďme své úvahy ihned pro prostor, neboť obdobné vztahy pro rovinu jsou v oněch obsaženy a možno je z nich jednoduchým přechodem vyvoditi.

Při obecných souřadnicích rovnoběžných jest potence bodu k ploše kulové dána výsledkem dosazení souřadnic bodu do levé strany rovnice $f(x, y, z) = 0$ plochy kulové, je-li tato rovnice psána v obvyklém tvaru, kdy čtverce proměnných mají koeficient 1. Vzhledem k tomu zavedeme jako potenci bodu ku ploše 2. stupně metrický vztah, který jest charakterisován polohou bodu ku ploše a tudíž jest nezávislý na soustavě souřadné, ke které plochu vztahujeme, jehož pak analytické vyjádření souvisí co možno jednoduše s výsledkem substituce souřadnic bodu do levé strany rovnice plochy předpokládané ve tvaru $f(x, y, z) = 0$.

Úlohou naší bude vyhledati takovéto vztahy a vyvoditi obdobně pojem potence roviny ku ploše 2. stupně, jakož i podati některé vlastnosti těchto ploch, které s pojmy těmi souvisí. Budiž zde poukázáno na význačnou, obsažnou práci J. Neuberga: „Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre“ uveřejněnou v Nouvelles Annales de Mathématiques (1870), ve které rovněž vyvozen jest pojem potence bodu ku ploše a pak pojem potence přímky resp. roviny na základě potencí dvou resp. tří bodů.

Východiska i výsledky úvahy Neubergovy jsou však většinou jiného druhu než v úvaze této. Pojem potence, který jest zde podáván, jest v úzké souvislosti s problémem normál ploch 2. stupně, k němuž veden jsem byl poznámkou v knize Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes, I. Teil (1898), str. XV. a jejíž obsah připisuje se M. H. Taylo-

rovi. Podal jsem některé z těchto vztahů příležitostně v jihoslovanské Akademii věd v Záhřebu*) a uvádím je za příčinou souvislosti znovu, abych připojil k nim další příslušné úvahy.

I.

2. Vztahujme nejprve plochu 2. stupně k tetraedrální soustavě souřadné o základním tetraedru $A_1 A_2 A_3 A_4$ a budiž

$$f(x) = \sum_1^4 a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{1}$$

její rovnice; diskriminant této jest

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

kde $a_{ik} = a_{ki}$; adjunkty členů a_{ik} značíme A_{ik} a polovinu parciální derivace funkce $f(x)$ dle x_i značíme $f_i(x)$.

Daný bod P měj souřadnice x_i'; pak jest

$$\xi_1 f_1(x') + \xi_2 f_2(x') + \xi_3 f_3(x') + \xi_4 f_4(x') = 0$$

čili

$$x_1' f_1(\xi) + x_2' f_2(\xi) + x_3' f_3(\xi) + x_4' f_4(\xi) = 0 \tag{2}$$

rovnice polární roviny L bodu P vzhledem ku ploše a tudíž jest

$$f_4(\xi) = a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2 + a_{34}\xi_3 + a_{44}\xi_4 = 0 \tag{3}$$

rovnice polární roviny N bodu A_4.

Veďme přímku $P A_4$ a buďte L_4, N_4 resp. P_4 její průsečíky s rovinami L, N, resp. $A_1 A_2 A_3$. Souřadnice X_i libovolného bodu přímky $A_4 P$ možno psáti

$$X_1 = \lambda x_1', \; X_2 = \lambda x_2', \; X_3 = \lambda x_3', \; X_4 = 1 + \lambda x_4'.$$

Pro průsečík této přímky s rovinou

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

jest pak

$$\lambda = \frac{-u_4}{u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3' + u_4 x_4'},$$

takže jest pro bod L_4

$$\lambda = \frac{-f_4(x')}{f(x')}, \tag{4}$$

*) Pro pamětní spis na počest jejího předsedy T. Smičiklasa, který měl během t. r. vyjíti.

pro bod N_4

$$\lambda = \frac{-a_{44}}{f_4(x')} \tag{5}$$

a pro bod P_4 konečně

$$\lambda = \frac{-1}{x_4'} \tag{6}.$$

Z rovnic (4), (5), (6) plyne

$$(A_4 P L_4 N_4) = \frac{f_4^2(x')}{a_{44} f(x')}, \quad (A_4 P L_4 P_4) = \frac{x_4' f_4(x')}{f(x')},$$

$$(A_4 P N_4 P_4) = \frac{a_{44} x_4'}{f_4(x')}.$$

Z těchto rovnic plyne dále

$$(A_4 P L_4 N_4)(A_4 P N_4 P_4) = \frac{x_4' f_4(x')}{f(x')},$$

$$(A_4 P L_4 P_4)(A_4 P N_4 P_4) = \frac{a_{44} x_4'^2}{f(x')}.$$

Přicházíme odtud k rovnicím

$$\begin{aligned} f(x') &= x_4' f_4(x') (A_4 P N_4 L_4)(A_4 P P_4 N_4) \\ &= a_{44} x_4'^2 (A_4 P P_4 L_4)(A_4 P P_4 N_4) \end{aligned} \tag{I'}$$

a dále k rovnicím

$$f(x') = a_{44} x_4'^2 \frac{(A_4 P L_4 N_4)}{(A_4 P L_4 P_4)^2} = a_{44} x_4'^2 \frac{(A_4 P N_4 L_4)}{(A_4 P N_4 P_4)^2}$$

$$= a_{44} x_4'^2 \frac{(A_4 P P_4)^2}{(A_4 P L_4)(A_4 P N_4)}. \tag{I}$$

3. Pól S_4 roviny $A_1 A_2 A_3$ má souřadnice $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ a souřadnice libovolného bodu přímky $S_4 P$ možno psáti ve tvaru

$$x_i = x_i' + \lambda A_{i4}.$$

Pro průsečík přímky $S_4 P$ s rovinou $\Sigma u_i x_i = 0$ jest pak

$$\lambda = -\frac{\Sigma u_i x_i'}{\Sigma u_i A_{i4}}.$$

Tudíž jest pro průsečík L_4' přímky $P S_4$ s rovinou L

$$\lambda = -\frac{f(x_i')}{A x_4'},$$

ježto zde $\Sigma u_i A_{i4} = \Sigma f_i(x') A_{i4}$ a $\Sigma a_{ik} A_{i4} = 0$ pokud $k \neq 4$, kdežto $\Sigma a_{i4} A_{i4} = A$.

Dále jest pro průsečík Q_4 přímky $P S_4$ s rovinou $A_1 A_2 A_3$

$$\lambda = \frac{-x_4'}{A_{44}},$$

takže

$$(P\,S_4\,L_4'\,Q_4) = \frac{A_{44}}{A\,x_4'^2}\,f(x_i')$$

a

$$f(x_i') = \frac{A\,x_4'^2}{A_{44}}\,(P\,S_4\,L_4'\,Q_4) = \frac{A\,x_4'^2}{A_{44}}\,(S_4\,P\,Q_4\,L_4'). \qquad \text{(II)}$$

Obdobné výsledky obdržíme vzhled m k ostatním vrcholům souřadného tetraedru. Tím nenabýváme sice výrazů nezávislých na soustavě souřadné, ale přicházíme za to ke geometrickému významu substitučního výsledku $f(x')$. Dále seznáváme, že $f(x')$ jest kladné resp. záporné, mají-li veličiny $(A_4\,P\,N_4\,L_4)$, a_{44} znaménka stejná resp. nestejná. Obdobně soudíme ze vzorce (II.) o znaménku hodnoty $f(x')$.

4. Vzorce (I) pozbývají významu, je-li $a_{44} = 0$, t. j. leží-li bod A_4 na ploše. V tomto případě možno užiti obdobných vzorců pro jiný vrchol A_i. Jen tehdy, je-li tetraedr $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ ploše vepsán, není možno vzorců (I) vůbec užiti. Možno však v tom případě obecně užiti rovnic (II), ježto předpokládáme mlčky stále $A \neq 0$, tedy uvažujeme nedegenerovanou plochu 2. stupně. Výjimka nastává jen tehdy, jestliže jeden ze čtyřstranů z hran tetraedru $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ utvořených náleží ploše, v kterémžto případě možno rovnici plochy uvésti na tvar

$$f(x) = \frac{a_{ik}\,x_i\,x_k}{a_{lm}\,x_l\,x_m} + 1 = 0. \qquad (7)$$

Zde vedeme daným bodem $P(x_i')$ příčku ke hranám $A_i\,A_k$, $A_l\,A_m$ souřadného tetraedru a vyhledáme na ní bod L, ku P vzhledem ku ploše sdružený, který jest tedy průsečíkem tří rovin:

$$\begin{aligned} a_{ik}\,x_k'\,\xi_i + a_{ik}\,x_i'\,\xi_k + a_{lm}\,x_m'\,\xi_l + a_{lm}\,x_l'\,\xi_m &= 0 \\ x_k'\,\xi_i - x_i'\,\xi_k &= 0 \\ x_m'\,\xi_l - x_l'\,\xi_m &= 0, \end{aligned}$$

takže pro jeho souřadnice plyne z těchto rovnic

$$\xi_i : \xi_k : \xi_l : \xi_m = -\frac{a_{lm}}{x_k'} : -\frac{a_{lm}}{x_i'} : \frac{a_{ik}}{x_m'} : \frac{a_{ik}}{x_l'}. \qquad (8)$$

Přímka $P\,L$ protínej hranu $A_i\,A_k$ v bodě T_{ik} a hranu $A_l\,A_m$ v bodě T_{lm}. Souřadnice bodu T_{lm} pišme ve tvaru $x_i' + \lambda_1\,\xi_i$, souřadnice bodu T_{ik} ve tvaru $x_i' + \lambda_2\,\xi_i$, načež z (8) plyne

$$\lambda_1 = \frac{x_i'\,x_k'}{a_{lm}}, \quad \lambda_2 = -\frac{x_l'\,x_m'}{a_{ik}},$$

takže

$$(P\,L\,T_{lm}\,T_{ik}) = -\frac{a_{ik}\,x_i'\,x_k'}{a_{lm}\,x_l'\,x_m'}.$$

Ježto pak

$$(P\,T_{l\,m}\,L\,T_{i\,k}) = 1 - (P\,L\,T_{l\,m}\,T_{i\,k}),$$

dostáváme konečně

$$f(x') = (P\,T_{l\,m}\,L\,T_{i\,k}). \qquad \text{(III)}$$

5. Přejděme nyní k úvahám duálním. Buďte u_1', u_2', u_3', u_4' souřadnice dané roviny P a buďte A_i stěny vrcholům A_i souřadného tetraedru protilehlé; L budiž pol roviny P, N_i pol stěny A_i vzhledem k uvažované ploše. Rovnici plochy v rovinových souřadnicích možno psáti ve tvaru

$$F(u) = \Sigma\, A_{i\,k}\, u_i\, u_k = 0. \qquad (9)$$

Ptejme se pak po významu výrazu $F(u')$, který obdržíme, vložíme-li do levé strany rovnice $F(u) = 0$ souřadnice dané roviny P.

Zde odpovídají rovnicím (I') duálně rovnice

$$\begin{aligned} F(u') &= u_4'\, F_4(u')\,(A_4\,P\,N_4\,L)\,(A_4\,P\,A_4\,N_4) \\ &= A_{44}\, u_{44}'^2\,(A_4\,P\,A_4\,L)\,(A_4\,P\,A_4\,N_4) \end{aligned} \qquad \text{(IV')}$$

a rovnicím (I) rovnice

$$\begin{aligned} F(u') &= A_{44}\, u_4'^2\, \frac{(A_4\,P\,L\,N_4)}{(A_4\,P\,L\,A_4)^2} = A_{44}\, u_4'^2\, \frac{(A_4\,P\,N_4\,L)}{(A_4\,P\,N_4\,A_4)^2} \\ &= A_{44}\, u_4'^2\, \frac{(A_4\,P\,A_4)^2}{(A_4\,P\,N_4)\,(A_4\,P\,L)} \end{aligned} \qquad \text{(IV).}$$

Polární rovina S_4 bodu A_4 má souřadnice a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} a libovolná rovina jdoucí průsečnicí g rovin S_4 a P má souřadnice $u_i = u_i' + \lambda\, a_{i4}$; prochází-li bodem $\Sigma\, x_i\, u_i = 0$, jest pro ni pak

$$\lambda = -\frac{\Sigma\, x_i\, u_i'}{\Sigma\, x_i\, a_{i4}};$$

pro rovinu $g\,L$ jest tedy

$$\lambda = -\frac{F(u')}{A\, u_4'}$$

a pro rovinu $g\,A_4$ jest

$$\lambda = -\frac{u_4'}{a_{44}},$$

takže

$$(P\,S_4\,L\,A_4) = \frac{a_{44}}{A\, u_4'^2}\, F(u').$$

a

$$F(u') = \frac{A\, u_4'^2}{a_{44}}\,(P\,S_4\,L\,A_4) = \frac{A\, u_4'^2}{a_{44}}\,(P_4\,S_4\,L\,A_4), \qquad \text{(V')}$$

kde P_4, S_4 jsou průsečíky přímky $A_4\,L$ s rovinami P a S_4.

Obecně jest tedy

$$F(u') = \frac{A\, u_k'^2}{a_{kk}} (P_k\, S_k\, L\, A_k) . \qquad (V)$$

$F(u')$ jest tudíž kladné nebo záporné dle toho, zdali $(A_i\, P\, N_i\, L)$ a A_{ii} mají stejná nebo různá znaménka. Obdobně soudíme při užití rovnic (V').

6. Vzorce (IV) nebo vzorce odpovídající jim cyklickou záměnou vedou k určitým hodnotám pro $F(u')$, pokud plocha není vepsána tetraedru souřadnému, kdežto vzorce (V) dávají hodnotu pro $F(u')$ kromě případu, že plocha jest tetraedru tomu opsána, takže zbývá ještě případ, kdy plocha jest tetraedru současně vepsána i opsána, čili kdy jeden z hran jeho utvořený čtyřstran leží na ploše. V tomto případě možno rovnici plochy psáti ve tvaru

$$F(u) = \frac{a_{ik}\, u_l\, u_m}{a_{lm}\, u_i\, u_k} + 1 = 0. \qquad (10)$$

Veďme zde příčku pólem L dané roviny $P(u_i')$ ku přímkám $A_i A_k$, $A_l A_m$, která protínejž P, $A_i A_k$, $A_l A_m$ v bodech P, T_{ik}, T_{lm}. Souřadnice bodu L jsou zde

$$x_l' = a_{ik}\, u_m', \quad x_m' = a_{ik}\, u_l', \quad x_i' = a_{lm}\, u_k', \quad x_k' = a_{lm}\, u_i'$$

a pro souřadnice x_i'' bodu P obdržíme poměr

$$x_l'' : x_m'' : x_i'' : x_k'' = \frac{1}{u_l'} : \frac{1}{u_m'} : \frac{-1}{u_i'} : \frac{-1}{u_k'} .$$

Pro body T_{ik}, T_{lm} obdržíme, píšeme-li jejich souřadnice ve tvaru $x' + \lambda_1 x''$, resp. $x' + \lambda_2 x''$, parametry

$$\lambda_1 = -\, a_{ik}\, u_m'\, u_l', \quad \lambda_2 = a_{lm}\, u_i'\, u_k',$$

takže

$$(L\, P\, T_{ik}\, T_{lm}) = -\, \frac{a_{ik}\, u_m'\, u_l'}{a_{lm}\, u_i'\, u_k'} .$$

Ježto pak

$$(L\, T_{ik}\, P\, T_{lm}) = 1 - (L\, P\, T_{ik}\, T_{lm}),$$

dostáváme konečně

$$F(u') = (P\, T_{lm}\, L\, T_{ik}) \qquad (VI)$$

nebo, je-li h spojnice průsečíků hran $A_l A_m$, $A_i A_k$ s rovinou P a jsou-li H_{ik}, H_{lm}, L roviny $h\, A_i\, A_k$, $h\, A_l\, A_m$, resp. h L, jest též

$$F(u') = (P\, H_{lm}\, L\, H_{ik}). \qquad (VI')$$

II.

7. Přejděme k obecným souřadnicím kartesiánským a zabývejme se výrazem $f(x', y', z')$, který obržíme zavedením souřadnic x', y', z' daného

bodu do levé strany rovnice plochy $f(x\ y,\ z) = 0$. Tuto rovnici pišme ve tvaru

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{23}\,y\,z + 2\,a_{31}\,z\,x \\ 2\,a_{14}\,x + 2\,a_{24}\,y + 2\,a_{34}\,z + a_{44} = 0 \qquad (11)$$

analogicky k předcházejícímu označení, jež zde též v dalším užijeme.

Dále položme

$$\varphi(x\ y,\ z) = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{23}\,y\,z + 2\,a_{31}\,z\,x. \qquad (11')$$

Volíme-li se zřetelem k dosavadním úvahám počátek souřadnic O v bodě A_4 a body A_1, A_2, A_3 považujeme za úběžné body os x, y, z, protneme-li dále polární roviny bodů O, P ku ploše s přímkou $O\,P$ v bodech N a L, dávají rovnice (I) pro naše speciální předpoklady

$$f(x',\ y',\ z') = \frac{a_{44}}{(O\,P\,L)\,(O\,P\,N)} = a_{44}\ (P\,O\,N)\,(P\,O\,L). \qquad (12)$$

Rovnice (II) dávají, značí-li L_σ průsečík polární roviny bodu P se spojnicí bodu P se středem S plochy,

$$f(x',\ y',\ z') = \frac{A}{A_{44}}\,(P\,S\,L_\sigma). \qquad (12')$$

Je-li daná plocha plochou centrickou, jest vzorec (12') pro vlastní plochy (nedegenerované) vždy platný, kdežto vzorec (12) jen tehdy, neleží-li počátek O na ploše.

Jest tedy nejpřirozenější definovati jako potenci bodu P k centrické ploše 2. stupně dělicí poměr $(P\,S\,L_\sigma)$.

Je-li plocha paraboloidem, je-li tedy $A_{44} = 0$, platí zde, pokud počátek O na ploše neleží, vzorec (12), kdežto vzorcem (12') hodnota výrazu $f(x',\ y',\ z')$ není určena; musili bychom tu spojiti na př. pol S_3 roviny $x\,y$ ku ploše s bodem P a spojnici protíti s polární rovinou bodu P v bodě L_3' a s rovinou $x\,y$ v bodě Q_3; pak bylo by

$$f(x',\ y',\ z') = \frac{A}{A_{33}}\,(S_3\,P\,Q_3\,L_3').$$

Dvojpoměr, k němuž zde přicházíme, závisí však na soustavě souřadné. Proto užijeme zde jiného způsobu.

8. Veďme bodem P rovnoběžku k hlavní ose plochy. Souřadnice ξ, η, ζ libovolného jejího bodu možno vyjádřiti pomocí parametru σ ve tvaru

$$\xi = x' + \sigma\,A_{14},\ \eta = y' + \sigma\,A_{24},\ \zeta = z' + \sigma\,A_{34}. \qquad (13)$$

Stanovme nyní v konečnu ležící průsečík P_0 této rovnoběžky s paraboloidem. Příslušný parametr σ plyne z rovnice

$$f(x', y', z') + 2\,\sigma\,[f_1(x', y', z')\,A_{14} + f_2(x', y', z')\,A_{24} + f_3(x', y', z')\,A_{34}] \\ + \sigma^2\,\varphi(A_{14},\ A_{24},\ A_{34}) = 0.$$

Vzhledem ku $A_{44} = 0$ jest zde $\varphi\,(A_{14},\ A_{24},\ A_{34}) = 0$, a výraz v závorce při σ jest roven A. Plyne tudíž

$$\sigma = \frac{-f\,(x',\ y',\ z')}{2\,A},$$

a souřadnice bodu P_0 nabývají hodnot

$$\xi = x' - \frac{f\,(x',\ y'\ z')}{2\,A}\,A_{14},\quad \eta = y' - \frac{f\,(x',\ y',\ z')}{2\,A}\,A_{24},$$

$$\zeta = z' - \frac{f\,(x',\ y',\ z')}{2\,A}\,A_{34}. \tag{14}$$

Položíme-li $P_0 P = s$ a

$$\Phi\,(X,\ Y,\ Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\,X\,Y\ cos\ x\,y + 2\,Y\,Z\ cos\ y\,z + 2\,Z\,X\ cos\ z\,x, \tag{15}$$

pak jest, jak známo,

$$s^2 = \Phi\,(\xi - x',\ \eta - y',\ \zeta - z')$$

a vzhledem ke (14)

$$s^2 = \frac{f^2\,(x',\ y',\ z')}{4\,A^2}\,\Phi\,(A_{14},\ A_{24},\ A_{34});$$

následkem toho jest

$$f\,(x',\ y',\ z') = \frac{2\,A\,s}{\sqrt{\Phi\,(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}}. \tag{16}$$

Délku $L_\sigma P = 2\,s$ označme jako *potenci bodu P vzhledem k paraboloidu*. Veďme také počátkem O rovnoběžku k hlavní ose paraboloidu, která nechť protíná jej v konečnu v bodě O_0 a položme $O_0 O = s_0$. Pak plyne z (16), ježto pro bod O jest $f\,(x',\ y',\ z') = a_{44}$, vztah

$$a_{44} = \frac{2\,A\,s_0}{\sqrt{\Phi\,(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}},$$

takže konečně obdržíme

$$f\,(x',\ y',\ z') = a_{44}\,\frac{s}{s_0} \tag{17}$$

čímž hodnota výrazu $f\,(x',\ y',\ z')$ dána jest jednoznačně i co do znaménka.

Leží-li však bod O na paraboloidu, pak není možno užiti vzorce (17) a musíme omeziti se na vzorec (16), načež nutno znaménko jmenovatele správně stanoviti. Zvolme za tím účelem bod D tak, že jeho souřadnice jsou úměrny veličinám A_{14}, A_{24}, A_{34}, tedy rovny $\mu\,A_{14}$, $\mu\,A_{24}$, $\mu\,A_{34}$, při čemž μ volme kladně; pro tento bod jest, ježto $a_{44} = 0$,

$$f\,(x',\ y',\ z') = 2\,\mu\,A,$$

při čemž vzhledem ku (16) jest

$$O\,D = \mu\,\sqrt{\Phi\,(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}.$$

Stanovme nyní, že $O\,D$, tedy směr od bodu O k bodu $(\mu\,A_{14},\ \mu\,A_{24},\ \mu\,A_{34})$, má míti vždy totéž znaménko jako má A; pak jest

$$f\,(x',\ y',\ z') = 2\,|\,\frac{A}{\sqrt{\Phi\,(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}}\,|\ s, \tag{18}$$

a $f\,(x',\ y',\ z')$ jest při positivním A kladné nebo záporné, dle toho, zdali $s = P_0P$ a $O\,D$ mají smysl souhlasný nebo nesouhlasný, kdežto při negativním A jest naopak.

Dále plyne z (14)

$$\frac{x' - \xi}{A_{14}} = \frac{y' - \eta}{A_{21}} = \frac{z' - \xi}{A_{34}} = \frac{f\,(x',\ y',\ z')}{2\,A},$$

z kterýchžto rovnic můžeme rovněž seznati znaménko výrazu $f\,(x',\ y',\ z')$.

Vzorce (18) možno užiti také ve specielním případě

$$f\,(x,\ y,\ z) = a\,x\,y + b\,z; \tag{19}$$

plyne zde z něho

$$f\,(x',\ y',\ z') = b\,(z' - z_0) = b\,.\,P_0P, \tag{20}$$

značí-li z_0 souřadnici z průsečíku P_0 rovnoběžky ku z bodem P vedené, což plyne přímo z toho, že $a\,x'\,y' + b\,z_0 = 0$.

Ze (14) plyne též

$$a_{14}\,(x' - \xi) + a_{24}\,(y' - \eta) + a_{34}\,(z' - \xi) = \frac{1}{2}\,f\,(x',\ y',\ z').$$

Protíná-li $P\,P_0$ polární rovinu $\chi\,(x,\ y,\ z) = a_{14}\,x + a_{24}\,y + a_{34}\,z + a_{44} = 0$ počátku O v bodě R, jest

$$(P\,P_0\,R) = \frac{\chi\,(x',\ y',\ z')}{\chi\,(x', y', z') - \frac{1}{2}\,f\,(x',\ y',\ z')},$$

takže

$$f\,(x',\ y',\ z') = 2\,(P_0\,R\,P)\,\chi\,(x',\ y',\ z'),$$

kterýžto vztah platí i pro $a_{44} = 0$.

9. Můžeme si získati též jinou cestou interpretaci hodnoty $f\,(x',\ y',\ z')$ značí-li $f\,(x,\ y,\ z) = 0$ zkratku zavedenou pro rovnci (11). Za účelem tím uveďme plochu $f\,(x,\ y,\ z) = 0$ v souvislost s plochou kulovou, která má bod $P\,(x',\ y',\ z')$ za střed a jejíž rovnice tudíž jest

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,y\,\omega_{12} + 2\,y\,z\,\omega_{23} + 2\,z\,x\,\omega_{31} - 2\,x\,(x' + y'\,\omega_{12} + \\ &+ z'\,\omega_{13}) - 2\,y\,(x'\,\omega_{21} + y' + z'\,\omega_{23}) - 2\,z'\,(x'\,\omega_{31} + y'\,\omega_{32} + z') + x'^2 + \\ &y'^2 + z'^2 + 2\,x'\,y'\,\omega_{12} + 2\,y'\,z'\,\omega_{23} + 2\,z'\,x'\,\omega_{31} - \varrho^2 = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

kde ϱ značí poloměr koule a kde $\omega_{12} = \omega_{21} = \cos\,x\,y$, $\omega_{23} = \omega_{32} = \cos\,y\,z$, $\omega_{31} = \omega_{13} = \cos\,z\,x$.

Položme

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\,x'\,y'\,\omega_{12} + 2\,y'\,z'\,\omega_{23} + 2\,z'\,x'\,\omega_{31} = \varphi\,(x', y', z')$$

a označme $\Phi(x, y, z)$ levou stranu rovnice (21) bez posledního členu, takže rovnici (21) možno zkráceně psáti

$$\Phi(x, y, z) - \varrho^2 = 0.$$

Konečně zaveďme obvyklé zkratky

$$\Psi(u, v, w) = -\begin{vmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} & u \\ \omega_{21} & 1 & \omega_{23} & v \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}, \qquad (22)$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 1 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}$$

a označme Ω_{ik} adjunkty příslušné ku ω_{ik} v determinantu Ω, při čemž $\omega_{ii} = 1$.

Vzhledem k těmto označením jest

$$-\varrho^2 \Psi(u, v, w) + (x' u + y' v + z' w + 1)^2 \Omega = 0 \qquad (23)$$

rovnicí plochy kulové (21) v souřadnicích rovinových; ve tvaru rozvedeném jest tedy

$$\varrho^2 (u^2 \Omega_{11} + v^2 \Omega_{22} + w^2 \Omega_{33} + 2 u v \Omega_{12} + 2 v w \Omega_{23} + 2 w u \Omega_{31} - (x' u + y' v + z' w + 1)^2 \Omega = 0$$

čili

$$(\varrho^2 \Omega_{11} - x'^2) u^2 + (\varrho^2 \Omega_{22} - y'^2) v^2 + (\varrho^2 \Omega_{33} - z'^2) w^2 + 2 (\varrho^2 \Omega_{12} - x' y' \Omega) u v + 2 (\varrho^2 \Omega_{23} - y' z' \Omega) v w + 2 (\varrho^2 \Omega_{31} - z' x' \Omega) w u - 2 x' \Omega u - 2 y' \Omega v - 2 z' \Omega w - \Omega = 0.$$

Zvolme plochu kulovou tak, aby dané ploše 2. stupně byla harmonicky vepsána, aby tedy byla vepsána v nekonečně mnoho polárních tetraedrů plochy 2. stupně a naopak aby nekonečně mnoho z jejích polárních tetraedrů bylo ploše 2. stupně vepsáno. Analytická podmínka pro to jest

$$a_{11} (\varrho^2 \Omega_{11} - x'^2 \Omega) + a_{22} (\varrho^2 \Omega_{22} - y'^2 \Omega) + a_{33} (\varrho^2 \Omega_{33} - z'^2 \Omega) + 2 a_{12} (\varrho^2 \Omega_{12} - x' y' \Omega) + 2 a_{23} (\varrho \Omega_{23} - y' z' \Omega) + 2 a_{31} (\varrho^2 \Omega_{31} - z' x' \Omega) - 2 (a_{14} x' + a_{24} y' + a_{34} z') \Omega - a_{44} \Omega = 0, \qquad (24)$$

ježto, jak známo, tato podmínka pro plochy

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \ \Sigma B_{ik} u_i u_k = 0$$

jest obecně vyjádřena rovnicí

$$\Sigma a_{ik} B_{ik} = 0 \qquad (24')$$

Z rovnice (24) pyne

$$\varrho^2 = \frac{f(x', y', z') \cdot \Omega}{a_{11} \Omega_{11} + a_{22} \Omega_{22} + a_{33} \Omega_{33} + 2 a_{12} \Omega_{12} + 2 a_{13} \Omega_{13} + 2 a_{23} \Omega_{23}}.$$

Položme

$$D = a_{11}\,\mathfrak{A}_{11} + a_{22}\,\mathfrak{A}_{22} + a_{33}\,\mathfrak{A}_{33} + 2\,a_{12}\,\mathfrak{A}_{12} + 2\,a_{13}\,\mathfrak{A}_{13} + 2\,a_{23}\,\mathfrak{A}_{23},$$

načež jest

$$f(x', y', z') = \frac{D}{\mathfrak{A}}\,\varrho^2. \tag{25}$$

10. Uveďme poslední vzorec v souvislost s problémem normál plochy 2. stupně.

Uvažujme nejprve *centrickou plochu*, kterou vztahujme k jejím hlavním osám jako osám souřadným. Pak možno její rovnici psáti

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{26}$$

volíme-li za a, b, c libovolné hodnoty reálné nebo ryze imaginárné.

Souřadnice x, y, z pat normál z bodu P o souřadnicích X, Y, Z splňují rovnice

$$\frac{x - X}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - Y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z - Z}{\frac{z}{c^2}} = -\lambda, \tag{27}$$

takže

$$x = \frac{a^2 X}{a^2 + \lambda}, \quad y = \frac{b^2 Y}{b^2 + \lambda}, \quad z = \frac{c^2 Z}{c^2 + \lambda} \tag{28}$$

a

$$x - X = \frac{-\lambda X}{a^2 + \lambda}, \; y - Y = \frac{-\lambda Y}{b^2 + \lambda}, \; z - Z = \frac{-\lambda Z}{c^2 + \lambda}.$$

Pro délku n normály od paty k východisku P máme tedy výraz

$$n^2 = \lambda^2 \left[\frac{X^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{Y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{Z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right], \tag{29}$$

kdežto pro vzdálenost p středu plochy od tečné roviny

$$\frac{X\xi}{a^2 + \lambda} + \frac{Y\eta}{b^2 + \lambda} + \frac{Z\zeta}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

paty (x, y, z) platí výraz

$$p^2 = \frac{1}{\frac{X^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{Y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{Z^2}{(c^2 + \lambda)^2}},$$

takže

$$p^2 n^2 = \lambda^2. \tag{30'}$$

Beřme p a n kladně ve směru od středu k tečné rovině, takže můžeme v souhlase s (27) psáti

$$p\,n = \lambda. \tag{30}$$

Dosadíme-li hodnoty (28) souřadnic paty (x, y, z) do rovnice plochy, přicházíme k rovnici

$$[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^2 - a^2X^2[(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^2 - b^2Y^2[(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)]^2 - c^2Z^2[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)]^2 = 0,$$

která jest v λ stupně 6. a vede jak známo k šesti normálám z bodu P na plochu spuštěným. Z této rovnice plyne

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_6 = -2(a^2+b^2+c^2) \tag{31}$$

a

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_6 = H = a^4b^4c^4\left(1 - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right).$$

Má tudíž součet $\sum_1^6 n_i p_i$ pro všecky body P prostoru touž konstantní hodnotu.

A dále jest

$$H = -a^4b^4c^4G(X, Y, Z), \tag{32}$$

jak seznal H. M. Taylor.

11. Užijme vzorce (25) pro případ naší specielní soustavy souřadné. Zde jest $\Omega = \Omega_{ii} = 1$, kdežto $\Omega_{ik} = 0$, pro $i \neq k$, a D nabývá hodnoty $\frac{3}{q^2}$, klademe-li

$$\frac{3}{q^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

čímž obdržíme

$$G(X, Y, Z) = \frac{3\varrho^2}{q^2}, \tag{33}$$

z kteréžto rovnice plyne

$$\varrho^2 = -\frac{H}{a^2b^2c^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}. \tag{33'}$$

Vložíme-li právě získanou hodnotu pro ϱ do rovnice (25), máme konečně

$$f(x', y', z') = -\frac{DH}{\Omega a^2b^2c^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}. \tag{34}$$

Mohli bychom tedy H resp. H: $a^2b^2c^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ rovněž zavésti jako potenci bodu P k naší centrické ploše; dřívější její definice jest však jednodušší. Dále obdržíme

$$\frac{f(x', y', z')}{G(X, Y, Z)} = \frac{q^2D}{3\Omega}. \tag{34'}$$

12. Zaveďme ještě následující obvyklá označení.

Budiž

$$B = A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a B_{ik} budiž adjunkt příslušný prvku a_{ik}, a konečně klaďme

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2\,B_{12}\,\omega_{12} + B_{23}\,\omega_{23} + 2\,B_{31}\,\omega_{31}.$$

Vztahujeme-li danou plochu ke třem sdruženým průměrům jako osám souřadným, jest

$$a_{11}'\,x^2 + a_{22}'\,y^2 + a_{33}'\,z^2 + \frac{A}{B} = 0$$

její rovnice. Při tom jest

$$\left.\begin{aligned} a_{11}' + a_{22}' + a_{33}' &= \frac{D}{\Omega}\,,\quad a_{11}'\,a_{22}' + a_{22}'\,a_{33}' + a_{33}'\,a_{11}' = \frac{C}{\Omega}\,, \\ a_{11}'\,a_{22}'\,a_{33}' &= \frac{B}{\Omega}\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Pro poloosy a, b, c plyne odtud

$$a^2 = -\frac{A}{B\,a_{11}'}\,,\quad b^2 = -\frac{A}{B\,a_{22}'}\,,\quad c^2 = -\frac{A}{B\,a_{33}'}\,. \tag{36'}$$

Jest tudíž

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= -\frac{A\,C}{B^2}\,,\quad a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2 = \frac{A^2\,D}{B^3}\,, \\ a^2\,b^2\,c^2 &= \frac{-A^3\,\Omega}{B^4} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

a z (33′) plyne

$$\varrho^2 = \frac{B^7\,H}{A^5\,D\,\Omega}\,, \tag{37}$$

dále z (34) máme

$$f(x',\,y',\,z') = \frac{B^7\,H}{A^5\,\Omega^2}\,,\quad H = \frac{A^5\,\Omega^2}{B^7}\,f(x',\,y',\,z')\,, \tag{37'}$$

při čemž vzhledem ku (34′)

$$\frac{f(x',\,y',\,z')}{G(X,\,Y,\,Z)} = \frac{A}{B}\,.$$

kdežto (31) a (36) dává

$$\sum_1^6 n_i\,p_i = 2\,\frac{A\,C}{B^2}\,. \tag{38}$$

Porovnáme-li (37′) s (12′), obdržíme

$$f(x',\,y',\,z') = \frac{A}{B}\,(P\;S\;L_\sigma) = \frac{B^7\,H}{A^5\,\Omega^2}\,,$$

takže pro H nabýváme výrazu

$$H = \frac{A^6\,\Omega^2}{B^8}\,(P\;S\;L_\sigma) \tag{37''}$$

13. Naše vzorce vedou však také k významu výrazu $f(x', y', z')$ danému rovnicí (12′).

Značí-li opět S střed plochy, položme $SP = d$, a svírá-li SP s kladnými směry os úhly α, β, γ, plyne z (33)

$$\varrho^2 = \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1\right) : \frac{3}{q^2},$$

a ježto

$$X = d\ cos\ \alpha,\ Y = d\ cos\ \beta,\ Z = d\ cos\ \gamma,$$

obdržíme vztah

$$\varrho^2 = \frac{q^2}{3}\left[d^2\left(\frac{cos^2\alpha}{a^2} + \frac{cos^2\beta}{b^2} + \frac{cos^2\gamma}{c^2}\right) - 1\right]. \qquad (33')$$

Položme nyní $SL = l$, při čemž L opět značí bod přímky SP sdružený ku P vzhledem ku ploše, a budiž a_1 délka (reálná nebo imaginárná) plošného poloměru ležícího na SP, takže jeho koncový bod má souřadnice $a_1\ cos\ \alpha$, $a_1\ cos\ \beta$, $a_1\ cos\ \gamma$.

Zaveďme tyto souřadnice do rovnice plochy, čímž obdržíme pro a_1 výraz

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{cos^2\alpha}{a^2} + \frac{cos^2\beta}{b^2} + \frac{cos^2\gamma}{c^2},$$

vzhledem k němuž a ke vztahu $l\,d = a_1^2$ obdržíme z (33′)

$$\varrho^2 = \frac{q^2}{3}\left(\frac{d^2}{a_1^2} - 1\right) = \frac{q^2}{3} \cdot \frac{d - l}{l} = -\frac{q^2}{3}(P\,S\,L). \qquad (39)$$

Ježto vzhledem ke vzorcům (36) jest

$$\frac{3}{q^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = -\frac{B\,D}{A\,\Omega},$$

plyne z posledního výrazu pro ϱ^2, že

$$\varrho^2 = \frac{A\,\Omega}{A_4 D}(P\,S\,L), \qquad (39')$$

odkud následkem vzorce (25) obdržíme

$$f(x', y', z') = \frac{A}{A_{44}}(P\,S\,L) = -\frac{A}{A_{44}} \cdot \frac{d^2 - a_1^2}{a_1^2}. \qquad (40)$$

Z (39) plyne rovnice

$$\frac{d^2}{a_1^2} - \frac{3\,\varrho^2}{q^2} - 1 = 0,$$

která umožňuje konstrukci ϱ pro každý bod P v prostoru. Vytkneme totiž v libovolné rovině přímkou SP kuželosečku, která má v bodě S střed a v přímce SP osu a jejímiž vrcholy jsou průsečíky přímky SP s plochou, kdežto druhé dva vrcholy leží na ploše kulové opsané kolem středu S

poloměrem $\sqrt{-\frac{q^2}{3}}$; ϱ jest pak její polotetivou ku SP kolmou a bodem P jdoucí; snadno získáme též ϱ dle (39) z poměru $(P\,S\,L)$.

14. Vzorce (39) uvedeme snadno v souhlas se vzorcem, který odvodil Neuberg (viz str. 319 u. m.). Tam jest východiskem známá věta Newtonova, které použito v té formě, že vedeme-li pevným bodem P sečnu plochy o koncových bodech M, M' a sestrojíme-li průměr k ní rovnoběžný, jehož délka jest $2\,a_\mu$, jest výraz $\frac{PM\,.\,PM'}{a_\mu^2}$ nezávislý na směru sečny. Tento výraz nazývá Neuberg indexem bodu $P\,(x,\,y,\,z)$ a značí jej I_x. Vedeme-li sečnu SP, jest dle toho

$$I_x = \frac{PM\,.\,PM'}{a_\mu^2} = \frac{(-d + a_1)\,(-d - a_1)}{a_1^2} = \frac{d^2 - a_1^2}{a_1^2},$$

tedy se zřetelem k (40)

$$I_x = -\frac{A_{44}}{A}\,f\,(x',\,y',\,z') = (S\,P\,L),$$

jak Neuberg skutečně dostává, kteryžto vztah podal bez důkazu již před tím Faure, jak Neuberg sám poznamenává.

15. Má-li pro různé body prostoru býti $f\,(x', y', z')$ konstantním, musí $\frac{d^2 - a_1^2}{a_1^2}$ míti konstantní hodnotu $\varkappa$; musí proto býti $\frac{d^2}{a_1^2} = 1 + \varkappa$, tedy rovněž konstantní, a bod P popisuje plochu s danou plochou soustřednou a homothetickou, která v niká z dané použitím modulu

$$\sqrt{\frac{A}{A - A_{44}\,f\,(x', y', z')}}.$$

Pro *paraboloidy* platí nejprve vzorec (25)

$$f\,(x',\,y',\,z') = \frac{D}{\Omega}\,\varrho^2,$$

při čemž opět určíme ϱ^2 z rovnice redukované na roviny hlavní a tečnou rovinu ve vrcholu:

$$G\,(x,\,y,\,z) = -2\,x + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0. \qquad (41)$$

Položme zde

$$\frac{2}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

kde q značí vzdálenost bodu harmonického k vrcholu dle ohnisek hlavních řezů paraboloidu od vrcholu samého, pak jest pro libovolný bod $P\,(X,\,Y,\,Z)$, analogicky ke vzorcům (25) a (33),

$$G\,(X,\,Y,\,Z) = \frac{2}{q}\,\varrho^2.$$

Veďme bodem P rovnoběžku ku ose paraboloidu, která nechť protíná jej v konečnu v bodě P_0 o souřadnicích x, Y, Z.

Ježto tedy

$$-2x + \frac{Y^2}{m} + \frac{Z^2}{n} = 0,$$

plyne odečtením od rovnice

$$-2X + \frac{Y^2}{m} + \frac{Z^2}{n} = \frac{2}{q}\varrho^2,$$

$$\varrho^2 = q(x - X).$$

Proto jest, klademe-li jako dříve $X - x = P_0P = s$,

$$f(x', y', z') = -\frac{D\,q\,s}{\Omega}, \quad G(X, Y, Z) = -2s, \tag{42}$$

a

$$f(x', y', z') = \frac{D\,q}{2\,\Omega} G(X, Y, Z) \tag{42'},$$

Neleží-li počátek O na ploše a položíme-li, jako dříve, $O_0O = s_0$, dává první vzorec (42)

$$a_{44} = -\frac{D\,q\,s_0}{\Omega},$$

a tudíž

$$f(x', y', z') = a_{44}\frac{s}{s_0},$$

čímž docházíme opět ke vzorci (17).

Můžeme tedy pro libovolný bod P poloměr ϱ považovati za pořadnici bodem P v parabole, která má za osu rovnoběžku bodem P k ose paraboloidu vedenou, její v konečnu ležící průsečík s paraboloidem za vrchol a $\frac{q}{2}$ za parametr, při čemž pořadnice jest měřena kolmo k ose paraboly a kladný směr osy paraboly jest dán úsečkou P_0P, je-li q kladné a úsečkou PP_0, je-li q záporné.

Dále vidíme, že posuneme-li paraboloid libovolně ve směru jeho osy, jeho body mají vzhledem k poloze původní stejné potence.

16. Uveďme také naše výsledky pro paraboloid v souvislost s problemem normál. Rovnice normály k paraboloidu

$$G(x, y, z) = -2x + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0 \tag{43}$$

v jeho bodě (x, y, z) jsou

$$-(X - x) = \frac{m}{y}(Y - y) = \frac{n}{z}(Z - z) = \lambda.$$

Pro normály jdoucí daným bodem $P\,(X,\ Y,\ Z)$ jsou tedy paty vyjádřeny rovnicemi

$$x = X + \lambda, \quad y = \frac{m\,Y}{m+\lambda}, \quad z = \frac{n\,Z}{n+\lambda}. \tag{44}$$

čili

$$x - X = \lambda,\ y - Y = \frac{-\,Y\,\lambda}{m+\lambda},\ z - Z = \frac{-\,Z\,\lambda}{n+\lambda}. \tag{44'}$$

Pro délku l normály od paty k východisku P plyne odtud

$$l^2 = \left[1 + \frac{Y^2}{(m+\lambda)^2} + \frac{Z^2}{(n+\lambda)^2}\right]\lambda^2. \tag{45}$$

Tečná rovina v patě normály $(x,\ y,\ z)$ jest dána rovnicí

$$-\xi + \frac{Y\,\eta}{m+\lambda} + \frac{Z\,\xi}{n+\lambda} - X - \lambda = 0; \tag{46}$$

pro vzdálenost její p od bodu $R\,(-X,\ 0,\ 0)$ obdržíme se zřetelem na (45)

$$p^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \dfrac{Y^2}{(m+\lambda)^2} + \dfrac{Z^2}{(n+\lambda)^2}} = \frac{\lambda^4}{l^2}.$$

Jest tudíž $p^2\,l^2 = \lambda^4$, tedy

$$\lambda = \sqrt{p\,l} \tag{47}.$$

Pro reálné normály jest λ reálné a p, l nutno bráti se souhlasným znaménkem; z (44') soudíme, že λ jest kladné, je-li $x - X$ kladné. To souhlasí s naším předpokladem o orientaci délky l. Neboť kolmice bodem R k rovině (46) má rovnice

$$\frac{\xi + X}{-1} = \frac{\eta\,(m+\lambda)}{Y} = \frac{\zeta\,(n+\lambda)}{Z} = \sigma,$$

při čemž pro průsečík této kolmice s řečenou rovinou jest

$$\sigma = \frac{\lambda}{1 + \dfrac{Y^2}{(m+\lambda)^2} + \dfrac{Z^2}{(n+\lambda)^2}};$$

tudíž jest σ kladné, je-li λ kladné, takže vzhledem ku (44') jest $(\xi + X)$ kladné, je-li $(X - x)$ kladné. Béřeme-li tedy na právě uvažované kolmici jakož i na normále plochy, jejíž délku měříme od paty k východisku, směr od bodu R k rovině (46) za kladný, vidíme, že p a l jsou současně s λ kladné nebo záporné.

17. Dosadíme-li souřadnice z (44) do rovnice (41) paraboloidu, plyne

$$-2\,(X + \lambda) + \frac{m\,Y^2}{(m+\lambda)^2} + \frac{n\,Z^2}{(n+\lambda)^2} = 0,$$

kterážto rovnice jest v λ stupně 5. a vede k patám normál bodem $P\,(X, Y, Z)$ ku ploše vedeným.

Pro kořeny této rovnice platí vztahy

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_5 = -2\,(X + 2m + 2n), \tag{48}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_5 = m^2 n^2 \left(-2X + \frac{Y^2}{m} + \frac{Z^2}{n}\right). \tag{49}$$

První z těchto rovnic pr ví, že součet $\sum_1^5 \sqrt{n_i p_i}$ pro všecky body, které leží v téže rovině kolmé k ose paraboloidu, má konstantní hodnotu. Při tom jest nutno bráti $\sqrt{l_i p_i}$ s tím znaménkem, které přísluší rozdílu $X - x_i$, kde x_i náleží patě příslušné normály, tedy se znaménkem nesouhlasným k λ.

Druhá rovnice dává se zřetelem na právě zmíněnou okolnost ve příčině znaménka $\sqrt{l_i p_i}$,

$$H = \sqrt{l_1 p_1 \,.\, l_2 p_2 \,.\, \ldots \,.\, l_5 p_5} = -m^2 n^2 G\,(X, Y, Z). \tag{49'}$$

Jest tudíž obecně pro libovolné rovnoběžné souřadnice dle (42')

$$f\,(x', y', z') = -\frac{D\,q\,H}{2\,\Omega\,m^2 n^2} = -\frac{D\,H}{\Omega\,m\,n\,(m+n)} \tag{50}$$

a dle (42) jest

$$q\,s = \frac{H}{m\,n\,(m+n)}, \quad H = 2\,m^2 n^2 s. \tag{50'}$$

Zavedeme-li opět invarianty rovnice paraboloidu $\frac{A}{\Omega}, \frac{D}{\Omega}, \frac{C}{\Omega}$, jako při centrických plochách, dostáváme právě tak jako tam

$$m\,n = -\frac{A\,\Omega}{C^2}, \quad m + n = \frac{D}{C}\left|\sqrt{-\frac{A}{C}}\right| \tag{50''}$$

a tedy

$$\frac{q}{2} = \frac{\Omega}{D}\left|\sqrt{-\frac{A}{C}}\right|, \tag{50'''}$$

takže můžeme ve vzorcích (50), (50') výrazy $m\,n$, $m + n$, q nahraditi právě vyvozenými výrazy ze součinitelů rovnice.

18. Zvláštního povšimnutí zasluhují rovnostranné plochy 2. stupně. Plocha *centrická* takového druhu jest buďto jednoplochý nebo dvojplochý hyperboloid; pro ni platí podmínka

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$$

a obecně, je-li plocha vztažena k libovolné soustavě souřadnic rovnoběžných, podmínka $D = 0$, takže pak z (25) plyne, že $\varrho^2 = \infty$. Tato podmínka praví dle (24') nejprve, že asymptotickému kuželi plochy může

býti vepsáno nekonečně mnoho pravoúhlých trojhranů, že kužel ten jest tedy rovnostranným. Zde přechází harmonicky vepsaná plocha kulová v kružnici kulovou v nekonečnu, které musí býti tedy nekonečně vzdálená kuželosečka plochy harmonicky opsána. Určitá hodnota pro $f(x', y', z')$ dána jest rovnicí (12′).

Rovnice (33)

$$G(X, Y, Z) = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\varrho^2$$

praví, že středy všech koulí vepsaných ploše a majících stejný poloměr leží na ploše F, k dané ploše soustředné a podobně položené; blíží-li se $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \delta^2$ k nule, blíží se pro určité ϱ výraz $G(X, Y, Z)$ rovněž k nule, tedy středy ploch kulových blíží se k dané ploše, neboť čtverce poloos plochy F mají hodnoty

$$a^2(1 + \delta^2\varrho^2),\ b^2(1 + \delta^2\varrho^2),\ c^2(1 + \delta^2\varrho^2).$$

Jest tudíž každá plocha kulová, která má střed na rovnostranném hyperboloidu, ploše té harmonicky vepsána. Z toho plyne věta, dokázaná zde zatím pro plochy centrické:

Výšky všech orthocentrických tetraedrů, které možno rovnostranné ploše 2. stupně vepsati, protínají se v bodě této plochy.

Specialisujeme-li tuto větu na rovinu, obdržíme známou větu, že průsečíky výšek trojúhelníků vepsaných rovnostranné hyperbole, leží na této hyperbole.

Pro rovnostranný paraboloid jest $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 0$, tedy $m + n = 0$; může to býti tudíž pouze paraboloid hyperbolický a okolnost, že pro bod na ploše neležící jest $\varrho = \infty$, praví, že jeho řídící roviny jsou navzájem kolmé a že jest nekonečně mnoho navzájem kolmých trojin površek plochy; jedna přímka takovéto trojiny jest vždy jedna nebo druhá vrcholová přímka paraboloidu.

Věta právě odvozená pro centrické plochy rovnostranné platí také pro rovnostranné paraboloidy, jak obdobným postupem možno dokázati.

III.

19. Aplikujme nyní vzorce (IV′) a další pro případ obecné kartesiovy soustavy souřadné. Zvolme opět A_4 jako nekonečně vzdálenou rovinu a označme S střed plochy, L pól dané roviny P (u', v', w'), P průsečík roviny P s přímkou $L\,S$, H průsečík roviny té s $O\,S$ a K průsečík s $O\,L$, při čemž tedy P, K, H leží na přímce.

Víme dále, že plochu

$$a_{11} x^2 + \ldots + 2 a_{12} x y + \ldots + 2 a_{14} x + \ldots + a_{44} = 0$$

lze v souřadnicích rovinových vyjádřiti rovnicí

$$F(u, v, w) = A_{11} u^2 + A_{22} v^2 + A_{33} w^2 + 2 A_{12} u v + 2 A_{23} v w + 2 A_{31} w u + 2 A_{14} u + 2 A_{24} v + 2 A_{34} w + A_{44} = 0,$$

a že obecné naše vzorce převedeme na naše specielní souřadnice, klademe-li $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $u_4 = 1$.

Tak dostáváme z (IV′)

$$F(u', v', w') = F_4(u', v', w')\,(L\,S\,P)\,(S\,O\,H) = A_{44}\,(L\,O\,K)\,(S\,O\,H). \quad (51')$$

Z (IV) dále plyne

$$F(u', v' w') = A_{44} \frac{(S\,L\,P)}{(O\,L\,K)^2} = A_{44} \frac{(L\,S\,P}{(O\,S\,H)^2}, \quad (51)$$

kteréžto vzorce užitím věty Menelaovy, že totiž

$$(O\,L\,K)\,(L\,S\,P)\,(S\,O\,H) = 1$$

v sebe přecházejí.

Můžeme nyní $(S\,L\,P)$ zavésti jako potenci roviny P ku ploše, ježto $\frac{A_{44}}{(O\,L\,K)^2}$ závisí na volbě soustavy souřadné. Zavedeme však raději jiný výraz, na $(S\,L\,P)$ závislý, za potenci tu, k němuž ihned dospějeme.

Pro plochu kulovou jest specielně

$$-\varrho^2 \Psi(u, v, w) + \Omega(\alpha u + \beta v + \gamma w + 1)^2 = 0, \quad (23)$$

jsou-li α, β, γ souřadnice jejího středu.

Značí-li $\bar{o}$ vzdálenost počátku O od roviny P a $\bar{d}$ vzdálenost středu $\bar{S}$ plochy kulové od této roviny, jest

$$(L\,O\,K) = L\,P : \bar{o}$$

a vzhledem k (51) jest

$$F(u', v', w') = \Omega \frac{S\,P}{L\,P} \cdot \frac{\overline{L\,P}^2}{\bar{o}^2} = \frac{\Omega}{\bar{o}^2} \cdot S\,P \cdot L\,P$$

$$= \frac{\Omega}{\bar{o}^2} S\,P\,(L\,S + S\,P) = \frac{\Omega}{\bar{o}^2} (\bar{d}^2 - \varrho^2$$

Jinak jest

$$\bar{d}^2 = \frac{(\alpha u' + \beta v' + \gamma w' + 1)^2 \Omega}{\Psi(u', v', w')}, \quad \bar{o}^2 = \frac{\Omega}{\Psi(u', v', w')},$$

takže skutečně obdržíme

$$\frac{\Omega}{\bar{o}^2} (\bar{d}^2 - \varrho^2) = (\alpha u' + \beta v' + \gamma w' + 1)^2 \Omega - \varrho^2 \Psi(u', v', w') =$$

$$= F(u', v', w').$$

Vidíme z toho, že výraz $F(u', v', w')$ vzhledem ku ploše kulové není již nezávislým na volbě soustavy souřadné.

Za potenci roviny $u'x + v'y + w'z + 1 = 0$ ku ploše kulové $F(u, v, w) = 0$ zavedeme výraz

$$\frac{\bar{o}^2}{\Omega} F(u', v', w') = \frac{F(u', v', w')}{\Psi(u', v', w')} = \bar{d}^2 - \varrho^2 = \bar{d}\,\bar{l},$$

je-li $LP = \bar{l}$.

Obdobně můžeme pro *centrickou* plochu 2. stupně zavésti za potenci roviny součin $d \,.\, l$, kde d značí vzdálenost středu S plochy a l vzdálenost pólu L dané roviny P od této roviny.

Především jest

$$d \,.\, l = l^2 (S\,L\,P).$$

Je-li pak o vzdálenost bodu O od P, dává (51) hodnotu potence

$$\Pi = d \,.\, l = l^2 \frac{(O\,L\,K)^2}{A_{44}} F(u', v', w') = \frac{o^2}{A_{44}} F(u', v', w')$$
$$= \frac{\Omega F\ u', v', w')}{A_{44}\,\Psi(u', v', w')},$$

takže

$$F(u', v', w') = \frac{A_{44}\,\Psi(u', v', w')}{\Omega}\,\Pi. \qquad (53)$$

Z toho soudíme, že potence roviny k centrické ploše 2. stupně jest rovna potenci této roviny k soustředné ploše kulové, jejíž poloměr jest dán výrazem

$$\varrho^2 = d\,(d - l).$$

20. Sestrojíme-li tedy ku ploše 2. stupně a k soustředné s ní ploše kulové společnou rovinu tečnou, má každá rovina k této rovnoběžná touž potenci k oběma plochám, jelikož pro obě plochy má poměr $l : d$ touž hodnotu ε a jelikož $\Pi = d^2\,\varepsilon$.

Ptejme se nyní po geometrickém místě rovin, které mají vzhledem k centrické ploše 2. stupně stejnou potenci. Vztahujme plochu k jejím hlavním osám, takže její rovnice jest

$$H(u, v, w) = a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0. \qquad (54)$$

Vyjděme od roviny

$$U'x + V'y + W'z + 1 = 0 \qquad (55)$$

a sestrojme k ní rovnoběžnou tečnou rovinu plochy. Její rovnice bude

$$U'x + V'y + W'z + \sigma = 0, \qquad (56)$$

její souřadnice buďte u, v, w.

Jest tedy

$$U' = \sigma u,\ V' = \sigma v,\ W' = \sigma w. \qquad (57)$$

Vzdálenosti δ, ϱ počátku O od rovin (55), resp. (56) jsou dány vztahy

$$\delta^2 = \frac{1}{U'^2 + V'^2 + W'^2}, \quad \varrho^2 = \frac{\sigma^2}{U'^2 + V'^2 + W'^2},$$

takže potence Π roviny (55) vzhledem ku ploše má hodnotu

$$\Pi = \delta^2 - \varrho^2 = \frac{1 - \sigma^2}{U'^2 + V'^2 + W'^2}. \tag{58}$$

Souřadnice u, v, w splňují rovnici (54); jest tudíž se zřetelem na (57)

$$\sigma^2 = a^2 U'^2 + b^2 V'^2 + c^2 W'^2.$$

Dosaďme tuto hodnotu pro σ^2 do rovnice (58), obdržíme

$$(a^2 U'^2 + b^2 V'^2 + c^2 W'^2 - 1) + \Pi (U'^2 + V'^2 + W'^2) = 0, \tag{59}$$

kterážto rovnice charakterisuje soustavu ploch konfokálních s danou naší plochou 2. stupně.

21. Získané výsledky není možno přímo přenésti na paraboloidy, neboť pro tyto jest $A_{44} = 0$. Proto upravme tyto výsledky tak, aby skýtaly také pro paraboloidy příslušné vzorce.

Přenesme nejprve vzorec (V) na rovnoběžné souřadnice. Protíná-li opět přímka $O\,L$ rovinu P v bodě K, polární rovinu O bodu O v bodě Q, dává naše úprava vztah

$$F(u',\ v',\ w') = \frac{A}{a_{44}} (O\,L\,Q\,K). \tag{60}$$

Body O, L sestrojme rovnoběžné roviny G, H k rovině O. Značí-li U_∞ nekonečně vzdálenou rovinu, jest

$$(O\,L\,Q) = (\mathrm{G\,H\,O\,U}_\infty).$$

Protněme přímku $O\,S$ s P resp. O v bodech H resp. G. Nekonečně vzdálená přímka r_∞ roviny O jest polárou přímky $O\,S$ vzhledem ku ploše a póly rovin G, H, O, U_∞ jsou tudíž na $O\,S$ a jsou to body G, H, O, S. Jest tudíž

$$(O\,L\,Q) = (G\,H\,O\,S) = (S\,O\,H\,G) = (H\,G\,S\,O).$$

Tím přechází (60) ve výraz

$$F(u',\ v',\ w') = \frac{A}{a_{44}} (L\,O\,K)\,(H\,G\,S\,O), \tag{61}$$

kterého možno také užiti jen tehdy, neleží-li O na ploše. Vztah ten však snadno lze přenést na *paraboloidy*.

Průsečíky H, P přímek $O\,S$, $L\,S$ s rovinou P jsou zde průsečíky rovnoběžek body O resp. L vedených k ose paraboloidu a jejich spojnice jde průsečíkem K přímky $O\,L$ s rovinou P. Ježto zde jest S v nekonečnu, nabývá poslední rovnice tvaru

$$F(u',\ v',\ w') = \frac{A}{a_{44}} (L\,O\,K)\,(G\,H\,O) = \frac{A}{a_{44}} \cdot \frac{L\,P \,.\, O\,G}{O\,H^2}. \tag{62}$$

Souřadnice bodu G možno psáti ve tvaru

$$-\sigma A_{14},\ -\sigma A_{24},\ -\sigma A_{34},$$

kde σ obdržíme, dosadíme-li tyto hodnoty souřadnic do rovnice

$$a_{14}x + a_{24}y + a_3\ z + a_{44} = 0,$$

čímž dostáváme

$$\sigma = \frac{a_{44}}{A},$$

takže bod G má souřadnice

$$-\frac{a_{44}}{A}A_{14},\ -\frac{a_{44}}{A}A_{24},\ -\frac{a_{44}}{A}A_{34},$$

načež

$$OG = \frac{a_{44}}{A}\sqrt{\Phi(A_{14},\ A_{4},\ A_{34}}. \tag{63}$$

Rovnice (62) dává pak

$$F(u',\ v',\ w') = \frac{LP}{OH^2}\sqrt{\Phi\ A_{14},\ A_{24},\ A_{34})} \tag{64}$$

Pro rovinu O jest $u_0 = \frac{a_{14}}{a_{41}}$, $v_0 = \frac{a_{24}}{a_{44}}$, $w_0 = \frac{a_{34}}{a_{44}}$ a tudíž, jak i z (62) plyne

$$F(u_0,\ v_0,\ w_0) = \frac{A}{a_{44}} = \frac{\sqrt{\Phi(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}}{OG}.$$

Béřeme-li OG vždy kladně, nutno bráti $\sqrt{\Phi(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}$ kladně nebo záporně dle toho, mají-li A, a_{44} znaménka stejná nebo různá.

Obdobným postupem obdržíme

$$OH = \frac{\sqrt{\Phi(A_{14},\ A_{24},\ A_{34})}}{F_4(u',\ v',\ w')}.$$

Splyne-li rovina $(u',\ v',\ w')$ s O, jest $H \equiv G$ a ježto $F_4(u_0,\ v_0,\ w_0) = \frac{A}{a_{44}}$, vidíme z toho, že odmocnina ve výraze pro OH má totéž znamení jako v (63). Proto obdržíme z (64) rovnici

$$F(u',\ v',\ w') = \frac{LP}{OH}F_4(u',v',\ w') = \frac{LP}{\sqrt{\Phi(A_{14},A_{4},A_{34})}}F_4^2(u',v',w'), \tag{65}$$

která platí i v případě, že paraboloid prochází počátkem O.

22. Abychom mohli v (64) rozhodnouti o znaménku odmocniny tehdy, leží-li bod O na ploše, sestrojme rovinu $\bar{O}$, rovnoběžnou k tečné rovině bodu O,

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + \tau = 0$$

jejíž souřadnice $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ budou tedy $\frac{a_{14}}{\tau}$, $\frac{a_{24}}{\tau}$, $\frac{a_{34}}{\tau}$.

Jest pak, píšeme-li $\bar{H}$ místo H, ježto $a_{44} = 0$,

$$F(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{2A}{\tau}, \quad P \equiv \bar{H}, \; LP = 2\,O\bar{H}$$

a rovnice (64) dává

$$\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})} = A \cdot \frac{O\bar{H}}{\tau}.$$

Protíná-li rovina Ō osy souřadné v bodech X, Y, Z a klademe-li $O\bar{X} = \bar{x}$, $O\bar{Y} = \bar{y}$, $O\bar{Z} = \bar{z}$, plyne z rovnice této roviny, že

$$\bar{x} = -\frac{\tau}{a_{14}}, \quad \bar{y} = -\frac{\tau}{a_{24}}, \quad \bar{z} = -\frac{\tau}{a_{34}};$$

tudíž jest

$$\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})} = -\frac{A}{a_{14}} \cdot \frac{O\bar{H}}{\bar{x}} = -\frac{A}{a_{24}} \cdot \frac{O\bar{H}}{\bar{y}} = -\frac{A}{a_{34}} \cdot \frac{O\bar{H}}{\bar{z}}. \quad (64')$$

Můžeme tedy konečně místo (64) psáti rovnice

$$F(u', v', w') = -\frac{A}{a_{14}\bar{x}} \cdot \frac{LP}{O\bar{H}} = -\frac{A}{a_{24}\bar{y}} \cdot \frac{LP}{O\bar{H}} = -\frac{A}{a_{34}\bar{z}} \cdot \frac{LP}{O\bar{H}}, \quad (64'')$$

které mají vždy význam, ježto a_{14}, a_{24}, a_{34} nemohou býti současně rovny nule.

23. Vztahujeme-li paraboloid k jeho hlavním rovinám a tečné rovině vrcholové jako rovinám souřadným, možno jeho rovnici psáti

$$R(U, V, W) = -2U + mV^2 + nW^2 = 0.$$

Má-li rovina P souřadnice U', V', W', jest $R_4(U', V', W') = -U'$ tudíž vzhledem k (65), jakož i (64)

$$R(U' \; V', W') = \frac{LP \cdot U'}{HO} = \frac{LP}{HO^2}\sqrt{\Phi(A_{14}, A_2, A_{34})}$$

a ježto nyní $U' = -\frac{1}{OH}$, jest zde

$$R(U', V', W') = \frac{LP}{OH^2}, \quad (66)$$

tedy

$$\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})} = +1.$$

Konečně jest pak

$$LP = \frac{1}{U'^2} R(U', V', W').$$

24. Kdybychom označili nezávislou na soustavě souřadné délku LP jako potenci roviny P, měly by tečné roviny paraboloidu, který vzniká rovnoběžným posunutím daného o délku $\frac{1}{2} LP$, touž potenci vzhledem

k danému paraboloidu. Zavedeme však v dalším jinou délku jako potenci roviny.

Vypočtěme úhel ω, který tvoří rovina P s osou paraboloidu. Jest dle známých vzorců

$$\Omega \sin\omega = -\frac{\delta}{\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})}} \begin{vmatrix} 0, & A_{14}\omega_{11} + A_{24}\omega_{12} + A_{34}\omega_{13}, & A_{14}\omega_{21} + A_{24}\omega_{22} + A_{34}\omega_{23}, & A_{14}\omega_{31} + A_{24}\omega_{32} + A_{3}\omega_{33} \\ u', & \omega_{11}, & \omega_{12}, & \omega_{13} \\ v', & \omega_{21}, & \omega_{22}, & \omega_{23} \\ w', & \omega_{31}, & \omega_{32}, & \omega_{33} \end{vmatrix},$$

kde δ značí vzdálenost počátku O od roviny P.

Ježto hodnota tohoto determinantu jest rovna

$$(-A_{14}u' - A_{24}v' - A_{34}w')\,\Omega,$$

máme pro žádaný úhel

$$\sin\omega = \frac{\delta}{\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})}} F_4(u', v', w'),$$

a ježto

$$\delta^2 = \frac{\Omega}{\Psi(u', v', w')},$$

jest

$$\sin^2\omega = \frac{\Omega}{\Psi(u', v', w')} \cdot \frac{F_4^2(u', v', w')}{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})}.$$

Dosadíme-li z poslední rovnice plynoucí hodnotu pro $F_4^2(u', v', w')$ do druhého tvaru (65), jest

$$F(u', v', w') = \frac{\Psi(u', v', w')\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})}}{\Omega} \cdot L\,P \sin^2\omega, \qquad (67)$$

při čemž znaménko odmocniny podléhá předchozímu určení.

Jako potenci p roviny P (u', v', w') vzhledem k paraboloidu zaveďme orthogonální průmět její kolmé vzdálenosti od pólu L na osu paraboloidu.

Jest tedy

$$p = L\,P \sin^2\omega.$$

Je-li paraboloid dán rovnicí v soustavě pravoúhlé

$$R(U, V, W) = -2U + mV^2 + nW^2 = 0,$$

jest

$$R(U', V', W') = (U'^2 + V'^2 + W'^2)\,L\,P \sin^2\omega = \frac{1}{\delta^2} L\,P \sin^2\omega,$$

značí-li δ vzdálenost vrcholu paraboloidu od P.

Souřadnice rovin stejné potence p vzhledem k paraboloidu splňují tedy rovnici

$$-2U' + mV'^2 + nW'^2 - p(U'^2 + V'^2 + W'^2) = 0;$$

roviny ty obalují tedy opět plochu k dané konfokální.

IV.

25. Uveďme konečně ještě některé souvislosti s problémem normál. Uvažujme v pravoúhlých souřadnicích řez centrické plochy 2. stupně:

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

jejíž rovnice v souřadnicích rovinových tedy jest

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0, \tag{68}$$

s rovinou P

$$u_0x + v_0y + w_0z + 1 = 0. \tag{69}$$

V této rovině leží dvě normály n_1, n_2 plochy, které nechť protínají se v bodě $Q(\xi, \eta, \zeta)$; neboť možno ku ploše sestrojiti dvě tečné roviny jdoucí přímkou, vedenou pólem P roviny P kolmo k této rovině.

Souřadnice bodu P jsou

$$x_0 = -a^2u_0, \quad y_0 = -b^2v_0, \quad z_0 = -c^2w_0. \tag{70}$$

Paty Q_1, Q_2 normál n_1, n_2 leží tedy v rovině P, dále v průměrové rovině R plochy, která jest sdružena ke směru ku P kolmému a konečně na ploše samé. Jejich souřadnice jsou tedy dány rovnicemi

$$u_0x + v_0y + w_0z + 1 = 0, \tag{71}$$

$$\frac{u_0}{a^2}x + \frac{v_0}{b^2}y + \frac{w_0}{c^2}z = 0, \tag{71'}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{71''}$$

Z těchto rovnic souřadnice x, y, z bodů Q_1, Q_2 snadno mimochodem vypočítáme. Položíme-li

$$c^2(a^2 - b^2)^2u_0^2v_0^2 + a^2(b^2 - c^2)^2v_0^2w_0^2 + b^2(c^2 - a^2)^2w_0^2u_0^2 = E,$$

obdržíme

$$\frac{E}{a^2}x = -u_0[c^2(a^2 - b^2)v_0^2 + b^2(a^2 - c^2)w_0^2] \pm v_0w_0(b^2 - c^2)\sqrt{E - (b^2c^2u_0^2 + c^2a^2v_0^2 + a^2b^2w_0^2)},$$

odkud výrazy pro y a z obdržíme cyklickou záměnou.

Pro bod Q dostaneme pak

$$\frac{E^2\,\xi}{(a^2-b^2)\,(c^2-a^2)\,u_0} = u_0^2\,[c^2\,(a^2-b^2)\,v_0^2 + b^2\,(a^2-c^2)\,w_0]^2 - (b^2-c^2)^2\,v_0^2\,w_0^2\,[E - (b^2\,c^2\,u_0^2 + c^2\,a^2\,v_0^2 + a^2\,b^2\,w_0^2)]\,,$$

odkud opět cyklickou záměnou plyne η, ζ.

Dle předchozího jest

$$x = \frac{a^2\,\xi}{a^2+\lambda}\,,\quad y = \frac{b^2\,\eta}{b^2+\lambda}\,,\quad z = \frac{c^2\,\zeta}{c^2+\lambda}\,. \tag{28}$$

Zavedeme-li tyto hodnoty do rovnice (71′), obdržíme vzhledem k (71) po jednoduché úpravě, klademe-li $a^2+b^2+c^2 = 3\,l^2$, rovnici

$$\lambda^2 + (3\,l^2 + a^2\,u_0 + b^2\,v_0\,\eta + c^2\,w_0\,\zeta)\,\lambda - a^2\,b^2\,c^2\left(\frac{u_0}{a^2}\,\xi + \frac{v_0}{b^2}\,\eta + \frac{w_0}{c^2}\,\zeta\right) = 0$$

v λ kvadratickou; kořeny λ_1, λ_2 této rovnice splňují vztahy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -3\,l^2 - a^2\,u_0\,\xi - b^2\,v_0\,\eta - c^2\,w_0\,\zeta\,, \tag{72}$$

$$\lambda_1\,\lambda_2 = -a^2\,b^2\,c^2\left(\frac{u_0}{a^2}\,\xi + \frac{v_0}{b^2}\,\eta + \frac{w_0}{c^2}\,\zeta\right), \tag{73}$$

nebo, dosadíme-li souřadnice bodu P z (70) do (72),

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\,l^2 = x_0\,\xi + y_0\,\eta + z_0\,\zeta. \tag{72′}$$

Popíšeme-li tedy onu ku ploše soustřednou plochu kulovou o poloměru r, vzhledem ke které jsou body P, Q sdruženy, jest

$$r^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 3\,l^2. \tag{72″}$$

Polární rovina Q bodu Q vzhledem ku ploše má souřadnice

$$u' = -\frac{\xi}{a^2}\,,\quad v' = -\frac{\eta}{b^2}\,,\quad w' = -\frac{\zeta}{c}\,, \tag{73′}$$

takže vzhledem k tomu můžeme (73) též nahraditi rovnicí

$$\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{a^2\,b^2\,c^2} = u_0\,u' + v_0\,v' + w_0\,w'. \tag{73″}$$

Popíšeme-li tedy onu plochu kulovou poloměru ϱ, ke které jsou roviny P, Q navzájem sdruženy, jest

$$\varrho^2 = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{\lambda_1\,\lambda_2}\,. \tag{73‴}$$

Je-li tudíž P_1 orthogonální průmět bodu P na spojnici středu S plochy s bodem Q, jest

$$S\,Q\,.\,S\,P_1 = n_1\,p_1 + n_2\,p_2 + 3\,l^2, \tag{74}$$

přísluší-li n_i, p_i opět význam v předchozím vytčený. Dále soudíme z (73‴),

že protíná-li kolmice s bodu S na rovinu Q spuštěná rovinu tuto v bodě Q^* a rovinu P v bodě P^*, jest

$$S P^* \,.\, S Q^* = \frac{a^2 b^2 c^2}{n_1 p_1 \,.\, n_2 p_2} \,. \tag{75}$$

26. Uvažujme nyní všecky normály $n_1, n_2, \ldots n_6$, které jdou bodem Q k dané ploše. Spustíme-li s pólu P_{ik}' každé z rovin $(n_i n_k)$ kolmici na $S Q$ o patě P_{ik}, dává rovnice (74) nový vztah:

$$S P_{12} + S P_{13} + \ldots + S P_{15} + S P_{23} + \ldots + S P_{56} = \frac{5}{S Q} (n_1 p_1 + n_2 p_2 + \ldots . n_6 p_6 + 9 l^2) \,.$$

Ježto

$$\sum_1^6 n_i p_i = -2 (a^2 + b^2 + c^2) = -6 l^2, \tag{31}$$

plyne z poslední rovnice

$$S P_{12} + S P_{13} + \ldots + S P_{56} = \frac{5 (a^2 + b^2 + c^2)}{S Q} \,. \tag{76}$$

Protíná-li dále $S Q^*$ roviny $(n_i n_k)$ v bodech P_{ik}^*, platí vzhledem k (75)

$$S P_{12}^* \,.\, S P_{13}^* \,.\, . S P_{23}^* \,.\, . S P_{56}^* = \frac{(a\, b\, c)^{30}}{S Q^{*15} (n_1 p_1 n_2 p_2 \ldots n_6 p_6)^5}, \tag{76'}$$

z kteréžto rovnice plyne vzhledem k (32)

$$G (\xi, \eta, \zeta) = \frac{-a^2 b^2 c^2}{S Q^{*3} \sqrt[5]{S P_{12}^* \,.\, S P_{13}^* \,.\, \ldots \,.\, S P_{56}^*}} \,. \tag{77}$$

Je-li

$$f (x, y, z) = 0$$

rovnice plochy 2. stupně v obecných parallelních souřadnicích, jest, značí-li x', y', z' souřadnice bodu Q, vzhledem ku (34'), (36),

$$f (x', y', z') = -\frac{A}{B} G (\xi, \eta, \zeta), \quad -a^2 b^2 c^2 = \frac{A^3 \Omega}{B^4};$$

tudíž jest

$$f (x', y', z') = -\frac{A^4 \Omega}{B^5 \,.\, S Q^{*3} \,.\, \sqrt[5]{S P_{12}^* \,.\, S P_{13}^* \,.\, \ldots \,.\, S P_{56}^*}} \,, \tag{77'}$$

kdežto vzhledem k (36)

$$S P_{12} + S P_{13} + \ldots + S P_{56} = -\frac{5 A C}{B^2 \,.\, S Q} \,. \tag{76''}$$

Z posledních dvou rovnic soudíme, že pro všecky body Q, které mají od S stejnou vzdálenost, má součet

$$S P_{12} + S P_{13} + \ldots + S P_{56}$$

konstantní hodnotu, a že pro všecky body Q, které leží na ploše k dané koncentrické a homothetické má součin

$$SQ^{*15} \cdot SP_{12}^* \cdot SP_{13}^* \cdot \ldots \cdot SP_{56}^*$$

konstantní hodnotu.

27. Rovnicí (77′) dána jest tedy souvislost potence bodu Q ku centrické ploše 2. stupně s polohou normál z něho ku ploše jdoucích a to užitím úseček ležících na kolmici vedené středem plochy k polární rovině Q bodu. Označíme-li $\overline{Q}$ patu kolmice s bodu Q na rovinu Q a ε potenci bodu Q, jest dle (12′)

$$\varepsilon = \frac{Q\,\overline{Q}}{SQ^*} = \frac{B}{A} f(x', y', z')$$

a (77′) dává tudíž relaci

$$SQ^{*3} \sqrt[5]{SP_{12}^* \cdot SP_{13}^* \cdot \ldots \cdot SP_{56}^*} = -\frac{A^3\,\Omega}{B^4\,\varepsilon}.$$

Vzorec (37″) podává, že zde

$$n_1 p_1 \cdot n_2 p_2 \cdot \ldots n_3 p_6 = \frac{A^3\,\Omega^2}{B^8} \cdot \frac{Q\,\overline{Q}}{SQ^*}.$$

Dosaďme toto jakož i hodnoty pro a, b, c do rovnice (76′), čímž obdržíme nejprve

$$SP_{12}^* \cdot SP_{13}^* \cdot \ldots SP_{56}^* = -\frac{A^{15}\,\Omega^5}{B^{20} \cdot SQ^{*10} \cdot Q\,Q^5}.$$

Užijme dále vzorce (53) na náš případ. Jest tu

$$F(u', v', w') = -\frac{B\,\Psi(u', v', w')}{\Omega} \cdot SQ^* \cdot Q\,\overline{Q},$$

takže konečně

$$F(u', v', w') = -\frac{A^3\,\Psi(u', v', w')}{B^3 \cdot SQ^* \cdot \sqrt[5]{SP_{12}^* \cdot SP_{13}^* \ldots SP_{56}^*}}, \qquad (77'')$$

a označíme-li opět Π potenci roviny Q ku ploše, obdržíme rovnici

$$SQ^* \sqrt[5]{SP_{12}^* \cdot SP_{13}^* \cdot \ldots \cdot SP_{56}^*} = -\frac{A^3\,\Omega}{B^4\,\Pi},$$

čímž dospíváme ku analogickým souvislostem pro potenci roviny Q s polohou normál vedených ku ploše pólem Q této roviny.

Porovnáme-li konečně vzorce (12′), (53), obdržíme

$$\frac{f(x', y', z')}{F(u', v', w')} = \frac{A\,\Omega}{B^2\,\Psi(u', v', w') \cdot SQ^{*2}}$$

nebo, značí-li Q_0 patu kolmice spuštěné s počátku O na rovinu Q

$$\frac{f(x', y', z')}{F(u', v', w')} = \frac{A}{B^2} \cdot \frac{O\,Q_0^2}{SQ^{*2}},$$

jakožto poměr substitučních výsledků souřadnic bodu a jeho polární

roviny k ploše 2. stupně do levých stran jejích rovnic v souřadnicích bodových resp. rovinových.

28. Pro paraboloid

$$-2x + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0$$

přechází rovnice (71′) v rovnici

$$u_0 - v_0 \frac{y}{m} - w_0 \frac{z}{n} = 0.$$

Dosadíme-li do ní hodnoty (44)

$$y = \frac{m\eta}{m+\lambda}, \quad z = \frac{n\xi}{n+\lambda},$$

obdržíme, se zřetelem k rovnici $u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta + 1 = 0$,

$$u_0\lambda^2 + [u_0(m+n) + u_0\xi + 1]\lambda + mn\left(u_0 - \frac{v_0\eta}{m} - \frac{w_0\zeta}{n}\right) = 0.$$

Proto jest zde

$$\lambda_1 + \lambda_2 + m + n = -\xi - \frac{1}{u_0},$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{mn} = 1 - \frac{v_0}{u_0}\frac{\eta}{m} - \frac{w_0}{u_0}\frac{\zeta}{n}.$$

Pól P roviny P má souřadnice

$$x_0 = \frac{1}{u_0}, \quad y_0 = -\frac{m v_0}{u_0}, \quad z_0 = -\frac{n w_0}{u_0}$$

a polární rovina Q bodu Q má souřadnice

$$u' = \frac{1}{\xi}, \quad v' = -\frac{\eta}{m\xi}, \quad w' = -\frac{\zeta}{n\xi},$$

takže

$$\lambda_1 + \lambda_2 + m + n = -(\xi + x_0), \tag{78}$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{mn x_0\xi} = u_0u' + v_0v' + w_0w'. \tag{79}$$

Rovina P protíná osu paraboloidu v bodě T o úsečce

$$OT = -\frac{1}{u_0} = -x_0;$$

označíme-li Q' orthog. průmět bodu Q na tuto osu, jest $OQ' = \xi$, pročež

$$-(\xi + x_0) = OT - OQ' = Q'T,$$

tedy

$$Q'T = \lambda_1 + \lambda_2 + m + n. \tag{78′}$$

Uvažujme nyní normály $n_1, n_2, \ldots n_5$, vedené bodem Q k paraboloidu; průsečíky rovin $(n_i n_k)$ s osou paraboloidu buďte T_{ik} a kombi-

nujme normály po dvou všemi možnými způsoby; tím rovnice (78′) dává rovnici novou:

$$Q'T_{12} + Q'T_{13} + \ldots + Q'T_{15} + Q'T_{23} + \ldots + Q'T_{45} = 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_5) + 10(m + n).$$

Ježto

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_5 = -2(\xi + 2m + 2n), \tag{48}$$

obdržíme z poslední rovnice

$$Q'T_{12} + Q'T_{13} + \ldots + Q'T_{45} = -8\xi - 6(m + n);$$

jest tudíž součet $\Sigma Q'T_{ik}$ konstantní pro všecky body každé roviny kolmé k ose paraboloidu.

29. Analogicky k předchozímu označme zde Q^*, $P_{ik}{}^*$ patu kolmice s vrcholu S paraboloidu na rovinu Q spuštěné, resp. průsečík její s rovinou $(n_i n_k)$, při čemž označíme průsečík osy paraboloidu s touto rovinou X_{ik} a s rovinou Q pak Q_ω.

Vzorec (79) vede obdobně k předchozímu k relaci

$$\frac{m\,n \,.\, SQ_\omega \,.\, SX_{ik}}{\lambda_i \lambda_k} = SQ^* \,.\, SP_{ik}{}^*, \tag{79′}$$

ze které plyne

$$\frac{(m\,n)^{10}\, SQ_\omega{}^{10} \,.\, SX_{12} \,.\, SX_{13} \,.\, \ldots \,.\, SX_{23} \,.\, \ldots \,.\, SX_{45}}{(\lambda_1 \lambda_2 \,.\, \ldots \,.\, \lambda_5)^4} =$$

$$SQ^{*10} \,.\, SP_{12}{}^* \,.\, SP_{13}{}^* \,.\, \ldots \,.\, SP_{45}{}^*. \tag{80′}$$

Ježto

$$\lambda_1 \lambda_2 \,.\, \ldots \,\lambda_5 = -\sqrt{l_1 p_1}\,\sqrt{l_2 p_2} \,.\, \ldots \sqrt{l_5 p_5} = -2\,m^2 n^2 s,$$

jak plyne ze souvislosti rovnic (49), (49′), (50′), při čemž $s = Q_0 Q$, značí-li Q_0 v konečnu ležící průsečík paraboloidu s rovnoběžkou k ose bodem Q vedenou, plyne proto z poslední rovnice

$$\frac{SP_{12}{}^* \,.\, SP_{13}{}^* \,.\, \ldots \,.\, SP_{45}{}^*}{SX_{12} \,.\, SX_{13} \,.\, \ldots \,.\, SX_{45}} = \frac{\overline{SQ_\omega{}^{10}}}{\overline{SQ^{*10}}} \cdot \frac{m^2 n^2}{16\, s^4}. \tag{80}$$

Značí-li φ úhel, který tvoří rovina Q s osou paraboloidu a pro který $\sin\varphi = \frac{SQ^*}{SQ_\omega}$, možno poslední rovnici psáti, se zřetelem ku (50″),

$$\mathfrak{M} = \frac{SP_{12}{}^* \,.\, SP_{13}{}^* \,.\, \ldots \,.\, SP_{45}{}^*}{SX_{12} \,.\, SX_{13} \,.\, \ldots \,.\, SX_{45}} = \frac{m^2 n^2}{16\, s^4 \sin^{10}\varphi} = \frac{A^2 \Omega^2}{16\, C^4 s^4 \sin^{10}\varphi}, \tag{81}$$

a snadno ji lze uvésti v souvislost s $f(x', y', z')$, kde x', y', z' značí souřadnice bodu Q v obecné parallelní soustavě a $f(x, y, z) = 0$ značí rovnici paraboloidu v téže soustavě.

Dosadíme-li za s hodnotu z (16), máme

$$f^4(x', y', z') = \frac{A^6\,\Omega^2}{C^4\,sin^{10}\,\varphi\,\Phi^2(A_{14}, A_{24}, A_{34})} \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}}, \tag{82}$$

a dosadíme-li do (81) za

$$2\,s\,sin\,\varphi = -\,2\,Q\,Q_0\,sin\,\varphi = -\,\frac{\Pi}{sin\,\varphi},$$

kde Π značí potenci roviny Q, hodnotu

$$2\,s\,sin^2\,\varphi = \frac{-\,\Omega\,F(u', v', w')}{\Psi(u', v', w')\,\sqrt{\Phi(A_{14}, A_{24}, A_{34})}},$$

která plyne z (67), máme konečně

$$F^4(u', v', w') = \frac{A^2}{\Omega^2\,C^4\,sin^2\,\varphi} \cdot \Psi^4(u', v', w')\,\Phi^2(A_{14}, A_{24}, A_{34}) \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}}. \tag{83}$$

O jistých vlastnostech polár.

Napsal

Dr. **K. Żorawski,**
professor university v Krakově.

(Předloženo dne 27. února 1914.)

Je-li dána algebraická křivka m-tého stupně a uvažujeme-li poláry některého jednoduchého, v konečnu položeného bodu křivky vzhledem k téže křivce, pak jde každá polára tím bodem a má s křivkou společnou normálu. Účelem tohoto článku jest určiti na této normále polohy středů křivosti různých polár a řešiti analogickou otázku pro $(n-1)$-dimensionálnou algebraickou množinu m-tého stupně v n-rozměrném euklidickém prostoru. Vyšetřování v tomto obecnějším pojetí lze snadno provésti a užíti konečně na obecné analytické množiny.

1. Mějme formu m-tého stupně proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$:

$$F_m(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}).$$

Dosadíme-li do této formy na místě každé proměnné y_k součet $y_k + \varrho\, b_k$ a výsledek dle mocnin ϱ rozvineme, dostaneme výraz tvaru:

$$F_m + \frac{\varrho}{1!}\Delta_b^1 F_m + \frac{\varrho^2}{2!}\Delta_b^2 F_m + \ldots + \frac{\varrho^m}{m!}\Delta_b^m F_m,$$

kde $\Delta_b^l F_m$ značí l-násobné provedení polární operace

$$\Delta_b^1 F_m = \sum_1^{n+1} b_k \frac{\partial F_m}{\partial y_k}.$$

Myslíme-li si veličiny $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ jakožto homogenní souřadnice bodu v n-dimensionálném prostoru, představuje rovnice

$$F_m(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = 0 \qquad (1)$$

$(n-1)$-dimensionálnou algebraickou množinu m-tého stupně v tomto prostoru a rovnice

$$\Delta_b^l F_m = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-1)$$

dávají první, druhou, atd., až $(m-1)$-tou poláru bodu $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ vzhledem ku množině (1).

Veličiny

$$x_1 = \frac{y_1}{y_{n+1}}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_{n+1}}, \quad \ldots, x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}} \tag{2}$$

buďte Descartovy parallelní souřadnice. Má-li rovnice (1), uspořádána jsouc dle mocnin y_{n+1}, tvar

$$\varphi_0 y_{n+1}^m + \varphi_1 y_{n+1}^{m-1} + \varphi_2 y_{n+1}^{m-2} + \ldots + \varphi_n = 0, \tag{3}$$

jest každá funkce φ_r formou r-tého stupně vzhledem ku proměnným $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a rovnici množiny (1) v Descartových souřadnicích parallelních vyjádřenou můžeme dostati tak, že v rovnici

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m = 0$$

na místě proměnných y_k dosadíme proměnné x_k.

Předpokládejme nyní, že bod $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ jest v konečnu, t. j., že $b_{n+1} \neq 0$. Dále můžeme voliti počátek systému parallelních souřadnic v tomto bodě, t. j., lze voliti $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. Abychom nalezli rovnice polár tohoto bodu vzhledem ku množině (1), můžeme klásti $b_{n+1} = 1$ a na základě rovnice (3) vypočítati koefficienty rozvoje funkce

$$\sum_0^m \varphi_r (y_{n+1} + \varrho)^{m-r}$$

dle mocnin ϱ. Pro tuto funkci plyne však výraz

$$\sum_0^m \varrho^l \sum_0^{m-l} \binom{m-r}{l} y_{n+1}^{m-r-l} \varphi_r,$$

a pro $\Delta_b^l F_m$ dostáváme tedy formuli

$$\Delta_b^l F_m = \sum_0^{m-l} (m-r)\,(m-r-1) \ldots (m-r-l+1)\, y_{n+1}^{m-r-l} \varphi_r.$$

Pak dostáváme v Descartových parallelních souřadnicích pro poláry počátku vzhledem ku množině (1) tyto rovnice:

$$\sum_0^{m-l} (m-r)\,(m-r-1) \ldots (m-r-l+1)\, \varphi_r = 0, \quad (l = 1, 2, \ldots m-1),$$

kde ve formách φ_r jsou nahrazeny proměnné y_k proměnnými x_k. Těchto rovnic použijeme, když uvažovaný bod, t. j. počátek souřadnic, leží na množině (1) m-tého stupně. Supponujeme tedy, že $\varphi_0 = 0$ a dostáváme pro uvažované poláry rovnice:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1 + \frac{m-2}{m-1}\varphi_2 + \frac{m-3}{m-1}\varphi_3 + \ldots + \frac{1}{m-1}\varphi_{m-1} = 0,\\
&\varphi_1 + \frac{m-3}{m-1}\varphi_2 + \frac{(m-3)\,(m-4)}{(m-1)\,(m-2)}\varphi_3 + \ldots +\\
&\qquad + \frac{2}{(m-1)\,(m-2)}\varphi_{m-2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_1 + \frac{1}{m-1}\varphi_2 = 0,\\
&\varphi_1 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Všechny tyto množiny mají počátek jako společný bod s množinou m-tého stupně a za supposice, že forma φ_1 není rovna nulle identicky, mají v tomto bodě s množinou (1) společnou tečnou množinu o rovnici

$$\varphi_1 = 0.$$

Zaveďme nyní nový systém parallelních souřadnic $z_1, z_2, \ldots, z_n$, jehož počátek splývá s dřívějším počátkem a jehož množina $z_n = 0$ jest tečná množina $\varphi_1 = 0$.

Pak jedním z transformačních vztahů jest

$$\alpha\, \varphi_1 = z_n,$$

kde α jest vhodně volený a od nully různý faktor a můžeme psáti rovnice množiny (1) a polár v nových souřadnicích takto:

$$\left.\begin{aligned} &z_n = \psi_2 + \psi_1 z_n + A z_n^2 + \ldots, \\ &z_n = \frac{m-1-l}{m-1}(\psi_2 + \psi_1 z_n + A z_n^2) + \ldots, \\ &(l = 1, 2, \ldots, m-2, m-1), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

kde ψ_2 jest forma druhého stupně proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, ψ_1 forma prvního stupně těchže proměnných, A koefficient a zanedbané členy, jestliže skutečně se vyskytují, třetího a vyšších řádů vzhledem ku proměnným $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pak pro množinu (1) samu i pro poláry můžeme proměnnou z_n dle mocnin proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ v okolí počátku rozvinouti a dostaneme vzhledem ku relacím (5) mocninné řady:

$$\left.\begin{aligned} &z_n = \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \ldots, \\ &z_n = \frac{m-1-l}{m-1}\psi_2 + \psi_{3l} + \psi_{4l} + \ldots, \\ &(l = 1, 2, \ldots, m-2, m-1), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

kde ψ_2 značí dřívější formu druhého stupně a ψ_3, ψ_{3l}; ψ_4, ψ_{4l}; ... formy třetího, čtvrtého atd. stupně proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Tyto členy třetího, čtvrtého a vyšších stupňů nebudeme blíže vyšetřovati a obrátíme se k odvození těch vlastností polár, jež ze členů druhého stupně v rozvojích (6) vyplývají.

2. Budiž nejprve $n = 2$, t. j. buď množina (1) křivkou rovinnou. Naše rozvoje (6) dávají analytický průběh křivky té v okolí některého jejího bodu v konečnu, jenž není bodem mnohonásobným a může být zvolen za počátek souřadnic. Rozvoje (6) mohou býti v tomto případě psány:

$$\left.\begin{aligned} &z_2 = a_2 z_1^2 + a_3 z_1^3 + a_4 z_1^4 + \ldots, \\ &z_2 = \frac{m-1-l}{m-1} a_2 z_1^2 + a_{3l} z_1^3 + a_{4l} z_1^4 + \ldots, \\ &(l = 1, 2, \ldots, m-2, m-1), \end{aligned}\right.$$

při čemž poznamenejme, že $z_2 = 0$ jest tečna křivky v počátku a písmeno a s indexy značí koefficienty. Ježto při tomto vyjádření koefficient u z_1^2 jest úměrný křivosti křivky v počátku, přicházíme k této větě:

Na normále algebraické rovinné křivky m-tého stupně vedené libovolným, konečným, jednoduchým jejím bodem lze polohy centra křivosti křivky a center křivosti první, druhé atd. až $(m-2)$-hé poláry toho bodu počátečního vzhledem k dané křivce algebraické znázorniti řadou veličin

$$R, \frac{m-1}{m-2} R, \frac{m-1}{m-3} R, \ldots, (m-1) R, \infty,$$

jež jsou radie křivosti, jež od společného bodu křivek nutno nanésti na touž stranu normály.

Přejdeme-li k n-dimensionálnému prostoru, učiňme především poznámku, že, je-li indikatrix křivosti množiny (1) dána v počátku rovnicí

$$\psi_2 = h,$$

kde h značí vhodnou konstantu, jest charakterisována indikatrix křivosti l-té poláry v tom bodě rovnicí:

$$\frac{m-1-l}{m-1} \psi_2 = h.$$

Tyto indikatrice můžeme si mysliti položeny na společné tečné množině a dospíváme k následující větě:

Jestliže průvodiče, jež z libovolného, konečného, jednoduchého bodu algebraické $(n-1)$-dimensionálné množiny m-tého stupně v n-dimensionálném prostoru k bodům indikatrice křivosti této množiny ve jmenovaném bodě vedou, $\sqrt{\frac{m-1}{m-1-l}}$-kráte zvětšíme, obdržíme na jich konci indikatrix křivosti l-té poláry v tom bodě vzhledem ku jmenované algebraické množině m-tého stupně.

Závislost vlastností týkajících se křivosti zmíněných polár jmenovaného bodu od oněch vlastností množiny (1) v témže bodě jest tím úplně charakterisována, chceme však ještě řadu našich úvah uvésti, jimiž jmenovaná tato závislost přijde v blízkou souvislost s první větou tohoto čísla.

Protněme množiny (6) lineární množinou:

$$z_2 = z_3 = \ldots\ldots = z_{n-1} = 0.$$

Dostaneme pak řadu rovinných křivek, jichž rovnice v této rovinné množině mohou býti psány ve formě:

$$z_n = b_2 z_1^2 + b_3 z_1^3 + b_4 z_1^4 + \ldots,$$

$$z_n = \frac{m-1-l}{m-1} b_2 z_1^2 + b_{3l} z_1^3 + b_{4l} z_1^4 + \ldots,$$

$$(l = 1, 2, \ldots, m-2, m-1),$$

kde b s indexy značí koefficienty. Pro tyto rovinné křivky platí ve společném počátku zjevně ty vlastnosti, jež v dřívější větě tohoto čísla jsme vytkli.

Jestliže dále na místě souřadnic $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takové nové Descartovy parallelní souřadnice $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ s týmž počátkem zavedeme, aby rovina $z_n' = 0$ splývala s rovinou $z_n = 0$, to jest, užijeme-li transformace tvaru

$$\begin{aligned} z_k &= \lambda_{k1} z_1' + \lambda_{k2} z_2' + \ldots + \lambda_{kn} z_n', \\ &\quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ z_n &= \lambda_{nn} z_n', \end{aligned}$$

kde koefficienty λ jsou tak zvoleny, že tato změna proměnných jest transformací dvou systémů parallelních souřadnic, pak budou v novém systému rovnice množin (6) v okolí počátku dány rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned} z_n' &= \psi_2' + \psi_3' + \psi_4' + \ldots, \\ z_n' &= \frac{m-1-l}{m-1}\psi_2' + \psi_3'_l + \psi_4'_l + \ldots, \\ &\quad (l = 1, 2, \ldots, m-2, m-1), \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

kde ψ_2'; ψ_3', $\psi_3'_l$; ψ_4', $\psi_4'_l$; ... jsou formy druhého, třetího, čtvrtého, ... stupně v proměnných $z_1', z_2', \ldots, z'_{n-1}$. Protneme-li množiny (7) množinou

$$z_2' = z_3' = \ldots = z'_{n-1} = 0, \qquad (8)$$

dostaneme rovinné křivky, jež ve společném počátečním bodě opět dřívější vlastnosti křivosti mají. Povšimneme-li si však, že nový systém souřadnic může býti tak zvolen, že množina (8) jest libovolná lineární množina dvou dimensí, jež obsahuje počátek, ale v tečné množině $z_n = 0$ není obsažena, přicházíme k následující větě:

Protneme-li $(n-1)$-dimensionálnou množinu m-tého stupně v n-dimensionálném prostoru a poláry vzhledem k této množině některého libovolného, konečného, jednoduchého bodu lineární dvojdimensionální množinou, jež obsahuje zmíněný bod, ale v lineární tečné množině množiny m-tého stupně v daném bodě není obsažena, obdržíme řadu rovinných algebraických křivek, jichž radie křivosti v daném bodě na téže straně společné normály leží a mohou býti znázorněny délkami

$$R, \frac{m-1}{m-2}R, \frac{m-1}{m-3}R, \ldots, (m-1)R, \infty.$$

3. Označíme-li jako dříve ψ_k formu k-tého stupně v proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, a představují-li tyto proměnné ve spojení se z_n Descartovy parallelní souřadnice bodu v n-násobném prostoru, jest rovnicí

$$z_n = \psi_2 + \psi_3 + \ldots + \psi_m \qquad (9)$$

definována $(n-1)$-dimensionálná algebraická množina m-tého stupně, jež může býti zvána parabolickou množinou. Na základě rovnic (4) určují rovnice

$$z_n = \frac{m-2}{m-1}\psi_2 + \frac{m-3}{m-1}\psi_3 + \ldots + \frac{1}{m-1}\psi_{m-1},$$

$$z_n = \frac{m-3}{m-1}\psi_2 + \frac{(m-3)(m-4)}{(m-1)(m-2)}\psi_3 + \ldots + \frac{2\psi_{m-2}}{(m-1)(m-2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n = \frac{1}{m-1}\psi_2,$$

$$z_n = 0$$

první, druhou, atd. až $(m-1)$-ní poláru bodu $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ vzhledem ku množině (9) samotné, při čemž tyto poláry jsou rovněž buď parabolickými neb rovinnými množinami.

Budiž nyní dána analytická $(n-1)$-dimensionální množina a uvažujme některý v konečnu položený její bod, v němž má množina určitou $(n-1)$-dimensionální tečnou množinu. Zvolíme-li tento bod jako počátek souřadnic a tečnou množinu jako jednu z $(n-1)$-dimensionálních množin souřadnic, jest dána v okolí toho bodu uvažovaná množina rozvojem

$$z_n = f_2 + f_3 + \ldots + f_p + \ldots, \tag{10}$$

kde f_p jest forma p-tého stupně v proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Existuje nekonečně mnoho $(n-1)$-dimensionálních algebraických množin, jež s množinou (10) uvažovaný bod, $(n-1)$-dimensionální lineární tangenciální množinu a indikatrix křivosti v tom bodě mají společné. Jako jednoduché příklady takových množin mohou býti uvedeny parabolické množiny tvaru

$$z_n = f_2 + \psi_3 + \psi_4 + \ldots + \psi_m,$$

kde formy ψ_q pro $q > 2$ nemusí nutně býti rovny formám f_q. Uvažujeme-li $(n-1)$-dimensionální algebraickou množinu m-tého stupně, jež jest zmíněného druhu vzhledem ku množině (10) a uvážíme-li poláry, jež náležejí danému bodu vzhledem ku zmíněné algebraické množině m-tého stupně, přicházíme k této větě:

Jestliže radie vektory, jež z libovolného, konečného, regulárního a jednoduchého bodu analytické $(n-1)$-násobné množiny v n-dimensionálném prostoru k bodům indikatrice křivosti této množiny ve jmenovaném bodě vedou, $\sqrt{\frac{m-1}{m-1-l}}$-kráte zvětšíme, obdržíme na jich konci indikatrix křivosti l-té poláry v tom bodě vzhledem ku algebraické, $(n-1)$-násobné množině m-tého stupně, jež daný bod, $(n-1)$-násobnou lineární tečnou množinu a indikatrix křivosti v tom bodě s danou analytickou množinou má společné.

Lze poznamenati, že v této větě vhodnou volbou čísel l a m pod odmocninou se nalézající číslo může býti libovolným positivním racionálním číslem, jež jest větší než 1.

Poslední věta může býti analogicky úvahám čísla 2 též uvedena na jinou formu. O tom se zde dále nešíříme.

O formách kvádrových pískovců v Čechách.

Podává

Dr. Vladimír J. Novák.

Předloženo dne 30. ledna 1914.

Pískovce křídového věku v severovýchodních Čechách, označované jako *kvádrové*, vystupují v některých formách, jakých u jiných hornin v našich krajinách neshledáváme. Proto poutaly již dávno pozornost nejen geologů, nýbrž i zeměpisců. Zvláště o geomorfologii *Saského Švýcarska* a pískovcových oblastí na *Broumovsku* a v sousedním *Kladsku* jednají obšírné a důležité práce (Gutbier, Hettner, *a* a *b*, Obst, *a*). Avšak o partiích v nitru Čech, zejména o nejrozsáhlejší z nich *mezi Jičínem a Turnovem*, jež jsouc sice menších rozměrů než Saské Švýcarsko, je přece právě tak zajímavá jako malebná („Český ráj"), dosud nebylo uveřejněno pojednání, které by bylo v první řadě věnováno stránce morfologické Proto na podnět p. prof. Dra Daneše zabýval jsem se v letě r. 1913 studiem této oblasti, potom kratší návštěvy věnoval oblasti Broumovské a Saskému Švýcarsku, abych mohl zjistiti, *jak daleko jde podobnost mezi formami v těchto třech končinách.* Zvláštní pozornost jsem věnoval momentům, *jež by mohly přispěti k rozřešení dosud sporných otázek, týkajících se vzniku těchto forem.*

I. Orografie kvádrových oblastí.

1. V oblasti *Jičínsko-Turnovské* je převahou z kvádrových pískovců složeno několik dosti rozsáhlých vyvýšenin, kdežto v údolích, která tyto vyvýšeniny oddělují, většinou jest odhalena *opuka*, tvořící podloží těchto pískovců. Místy se jeví i nad pískovcem nebo uprostřed něho slínitá neb jílovitá souvrství značnější mocnosti.

Můžeme zde rozeznávati tyto dobře individualisované vyvýšeniny pískovcové: 1. Partie na s. od údolí Libuňky, kterou Kořistka (s. 75)

nazývá *Sokolské hory*, Zahálka (s. 78) méně případně *Turnovské skály*. Na j. od Libuňky pne se 2. *Hruboskalská vysočina* až k těsnému údolí potoka Žehrovky. Na jv. následuje méně rozsáhlá vyvýšenina, korunovaná štíhlými jehlany *Trosek*, již chceme se Zahálkou nazývati 3. *Troskovicko*. Ještě dále v tomto směru následují 4. *Prachovské skály*, na jz. od Hruboskalské vysočiny pak 5. *Žehrovský les* s kuželem *Mužské Hůry*. Pískovec vyvýšenin ještě dále k j. vystupujících, *Velišského hřbetu*, *Markvartické* a *Chlomecké vysočiny*, je prostoupen četnými a silnými vrstvami slínu. V nich nedochází k vývoji forem, pro kvádrové oblasti charakteristických.

Pozorujeme-li některou z vyvýšenin dříve vypočítaných z větší vzdálenosti, zdá se nám, že tvoří *plošinu*, obyčejně v některém směru *mírně skloněnou*. Na okrajích však spadají tyto plošiny poměrně příkře, někdy též ve stupních ku podloze ohraničujících je údolí. Zvláště případné se mně zdá srovnání takových vypnulin *s víky rakví*. Když však přicházíme blíže, vidíme, že tyto plošiny jsou rozbrázděny četnými, více méně hlubokými *roklemi*, které jsou poměrně *úzké* a mají *příkré stěny*. Těmito roklemi jsou vyvýšeniny roztrhány na mnoho malých částí. Tak v Prachovských skalách na jz. nacházíme plochý hřbet ve výši asi 440 *m*. Na s. odtud jsou menší plošiny *Na Vodách* a *Hrádek*, asi 430 *m*. Ještě dále v tomto směru, za Pařezskou Lhotou, vypíná se táhlé návrší něco málo nad 400 *m*. Proto díváme-li se na Prachovské skály od z., vidíme v nich plošinu k s. skloněnou. Troskovicko jest okrouhlá vysočina se sráznými okraji, ale na povrchu jen mírně se zvedající k úpatí vlastních Trosek; rokle běží většinou od okraje paprskovitě ke středu, ale nesahají daleko. Sokolské hory jsou plošinou, k s. a v. zdviženou. Na j. mají 320—360 *m* výše, na s. ve vrchu Sokolu dosahují 559 *m*. Hruboskalská vysočina má na s. 390—400, na j. 340—350 *m*, uprostřed, na s. od zámku Hrubé skály však 424. Plošina Žehrovského lesa si zachovává v celku od v. k z. stejnou výšku, 350—360 *m*.

Tu a tam je pravidelnost těchto plošin přerušena návršími podoby *kuželovité* nebo *kupovité*. Takovým návrším je *Mužská Hůra*, pnoucí se do výše 462 *m* (70—90 *m* nad pískovcovou plošinou Žehrovského lesa), ve Hruboskalské vysočině *Vyskeř*, 465 *m* (asi 60 *m* nad okolní plošinou), pak malé, pouze asi 5 a 10 *m* nad jihozápadní hřbet Prachovských skal vynikající kužely *Malé* a *Velké Svinčice* (452 *m* absolutní výše). Tato návrší, podobně jako *Trosky* (vrchol vyššího z obou jehlanů, Panny, 514 *m*), jsou vzhledem k pískovci úplně cizorodá, jsouce složena z čediče.

Budiž ještě uvedeno několik cót, označujících výšku podlohy ve hlavních údolích. Údolí *Jizery*, které lze zhruba označiti jako západní hranici naší oblasti (z význačných partií pískovcových jen t. zv. Drábovna, naproti Sokolu, leží na západním, pravém jejím břehu) se sklání ze 261 *m* na s., u Malé Skály, na 211 pod Mnichovým Hradištěm. Údolí *Václavky* ze 330 u vsi Václavi na 270 při vtoku do *Libuňky*. Tato se spojuje s Jizerou ve výši 244 *m*. *Žehrovka* má u Mladějova, kde vstupuje do kvádrové oblasti

(jižní výběžky Troskovicka), asi 275 *m* výše, při ústí do Jizery 228. Široká *Vokšická dolina*, oddělující Prachovské skály od Velišského hřbetu, leží na j. od Svinčice ve výši 285 *m*, na východním konci, kde ústí do úvalu Cidliny, asi 260. Vidíme z toho, že relativní výšky pískovcových vyvýšenin, i s čedičovými homolemi na nich nasazenými, nejsou veliké. Největší, asi 300 *m*, je na s. (Sokol), uprostřed činí 200—250 (Mužský, Trosky), na j. méně než 200 (Přivišín, na v. od vlastních Prachovských skal). Třeba tedy naši oblast označiti jako *pahorkatinu*.

Uložení pískovcových a slinitých *vrstev* zdejších s výjimkou Sokolských hor neliší se znatelně od vodorovného. Jsou sice též místní odchylky zvláštního rázu, ale o těch promluvíme později. Tu a tam možno pozorovati vržení, většinou menších rozměrů.

Mocnost čistě pískovcových souvrství činí podle Zahálky (s. 150) pod Mužskou Hůrou, Vyskří a u Valdštejna asi 90 *m*, u Hrubé Skály a Sokola asi 120. Podobně v Prachovských skalách, na jz. u Svinčice, kde je pískovcové souvrství nejlépe zachováno, odhaduji mocnost jeho na 120 až 130 *m*. *Plošný rozsah* kvádrových partií zdejších činí asi 200 km^2.

Pískovce a s nimi souvisící slíny této oblasti byly všemi geology, kteří se jejich studiem zabývali, pokládány za *nejvyšší* a tedy *nejmladší obzor české křídy*. Krejčí (s. 45) a Frič (*a*) je označují jako *Chlomecké pískovce*. Bývají nyní parallelisovány s oddílem *Emscher* svrchní křídy (mezi turonem a senonem; Sturm, s. 41, 47—52).

2. V oblasti *Broumovsko-Kladské* zaujímají kvádrové pískovce střed ploché synklinaly, tvořené vrstvami kamenouhelnými, permskými a křídovými. Na z. od míst *Adersbachu* a *Teplic* (Wekelsdorfu) tvoří vyvýšeninu elliptického půdorysu, jejíž stěny se příkře zvedají nad mírně zvlněnou oblast opuky. Vyvýšenina tato je prorvána přečetnými roklemi, na okrajích pak místy úplně rozkouskována na tisíce věžovitých nebo pilířovitých skal. To jsou světoznámá *„skalní města“*, nazvaná podle sousedních, výše jmenovaných míst. Nejvyšší, na j. strmící vrchol této vyvýšeniny, *Storchberg*, dosahuje 784 *m*, kdežto podloha údolí *Metuje*, jež ji na v. obtéká, sestupuje asi s 500 (u vchodu do Adrsbašských skal) na 464 *m* (u nádraží Teplického); je tedy relativní výška této vyvýšeniny skoro stejná jako u Sokolských hor. Na v. i na j. od ní pnou se menší isolované vyvýšeniny (Holstenberg, Ostaš a j. v.), též silně rozčleněné, jejichž vrchní část je z kvádrového pískovce, spodek však z opuky, ač zakryt sřícenými balvany pískovcovými (*Flegel*, s. 126). Z kvádrů se skládá dále úzký hřbet na v. odtud, *Polické stěny* (Kořistka, s. 105) neboli *Falkengebirge*. Na slemeni tohoto hřbetu a v údolích na povlovnějším jihozápadním svahu (Kovářova rokle a Pánova cesta), setkáváme se s týmiž formami jako ve „skalních městech“. Na mohutné plošině *Hejšoviny*, již na půdě Kladské, je nižší a vyšší souvrství pískovce, jež jsou oddělena od sebe opukou o značné mocnosti. Vyšší kvádr tvoří vlastní *Velkou a Malou Hejšovinu* (919 a 896 *m*), vynikající velmi sráznými stěnami, kdežto

téměř jejich je ploché, tak že mají typický tvar *stolových hor*;[1]) i do nich však jsou místy zaryty hluboké rokle. Z kvádru je konečně ve své svrchní části složen též na z. od Hejšoviny se pnoucí, víku rakve podobný *Bor* (německy Spiegelberg). V severozápadní části jeho hřbetu nachází se bludiště chodeb, zvané „Wilde Löcher".

Mocnost pískovce ve skalách Adrsbašsko-Teplických činí jistě aspoň 150 *m*, na Hejšovině u spodního obzoru 60—80, u svrchního skoro 100. *Rozlohu* kvádrové oblasti při značném rozkouskování není snadno určiti, ale myslím, že nečiní více než 60 *km*^{2}.

Spodní kvádr na Hejšovině a ve skalách Adrsbašsko-Teplických je o něco starší než Chlomecký, totiž *středoturonského věku*; svrchní Hejšovinský pravděpodobně náleží *Emscheru*, jako Chlomecký.

3. V *Saském Švýcarsku* pískovec tvoří rozsáhlou plošinu rozbrázděnou roklemi („Gründe") řek a potoků. Místy se nad tuto plošinu zvedají příkrými stěnami vyvýšeniny, většinou nepříliš rozsáhlé („Steine"). Některé mají podobu stolových hor (Königstein, Lilienstein), jiné více rozkouskované připomínají v miniatuře velehorské štíty a turně (Schrammsteine). Na levém břehu labském jsou tyto vyvýšeniny isolovány, na pravém mezi Žandavou a Jetřichovicemi splývají v jednotný pás. Nejmohutnější vyvýšenina celé oblasti je *Vysoký Sněžník*, 721 *m*.

Mocnost pískovce obnáší podle Hettnera místy nejméně 300 *m*, *rozloha* asi 450 *km*^{2}; hlavní souvrství jeho je věku *středoturonského*.

II. Složení a vznik kvádrového pískovce.

Kvádrové pískovce ze všech tří popsaných oblastí jsou si až na malé výjimky tak podobné, že vzorky jejich nelze rozeznati.[2]) Skládají se většinou *z drobných zrn křemitých* s malým množstvím *kaolinického*, neb méně čistého *jílovitého tmelu*. Zrnka křemene, z nichž zvláště větší bývají zaoblena, menší, o průměru 0·1—0·3 *mm* obyčejně ostrohranná, nejčastěji nepřesahují velikostí zrnka máku, řídčeji, ač aspoň v oblasti Jičínsko-Turnovské ne zrovna vzácně, vyskytují se též zrna velká asi jako hrách. Zahálka uvádí (s. 128, 132 a 147), že na s. jejím přicházejí na dvou místech též oblásky velké jako lískový ořech; sám jsem dosud těchto hrubých pískovců neviděl. Křemen zrn je nejčastěji bezbarvý, řídčeji našedivělý neb načervenalý. Příznačné zbarvení pískovců pochází však většinou od tmelu. Je-li čistěji kaolinický, dotyčný kus horniny nabývá barvy bílé. Téže barvy dodává pískovci tmel vápnitý a křemitý, které se však vyskytují zřídka. Kde je ke tmelu přimíšen limonit, barva je nažloutlá neb světle hnědá; tyto dva odstíny vídáme u kvádrů nejčastěji. Kysličník železitý ko-

[1]) Partsch (s. 72) nazývá Hejšovinu „nejčistší stolovou horou celého Německa".

[2]) Velmi podobné jsou jim z části též pískovce *cenomanské*.

nečně barví pískovec na růžovo neb na červeno, což však není zjevem příliš hojným. Složení tmelu a s ním i barva střídají se velmi nepravidelně a často na nepatrné vzdálenosti, i na kouscích jako pěst velkých vídáme nezřídka střídání pruhů tmavších a světlejších. Tyto barvy však pozorujeme z pravidla jen na čerstvém lomu. Kde povrch pískovce po řadu let byl vystaven ovzduší, mívá barvu našedivělou, které mu dodává tenká pokrývka nízkých organismů rostlinných, jež se usídlily mezi jednotlivými zrnky křemene.[1])

Kvádrový pískovec je většinou tak *měkký*, že i čerstvé, nezvětralé kusy této horniny rozpadají se pod prvním úderem kladiva v písek. Jen výjimečně je dosti tvrdý, aby bylo lze ho užíti ke stavbám neb sochařským pracem.

Příčinu toho sluší hledati *ve způsobu stmelení křemenných zrn*. To je zpravidla tak *volné*, že bez jakékoli námahy, dokonce i nehty můžeme jednotlivá zrna odškrábati. I makroskopicky můžeme rozeznati četné i menší prázdné prostory („pory") mezi zrny. Jinak již vypadá věc tam, kde tmel obsahuje mnoho *železa*. Tu bývají zrna křemene mnohem lépe stmelena a vznikají tak tvrdší partie uprostřed měkčího okolí. Někdy mají podobu *hlíz*, jindy tvoří *vrstvičky*, buď s vrstvami pískovcovými rovnoběžné, anebo vlnitě zprohýbané; obyčejně se tyto konkréce svou tmavohnědou, až černou barvou odrážejí zřetelně od ostatního pískovce. Tloušťka jejich činí zpravidla 2—5 *cm*. Častěji vídáme několik takových vrstviček nad sebou. V Saském Švýcarsku pod Schrammsteinem jsem viděl na části stěny asi 2 *m* vysoké neméně než 20 takových vrstviček.

V lomech, kde pískovec není odkryt do přílišné hloubky, často není znáti nijakého zvrstvení. Ve větších vídáme, že tvoří zpravidla vrstvy velmi silné, 2 *m* i více, a následkem toho malé lomy někdy odkrývají pouze jednu vrstvu jeho. Na ovětralých stěnách skalních však bývá vrstevnatost velmi zřetelná a vrstvy obyčejně jen 0·1—0·2 *m* silné. Často pozorujeme též, že se mezery vrstevní na venek nálevkovitě rozšiřují a čela vrstev mezi nimi bývají zaoblena („sklad suken"). Všecky zjevy tohoto druhu se vyskytují i u jiných pískovců.

Kdežto skutečný sklon vrstev pískovcových ve větší části oblasti Jičínsko-Turnovské je tak *nepatrný*, že pouze srovnáním nadmořské výše jeho podlohy ve vzdálenějších profilech lze zjistiti jeho existenci, vidíme tu a tam *nepravidelné zvrstvení*; vrstvy bývají místy skloněny 15° i více a někdy vidíme různý sklon jich i v témže profilu.

Všecky vlastnosti našich pískovců ukazují, že vznikly *usazením ve mělkém moři*, do něhož někde u Vranova ústila značnější řeka. Již Forchhammer pozoroval, jakým způsobem vzniká v obdobných usazeninách,

[1]) Kaolin v pískovcích obsažený zadržuje na nich se usazující prach, a následkem toho původně bílé pískovce z lomu vynesené brzo nabývají tmavší barvy. Sr. Hirschwald, s. 313 a násl.

v přítomnosti se tvořících, nepravidelné zvrstvení; jak dále povstává hojné střídání vrstviček jílu s vrstvami písku a že, když v pozdější době jsou tyto vrstvy vystaveny silám ovzduší, vrstvičky jílu se vyplavují a vyniká jemnější vrstevnatost. Vznik popsaných konkrécí železitých třeba přičítati prosakující vodě, jež usadila místy v mezerách pískovce železité hydroxydy, jež ponejvíce asi dříve rozpustila a odnesla z větrajícího čediče (Graber).

Všimněme si nyní jiného zjevu, jenž zavdal podnět ku *pojmenování* kvádrových pískovců. Jsou totiž prostoupeny *dvěma soustavami svislých mezer*, které stojí navzájem skoro v kolmém směru. Ve spojení s vodorovnými mezerami vrstevními působí, že se pískovec rozpadá v kusy, jež lze zhruba označiti jako *rovnoběžnostěny*. A ježto je zvykem rovnoběžnostěny z kamene vytesané nazývati *kvádry*, přešlo toto jméno na naše pískovce. Každý, kdo jen poněkud je obeznámen s průběhem sedimentace ve vodách, uzná vznik těchto svislých mezer za zjev *druhotný*. Na druhé straně je jisto, že nevznikly jen *větráním*, neboť se vyskytují i v lomech na skalách čerstvě odkrytých, a tedy nezvětralých, ač ne jako otevřené, široké trhliny, nýbrž jen jako úzké rýhy nebo místa menší soudržnosti. Již delší dobu převládá o jejich vzniku mínění, poprve Daubréem vyslovené a též experimentálně odůvodněné (s. 251), že vznik jejich je v souvislosti s *horotvornými zjevy*, jak dokazuje souhlas jejich směru s *tektonickými čarami* oblastí, v nichž se vyskytují. Vznikly pravděpodobně nepravidelnými pohyby klesajících ker vrstevních, jež při tom jako by byly bývaly krouceny (tamtéž s. 236—40 a 266). I v oblasti Jičínsko-Turnovské jeví se jejich rovnoběžnost s tektonickými čarami význačným způsobem. Z měření na mnoha místech konaného jsem shledal, že jeden systém tamějších svislých puklin, jenž je v celku lépe patrný, jde směrem S 50—65° Z (hora 20—21), druhý, méně zřetelný, S 45—50° V (h. 3). Nejbližší velká dislokace, naznačená hranicí mezi permským a křídovým útvarem, *Železnická flexura*, má mezi Rovenskem a Železnicí směr asi S 60° Z.

III. Větrání kvádrových piskovců.

Účinky větrání *chemického* a *mechanického* u kvádrových pískovců jsou *quantitativně velmi rozdílné*. Větrání *chemické* je porušuje tak nepatrně, že ani během geologických dob nepadá činnost jeho příliš na váhu. Křemen a jil jsou totiž ve vodě nerozpustné, i když tato obsahuje kyslíčník uhličitý. Silněji působí chemické větrání toliko na některé *akcessorické součástky* kvádrových pískovců. Důkazem toho je, že voda ze skulin pískovce na den prosakující obsahuje stopy kyselin, zejména sírové, a na chráněných místech vytváří krystallky sádrovce a kamence (Beyer). Poněvadž však zmíněné akcessorické součástky jsou obsaženy ve tmelu kvádrového pískovce jen ve velmi malém množství, nemůžeme mysleti, že by odnášení jich mělo znatelnější účinek na rozpadávání pískovce. Za

to není v té příčině bez významu na povrchu skal se usazující sádrovec a kamenec, avšak k tomu se vrátíme později.

Naproti tomu zřetelné jsou účinky větrání *mechanického*. Z jeho mnohonásobných činitelů můžeme uvésti v první řadě *mráz*.[1]) Mrznoucí voda v pórech, zvláště jemnějších, se roztahuje, tím zmenšuje soudržnost horniny a udrobuje zrnka z ní (Hirschwald, s. 394). Ale současně účinkuje týž faktor stejným způsobem v měřítku mnohem větším, zvětšuje starší trhliny a utrhuje tak někdy i velké balvany ze skály. Méně vydatný, jako v našich krajinách vůbec, je *účinek střídání teploty*.

Pozornosti zasluhuje dále *mechanické působení dešťové vody*, jež dopadá na pískovcové skály. Působí nejen na *povrchu*, nýbrž též *v nitru* jich, neboť se z velké části ztrácí v pórech horniny. Podle Hirschwaldových pokusů (s. 216 a 218), které ovšem nevyhovují zcela podmínkám v přírodě, kvádr se Saského Švýcarska může pojmouti do pórů množství vody, jež činí asi 8% jeho váhy, kdežto žula 0·4—0·6, hlinité břidlice 0·4—1·0%. Jen při velkých lijácích vídáme prouditi vodu též na povrchu pískovcových plošin. Velmi brzo po dešti mizí všecka v pórech pískovce nebo v písku, který pokrývá v kvádrových oblastech značné prostory, třeba obyčejně osazen rostlinstvem. Proto pískovcové oblasti jsou svým suchem pověstné. Dráhy v nitru pískovce, jimiž se takto vssátá voda bere, liší se ovšem značně od sítě trhlin, které nacházíme ve vápenci, jak lze při vlastnostech pískovce předem očekávati a prohlídka umělých zářezů snadno dotvrdí. Není tu podzemních dutin se silnými toky vodními, s jakými se setkáváme v krasových oblastech. Voda se táhne úzkými průlinami nad podlohou pískovce, sledujíc její sklon, zcela tak, jako proudy spodní vody v písčitých neb štěrkových nánosech řek, tvořic podobnou „hladinu". Kde přijde vsáklá voda na neprostupná, jílovitá neb slinitá mezivrství, odtéká po nich ven. Avšak při tom vyplavuje částečky tohoto mezivrství, podobně jako u jílovitého tmelu. Bylo již řečeno (s. 6.), že během času se takto vyplavují celá jílovitá mezivrství, a voda potom prosakuje hlouběji. Silnější prameny se vyskytují nevysoko nad neprostupnou podlohou pískovců na okrajních svazích, nebo ve hlubších zářezech údolních, zkrátka tam, kde hladina spodní vody vychází na povrch zemský. V oblasti Jičínsko-Turnovské obyčejně slíny neb čediče pod pískovcem ležící zavdávají podnět ke tvoření pramenů. Často pak vidíme, jak voda nad takovouto neprostupnou podlohou prosakuje ne v jednom prameni, nýbrž na všech stranách, jako ze stlačené mycí houby.

Ať se táhne nitrem, neb oplachuje povrch pískovcových skal, voda vyplavuje jílovitý tmel a tím uvolňuje zrnka křemene. Budeme míti níže příležitost poukázati na důkaz, že na povrchu není tato činnost příliš intensivní, ale tu a tam se jeví její účinky přece. Na Kladském Boru, jakož

[1]) Bohužel nebylo mně dosud možno navštíviti některou kvádrovou oblast v zimě a tak přímo pozorovati účinky mrazu.

i na několika místech v Saském Švýcarsku jsem viděl na plochých skalách podlouhlé, zaoblené výstupky na způsob žeber, 5—15 *cm* vysoké. Připomínaly mně *škrapy* vápencových oblastí.[1]) Na rozdíl od nich však nevznikly chemickou činností dešťové vody, nýbrž mechanickou, vyplavováním tmelu. Pravděpodobně již Gutbier připadl na správný výklad, že jednotlivá hrubší zrnka křemene dala první podnět ke vzniku těchto malých vyvýšenin. Vedle tohoto účinku dešťová voda stékající po stěnách pískovcových skal jistě též napomáhá v udrobování jednotlivých zrn.

Všimněme si ještě, jakou měrou *vegetace* přispívá k rozrušování pískovce. Průkopníky jejími jsou nízké organismy, které se usídlují na povrchu skalním. Zanechávajíce po svém odumření látky uhlíkaté a dusíkaté umožňují existenci vyšších rostlin. Kořeny stromů, které rostou na pískovcových plošinách, vnikají do trhlin horniny a rostouce vyplňují je úplně, ano někdy i skálu roztrhnou.

Všecky tyto druhy mechanického větrání *trhají a drobí* skály pískovcové, ale *trhliny jsou vždy ve tmelu*, nikdy nerozpolťují zrnek křemene. Mohou vésti tak daleko, že se *pískovec zase rozdrobí v zrnka*, jichž stmelením povstal. Zmínili jsme se již, že písek takto vzniklý leckde ve kvádrových oblastech nacházíme, ač mnoho ho jistě voda hned po vzniku pryč odplaví. Obyčejně se však brzy pokryje rostlinstvem; v prachu, který se vyskytuje mezi křemitými zrnky (ta sama o sobě jsou ovšem sterilní), nízké organismy rostlinné nacházejí životní podmínky a podobně jako na skalách připravují cestu travinám, jejichž kořeny písek poněkud upevňují a brání jeho odnášení větrem a aspoň částečně též dešťovou vodou. Sterilní, volně ležící písek jsem viděl jen na několika místech, a vždy jen v nevelkém množství, v Teplických skalách a v Saském Švýcarsku. Leží tu na úpatí skal, na jejichž stěnách se patrně udrobil a sesypal dolů. Pozoruhodno je, že skalní stěny nad takovými hromadami písku trčící nemají obvyklé našedivělé barvy zvětralých kvádrů, nýbrž jsou žluté, jako pískovec na čerstvém lomu. Patrně na drolící se skále nemohou se uchytiti ani nízké organismy rostlinné, které dodávají jiným skalám onoho šedého zbarvení.

Vidíme z toho druhou důležitou činnost rostlinstva v oblastech kvádrových: *Spolu s pískem*, kořeny pohromadě drženým, *chrání horninu před dalším větráním mechanickým*. Zvětralá pokrývka, v níž rostliny mají kořeny, *humus*, však bývá na skalách kvádrových tenká, mnohem tenčí než na př. u opuky. Kde není písku odjinud sesutého nebo splaveného, nýbrž kde je pouze *eluvialní*, nemívá větší mocnosti než 20—25 *cm*. Jako v eluvialní pokrývce jiných hornin, i v tomto písku nacházíme často ještě kompaktní úlomky pískovce, které však následkem menší pevnosti této horniny nejsou ostrohranné, nýbrž zaokrouhlené jako oblásky. Po-

[1]) Teprve později jsem zvěděl, že totéž srovnání učinil již Gutbier (58—60).

dobné úlomky, často velkých rozměrů (jako lidská hlava), nacházíme též v hojnosti na pískovcových plošinách a mírněji skloněných stráních.[1])

Poněvadž mělká půda na pískovcích je suchá a obsahuje málo látek, bývá tu jen chudé rostlinstvo. Les pokrývá zpravidla větší část pískovcových oblastí. Na *plošinách* ještě nejlépe se daří skromné *borovici*, kdežto na vlhčích stráních *roklí*, pokud nejsou příliš příkré, vídáme rusti *smrky*, k nimž je tu a tam přimísen nějaký *buk*. Často můžeme pozorovati stromy, které přímo jako na skále přilepené hledají svými kořeny trhlinu, kde by se mohly zachytiti a trochu výživných látek načerpati (tab. II., 1.). Při kácení stromů je třeba míti pozor, aby se mělký humus nevytrhl s kořeny, neboť jinak bývá opětné vysazování stromků obtížné. Z polních plodin lze v těchto půdách s úspěchem pěstovati jen oves a brambory.

V celku třeba ochranu, již rostlinstvo kvádrovým skalám poskytuje, *pokládati za velmi vydatnou*. Kdyby ho nebylo, voda a vítr by rychle odstraňovaly všechen písek větráním vznikající a vydávaly útokům ovzduší nové a nové plochy; zmenšování pískovcových plošin by jistě pokračovalo mnohem rychleji než nyní.

Několikrát se mně naskytla příležitost aspoň zhruba odhadnouti, jak rychle pokračuje denudace na pískovcových skalách. V Prachovských skalách jsem viděl mnoho jmen a dat, vyškrábaných turisty na stěnách skalních neb porůzno ležících balvanech. Ježto zřejmě ukazují, že byly jen na rychlo nějakým primitivním nástrojem vyškrábány, můžeme s jistotou souditi, že byly jen mělce zařízнuty, jistě ne více než 1 *cm*, a přece jsou čitelné ještě po 27 letech. Ve „skalním předměstí" Adrsbašském je na skalních stěnách mnoho nápisů barvou malovaných, většinou ještě dobře znatelných; obsahují jména turistů s daty z let 70. a 80. Přesvědčil jsem se, že barva neproniká hlouběji než asi na 1 *cm* do pórů horniny, a proto soudím, že v obou případech byla v době 30—40 let denudována na stěnách kvádrových vrstva nejvýše asi 0·5 *cm* silná. V Adrsbašských skalách jsou dále pamětní nápisy, týkající se upravení cest v nich z let 20. a 40. minulého století, vyryté do pískovcových tabulek, jež jsou ještě dobře zachovalé. Podobné nápisy bývají vryty 2, nejvýše 3 *cm* hluboko a tak lze vrstvu, odnesenou v 70—90 letech sotva odhadnouti výše než 1 *cm*. Ale z desky, připomínající příhodu dvou Angličanů r. 1772, již nápis zmizel.[2]) Všecky tyto nálezy zdají se souhlasně nasvědčovati,

---

[1]) Někdy bývají takové úlomky neb ještě větší balvany též svaleny neb splaveny níže, na výchoz vrstvy jiné povahy. V oblasti Jičínsko-Turnovské, jak výše řečeno, se pod nebo mezi pískovcem vyskytují zejména vrstvy slínové, a je potřeba často napjaté pozornosti, abychom zjistili, kde přestává pískovec a začíná slín. To tím spíše, že slíny, větrajíce též chemicky, bývají pokryty silnou vrstvou hlíny a nehodíce se k technickým účelům, nejsou téměř nikdy v lomech otevřeny. Velmi často jsme odkázáni na nepatrné odkrytí jich v malých příkopech, nebo na indicie, jako je přítomnost pramenů a rybníků, eluviální hlíny atd.

[2]) Tato deska je na rozdíl od dříve uvedených šikmo nakloněna a proto zejména působení deště více vydána, než výše uvedené nápisy na stěnách skoro svislých. — Ve

že průměrně na stěnách, jichž polcha se blíží svislé, *bývá denudována vrstva 1 cm silná v 80—90 letech*; pravděpodobně exposice k různým stranám světovým modifikuje poněkud tuto hodnotu. Bohužel, neznám podobných dat o jiných horninách (u nichž asi namnoze je denudace méně rovnoměrná) vyjímajíc pestrý pískovec v Rýnské Falci, u kterého H ä b e r l e stanovil ústup stěn o 10 *cm* v době 220—230 let, (*a*, s. 176), tedy asi čtyřikrát tak velký jako u kvádrového pískovce.[1]) V celku nemyslím, že by denudace kvádrových pískovců byla ve srovnání s jinými horninami *tak nepoměrně veliká*, jak soudil F r i č (*a*, s. 5), ale s druhé strany též ne tak minimální, jak se domnívá O b s t (*a*, 161). Zdá se mně, že správně asi vystihuje stav věci Z a h á l k a, když prohlašuje, že *pískovce vzdorovaly denudaci více, než* sousední *vrstvy slinité* (s. 149).

Při té příležitosti chci se též dotknouti myšlenky, u nás častěji opakované, o ochraně, kterou *čediče* poskytují pískovcům. Dovedu si mysleti jen dvojí způsob této ochrany: *Pokrytí proudy nebo příkrovy lávovými* nebo *ztužení na kontaktu*. V oblasti Jičínsko-Turnovské nenacházíme nikde ani proudů ani příkrovů lávových. Kdyby byly pokrývaly a tím chránily celé vyvýšeniny pískovcové, není myslitelno, že by byly později beze stopy zmizely. Ještě menší vliv vykonával čedič ztužením okolní horniny na kontaktu. Tu a onde v bezprostřední blízkosti sice proměnil pískovec, ale tato proměna nesahá dále od čediče než asi na 1 *m* a nepřispěla též ke ztvrdnutí pískovce. Jinde zase prorážejí žíly z jednotlivých čedičových center vybíhající opuku a pískovec, ale nikde nelze pozorovati, že by tyto žíly byly způsobily ztužení hmoty pískovcové.

Nynější relief namnoze též ukazuje, že ve víře v ochranu pískovců čedičem nesmíme zacházeti příliš daleko. Nejvyšší partie Prachovských skal, Přivišín, skládá se výhradně z pískovce. Malé homole obou Svinčic zvedají se nepatrně nad hřbet pískovcový, který zachovává stejnou výšku ještě asi 1 *km* dále k v. Čediče v nynějším Vokšickém údolí, jež vězely původně v pískovcovém obalu (Dubolka, Houser, Sv. Anna), nebyly sto tento obal uchrániti před denudací. *Nelze popírati, že čedičové výlevy na jednotlivých místech uchránily před denudací pískovcové souvrství*, po němž se rozlily. Ale naznačovati, že snad *celá pískovcová oblast Jičínsko-Turnovská byla jen čediči udržena*, je jistě nesprávné.

IV. Formy údolí a skal.

Bylo již řečeno, že kvádrové vyvýšeniny jsou rozbrázděny množstvím úzkých roklí s příkrými stěnami. Zvláště v hořejší části rokle bývají

skalách Teplických u „hrobky" lze viděti čtyřhranné otvory, jistě umělé, které podle sdělení vůdců pocházejí od trámů, jež prý sem zaráželi obyvatelé z okolí, uchýlivše se do skal v době husitských válek. Kdyby věc byla bezpečně zjištěna, mohla by posloužit k odhadu o postupu denudace v době ještě značně delší, než v případech hořejších.

[1]) Třeba dodati, že rozdíly tamějšího a našeho podnebí nejsou tak velké, aby padaly v naší otázce na váhu.

stěny svislé, v dolejší však obyčejně se připojuje k nim mírnější svah, po němž bývají roztroušeny větší i menší balvany pískovcové. Na celé řadě umělých zářezů v takových svazích mohl jsem konstatovati, že se skládají z hrubších i drobnějších úlomků, se strání a plošin nad nimi spadlých, po případě též větrem sfouknutých. Tento sypký materiál ovšem se nemůže držeti pod úhlem tak velkým, jako kompaktní stěna skalní, a tím vzniká ohyb ve stráni rokle. Nápadný bývá rozdíl, když přejdeme z oblasti pískovcové do jiné, kde převládá na př. opuka. Údolí hned se rozšiřují a stráně jejich stávají mnohem povlovnějšími.

Častěji můžeme v pískovcových oblastech viděti formy, jež pravděpodobně *představují různá stadia ve vývoji roklí*. Na příkrých svazích tamějších vyvýšenin, kde skály tvoří rozsáhlé amfiteatry, můžeme pozorovati užší neb širší zářezy, které se již svým směrem jeví jako svislé mezery, o nichž jsme dříve mluvili, větráním a proudy dešťové vody rozšířené. Vídáme též, jak se tyto zářezy spojují nebo křižují s jinými, k jejich směru kolmo stojícími, jak to souhlasí se dvěma soustavami trhlin. (tab. II., 1). Patrně tu máme před sebou *zárodky roklí*. Když některý takový zářez svou vhodnou polohou upoutá k sobě větší proud dešťové vody, zvětšuje se a zpětnou erosí zasahuje dále do nitra vyvýšeniny. Ve mnoha případech asi též řícení balvanů se stěn přispívá k jeho rozšíření. Protože však jen občas tu proudí voda, (při velkých deštích a tání sněhu), není *spád jejich vyrovnán*, nýbrž zůstává velmi příkrý. Císařskou chodbu s jejími krátkými pobočkami, jejichž podloha se vesměs příkře skláni k ústí, lze uvésti jako příklad tohoto pokročilejšího stadia. Teprve když stále tekoucí potok proudí některou roklí, její spád se zmírní.

Myslím, že tímto způsobem lze jedině vysvětliti existenci četných a hlubokých roklí v kvádrových oblastech, na niž nebyl, pokud vím, dosud nikdy položen náležitý důraz.[1]) Dvě soustavy puklin je prostupující poskytly větrání a dešťové vodě vhodná místa k útoku. Ale rokle v nynější své podobě jsou z největší části dílem vody. To dosvědčuje uspořádání roklí, jež tvoří pravidelnou síť toho způsobu, že menší z nich ústí do větších, jako vídáme u vodních toků. *Spád* jejich je stejnosměrný, až na malé výjimky, jež lze snadno vysvětliti druhotnými příčinami, jako sřícením balvanů na dno roklí.[2]) Domněnce o vzniku roklí z puklin zdánlivě odporuje okolnost, že vždycky směr obou nesouhlasí. Pozoroval jsem to v Prachovských skalách a P e t r a s c h e c k totéž uvádí o skalách Adrsbašsko-Teplických (s. 613). Ale myslím, že to není vážná námitka. Rokle

---

[1]) R a t h s b u r g (s. 162) uvádí jako možnost, že četné rokle v některých částech Saského Švýcarska byly vytvořeny v dobách (ledové), kdy bylo více vody. Ale pak by něco podobného muselo existovati též v oblastech jiných hornin, čehož naprosto není.

[2]) Velká Hejšovina je rozryta chodbami, jež jsou na obou stranách slepé. Ł o z i ń s k i (s. 11) to asi správně vysvětluje tak, že vznikly ze svislých mezer větráním, bez spolupůsobení tekoucí vody.

patrně namnoze vznikají z puklin, které neležely v jedné čáře, nýbrž byly spojeny puklinami příčnými. Při rozšíření rokle namnoze tato původní stavba byla zahlazena, ale přece jako upomínku na ni častěji vídáme, jak roh kvádrové partie přesahuje do rokle. Jiné rokle pak se ohýbají vícekráte v pravých úhlech, což je zřejmým dotvrzením právě vyslovené myšlenky.[1]) Někdy též vržení určila směr roklí.

Příkré stěny v hořejší části roklí jsou *dokladem, že oplachování jejich dešťovou vodou není příliš intensivní* z důvodů výše naznačených (s. 7.). V tom je shoda s oblastmi vápence, v jehož trhlinách se rovněž voda ztrácí. I horní závěr roklí bývá stejně příkrý. Často jdouce po plošině pískovcové staneme nenadále nad stěnou spadající 20—30 *m* hluboko ku podloze rokle, jež má tu svůj horní konec[2]) V tom připomínají tyto rokle poněkud suchá koryta (wadi) pouští.

Budiž řečeno ještě několik slov o *svahu ssuti u paty stěn.* Jsou to podobné haldy, jaké nacházíme, ovšem v rozměrech mnohem větších, ve velehorách. Zpravidla je podle stěn tolik ssuti rovnoměrně nahromaděno, že se haldy táhnou souvisle po celé délce jejich, jsouce nahoře skoro přímočárně omezeny. Jen výjimkou jsem pozoroval kužely od sebe oddělené, zvláště pěkně ve Weberschlüchte, na s. od Převyšské brány v Saském Švýcarsku. O velkých haldách v této krajině dokázal Hettner (*a*, s. 299), že často obsahují jádro z pevného pískovce, ale nevím, platí-li to též o některých, vesměs menších v oblasti Jičínsko-Turnovské; sám jsem nikdy něco podobného nepozoroval.

Skalní partie mezi roklemi mívají nejrůznější rozměry a obrysy. Povrch jejich bývá zpravidla plochý, mnohem řidčeji, a to, pokud vím jen v Saském Švýcarsku, se vyskytují homolovité vrchy, korunované skupinou kvádrů, jež živě připomínají zříceniny hradní. Pískovcová plošina nepřechází však v boční stěnu zpravidla ostrou hranou, nýbrž plochou, zakulacenou působením atmosferických činitelů. *Denudace na plošinách* chráněných rostlinstvem *postupuje* pravděpodobně *velmi pomalu.* Stává se sice na plochách poněkud skloněných, že tenká, zvětralá pokrývka, která lne méně ku podlaze než u hornin hlinitě větrajících, klouzá pomalu dolů; z Prachovských skal jsou mně známy dva takové případy. Ale jiný způsob denudování, v jiných horninách, jak se zdá, značně rozšířený a Götzingrem podrobně popsaný, totiž *slézání ssuti*, je při mělkosti zdejší půdy sotva myslitelný.

Za to na *srázných okrajích plošin* vídáme četné doklady, že denudace rychleji postupuje; k takovým dokladům náležejí zejména *osamělé skalní*

---

[1]) Salamon na základě prací svých žáků ve Falckém Lese došel k názoru, že tamější svislé pukliny, zcela podobné našim, měly rozhodující vliv při tvoření údolí.

[2]) Mladá údolí též v oblastech jiných hornin mívají srázné stěny. Avšak v našem případě ukazuje okolnost, že v kvádrových oblastech jsou srázné stráně údolní zjevem všeobecným, v sousedních oblastech řídkým, že se jedná o zjev způsobený vlastnostmi horniny a ne stadiem vývoje.

pilíře, často velké výše. Někdy jsou široké, podobné domům, jindy štíhlé, věžovité. Nezřídka nabývají bizarních tvarů, které jsou nejznámějším a pro laika nejzajímavějším rysem kvádrových oblastí. V Jičínsko-Turnovské oblasti nejčastěji mívají půdorys elliptický, jsouce protaženy jedním směrem, od z. k v. Patrně třeba to přičítati větší hojnosti a intensitě svislých mezer tohoto směru. V Adrsbašských skalách mívají půdorys více kruhovitý. Tyto pilíře, které stojí jako přední stráže před rozsáhlejšími plošinami, pískovcovými, jsou *zbytky dřívějšího většího rozsahu těchto plošin* a lze pro ně užíti v Alžírsku obvyklého názvu *svědecké skály*. Popsali jsme výše, jak větrání a dešťová voda rozšiřují svislé pukliny, čímž bývají kusy plošin isolovány a jeví se nám jako právě popsané pilíře. Daleko pokročilé stadium takového pochodu ukazuje Přivišín, jenž je již úplně rozkouskován v řadu skalních „domů". Taková osamělá skaliska bývají ovšem ze všech stran větráním napadána a proto se zmenšují poměrně rychleji než souvislá stěna skalní, která hlavně jen s jedné strany je mu vystavena. Původně úzké štěrbiny mezi jednotlivými vrstvami šíří se při tom často tou měrou, že svrchní část pilíře vypadá jako balvan na vrcholu spodní části položený.

V. Morfologický vývoj oblasti Jičínsko-Turnovské.

Nelze pochybovati, že zdejší vyvýšeniny pískovcové nyní údolími oddělené původně spolu souvisely. Když před začátkem senonské doby moře opustilo Čechy, oblast Jičínsko-Turnovská poskytovala nejspíše podobný obraz, jako nyní východní část Pádské nížiny, byla úplnou rovinou. Nerovnosti, které nyní nacházíme, byly způsobeny v pozdější době. Bylo by zajímavo věděti, jak mocné asi bylo původně souvrství pískovců a slínů, ale nedostává se nám k tomu spolehlivých dokladů. Ani o nejvyšším obzoru nynějším nevíme bezpečně, je-li vůbec nejvyšší vrstvou, v českém křídovém moři usazenou, aneb byly-li ještě vyšší denudací odstraněny beze stop. Zahálka sice dokazuje (s. 95, 104 a 115), že slíny zachované pod čedičovými homolemi Mužského, Vyskře a Trosek jsou stejného věku s nejmladšími vrstvami křídovými v Čechách nalezenými, ale při nedostatku zkamenělin není přece všechna pochybnost vyloučena.[1]) Ostatně i tehdy, je-li Zahálkova domněnka správná, je možno, že jíly byly původně mocnější. V době vulkanické činnosti, která vytvořila čedičové homole naší oblasti a již podle analogie s Českým Středohořím můžeme klásti, aspoň z největší části, do svrchního oligocénu (Hibsch), ležel povrch zemský jistě značně výše než nyní. Hlavním svědectvím toho je právě zmíněný slín, pod ochranou čedičových homolí zachovaný. Bylo

[1]) Na severovýchodním svahu Vyskře ve výši asi 430 *m*, tedy značně vysoko nad povrchem slínu, jsem nalezl pískovcovou kru, kterou asi též Frič viděl (c, s. 36); tím se vysvětluje „omyl", který mu Zahálka vytýká (s. 165). Je ovšem možno, že tento pískovec nebyl původně uložen nad slínem, nýbrž z jeho podloží čedičem vyzdvižen.

již řečeno, že je méně resistentní než pískovec a proto není myslitelno, že by byl již před obdobím výbuchů sopečných vynikal nad okolí, jako nyní. Musíme se proto domnívati, že průměrná úroveň povrchu zemského ležela tehdy ve stejné nebo něco větší výši než povrch těchto pískovců (400—440 *m*).[1]) Čedičové homole samy jsou silně denudovány. Nikde v jejich okolí není stop láv ani tuffů, poznáváme v nich jen ztvrdlou výplň kraterů nebo hmotu, která ztuhla ještě hlouběji pod povrchem zemským a teprve pozdější denudací byla odkryta.

Bylo již řečeno, že mezi roklemi nacházíme malé plošiny, z nichž se sousední svou výškou obyčejně značně blíží. Je na snadě tyto plošinky v mysli spojiti a obdržíme pak mírně zvlněnou pahorkatinu. Ježto pak na některých nižších návrších jsou značná lože říčního štěrku, můžeme si snadno představiti na těchto místech mělká údolí, k nimž se stráně pahorků mírně sklánějí. Zkrátka, dojdeme tak k obrazu značně dozrálé topografie a lehce můžeme v něm viděti skutečnou minulost naší krajiny, než znovu oživená erose vyryla rokle a vytvořila nynější relief. Kdyby se jednalo o vrstvy, v nichž větrání a erose pracují normálním způsobem, pak by, myslím, nebylo proti takovému výkladu námitek. Ale postup těchto činitelů v kvádrových oblastech není normální, jak bylo v předcházejících odstavcích ukázáno. Všecka zkušenost ukazuje, že i poslední zbytky kvádrových vyvýšenin zachovávají si příkré boky[2]) a potoky netekou po povrchu jejich, nýbrž jsou do nich zaryty v roklích. Podmínky těchto zvláštností existovaly jistě aspoň od doby oligocenní, kdy byly pravděpodobně vytvořeny svislé pukliny.

Dotkněme se krátce právě zmíněných *loží štěrkových*. Na několika místech na plošinkách Hruboskalské vysočiny, u vsi Krčkovic a samoty Stadel (na v. od Vyskře) ve výši asi 380 *m*, a u Drahoňovic na s. odtud asi 400 *m* vysoko jsem našel větší množství oblásků, o nichž se zmiňuje též Zahálka (s. 113 a 142), a které nedopouštějí pochybnosti, že byly sem přineseny tekoucí vodou. Tyto nálezy jsou však úplně isolovány, nejspíše asi jen poslední zbytky nánosu někdy mnohem rozsáhlejšího a tak nelze z nich ničeho usuzovati o toku řeky, která je nanesla. Mnohem souvislejší štěrky nacházíme na Velišském hřbetě, jehož povrch se nám jeví jako podle pravítka nakreslený, odmyslíme-li si ovšem čedičové homole Veliš a Loretto. Můžeme tento štěrk sledovati ve výši 360—370 *m* od Loretta až za ves Štidla v mocnosti 6—10 *m*. Velmi podobné štěrky nacházíme na táhlém hřbetě východně od Sobotky, mezi Zajakurami a Stéblovicemi ve výši 375—380 *m*, mocnost jeho je 4—5 *m*. Uložení tohoto

[1]) Byla-li před tím naše oblast denudací zarovnána až ke stadiu peneplainu, jako ve stejné době střední Čechy, nemohu zatím s určitostí rozhodnouti. Avšak s ohledem na neklid půdy v bezprostřední blízkosti při zvedání Sudet, jež snad spadá též do doby oligocénní, se mně to nezdá příliš pravděpodobno.

[2]) Tak na př. malé partie cenomanských pískovců v okolí Prahy, na př. na Vidovli, pnou se příkrými stěnami nad své okolí.

štěrku, jehož podloha se na vzdálenost 10 *km* nesklání více než asi 20 *m*, dosvědčuje, že řeka, od níž byly naneseny, měla vyrovnaný tok. Podle materiálu štěrku můžeme dále souditi, že řeka ta tekla od Železného Brodu.[1]) Studium starých říčních nánosů v úvodí horní Cidliny, jehož výsledky budou jinde uveřejněny, umožnilo mně parallelisování těchto štěrků s říčními nánosy v jiných částech Čech. V souhlase s Engelmannem pokládám je za současné s jeho terasou *A* v oblasti Labsko-Vltavské a se svrchní terasou *Purkyňovou* v úvodí Mže a Vltavy. Engelmann naznačuje jako dobu, myslitelnou pro vznik svrchní terasy (*A*), *svrchní pliocén* a *starší diluvium* (*b*, s. 91, 92), Purkyně pouze *diluvium*. Pokládajíce podle toho popsané štěrky za *starodiluviální*, dojdeme k názoru, že *ve dlouhé době od výbuchů čedičových* až ku počátku diluvia, t. j. během celého neogénu *pokročilo prohlubování údolí značně méně, než ve mnohem kratším diluviu.*

Můžeme tedy do jisté míry sledovati postup prohlubování údolí, ale nesnadnější, jako obyčejně, je to u snižování vyvýšenin. Nedovedeme říci, oč byly sníženy od doby čedičové a oč od doby diluvialní, ač jisté snižování oplachováním je nepochybné. Snad bedlivější studium stupňů, které tu a tam na plošinách nacházíme, objasní poněkud tuto nesnadnou otázku.

VI. Sřícené balvany.

Zmiňovali jsme se již několikráte o balvanech ležících porůznu po stráních pískovcových vyvýšenin nebo pod nimi. U veliké části poloha zřejmě ukazuje, že sem spadly oddělivše se od skal výše se vypínajících. Někde svým počtem a velikostí ovládají tyto spadlé balvany scenerii. V končinách mně známých je to v první řadě jihozápadní svah Prachovských skal, řada roklí zvaná *Babinec*. Častěji u velehorských a středohorských partií užívaný název „moře balvanů" se hodí dobře na zdejší poměry, být i les, který bují na celém tomto prostranství, nedovoloval je přehlédnouti. Balvany tu zaujímají všemožné polohy, jsou skloněny pod nejrůznějšími úhly, namnoze též o sebe opřeny, čímž vznikají přirozené branky a loubí. Některé jsou velmi značných rozměrů; měřil jsem několik, jichž obsah činí 50—70 m^3, tak že váhu třeba odhadnouti při nejmenším na 1200—1400 *q*. Nevidíme tu ostatně jen jednotlivých balvanů, spočívajících přímo na rostlé skále, nýbrž na některých místech je jich takové množství na sebe nakupeno, že vznikly z nich pahorky až 50 *m* vysoké, v nichž zůstaly tu a tam mezi balvany dosti velké mezery, aby se jimi člověk mohl protáhnouti na vzdálenost mnoha metrů. Mezery takového způsobu jsou jeskyně Lachmannova a Kladivo. Nyní je již naprosto nemožno zjistiti, odkud sem ty nesčíslné balvany napadaly. Většinou

[1]) Bylo to patrně pokračování horního toku nynější Jizery, neboť jen na ně se může vztahovati výrok Engelmannův (*a*), že nejvyšší štěrky Jizery vedou k Cidlině.

jistě nevznikly „in situ", t. j. prostě rozpadnutím skály, která by snad byla dříve zaujímala jejich místo, jak to z velké části lez říci o žulových „mořích balvanů." Spíše je pravděpodobno, že tu kdysi hlavní hřbet Prachovský spadal právě tak příkře, jako dosud se sklání na s., do Císařské chodby. Vidíme tu podobné horní závěry roklí do hřbetu zařízntutých, avšak dno jejich bylo vyvýšeno spoustou napadaných balvanů, mezi nimiž pozůstalé studňovité prohlubiny jasně ukazují, že tu nejde o jednolitou skálu, nýbrž o hromadu trosek. Jiné balvany zatarasily pokračování těchto roklí.

Otázky, které se nám tu především naskytají, jsou asi tyto. *Proč právě na tomto místě došlo ke sřícení tak četných balvanů? Událo se toto sřícení v kratším období, katastrofálně, či je to výsledeh dlouho pokračujícího processu? Do které doby třeba vznik tohoto „moře balvanů" klásti?* S ohledem na první otázku nedospěl jsem k uspokojivé odpovědi. Myslil jsem na vliv exposice, že totiž skalní stěny k j. obrácené a nejvíce záření slunečnímu vystavené se ve dne zvláště silně ohřívají, a proto účinky střídání teploty jsou u nich mocnější, voda v jejich pórech častěji taje a znova zase mrzne, a že proto jsou více rozrušovány než jinde.[1]) Ale tuto myšlenku jsem opustil uváživ, že dále na v. ve stejné exposici není již patrnějšího nahromadění spadlých balvanů. Naproti tomu je místy dosti balvanů na severních svazích. Podobnou nesrovnalost vidíme v Teplickém „skalním předměstí": stráň k s. obrácená poseta je nesčetnými sřícenými balvany, které zasuly zářez potoka tak, že si nyní prodírá jimi cestu ve hloubce 6—7 *m*; protější stráň s jižní exposicí však je jich prosta. Loziński uvádí, že rozhoduje též tvrdost pískovce; měkčí se rozpadal v písek, který byl snadno odstraněn, tvrdší v balvany (s. 16). Ale žádná jiná známka nenasvědčuje rozdílu v pevnosti pískovce u spadlých balvanů v Babinci a u skal v jiných částech Prachovského okrsku, kde není balvanů.

Ke druhé otázce lze odpověděti, že *katastrofální padání balvanů je mnohem méně pravděpodobné než povlovné.* Není vyloučeno, že tu a onde některý balvan, již předem uvolněný, sřítil se následkem otřesu zeme. Ale aby tak velká spousta spadlých balvanů byla nahromaděna, byl by se musel najednou sřítiti ohromný komplex skal; myslím, že by na to sotva stačilo nejsilnější zemětřesení. Mimo to by byly jeho účinky bývaly sotva omezeny na malou plochu Babince (leč že by se jednalo o zemětřesení sopečné, na které však zde v době posttercierní, do níž řícení balvanů očividně spadá, nelze mysleti). Myslím proto, jako všichni badatelé v novější době, kteří se podobnými zjevy zabývali, že *padání balvanů se dělo postupně,* v delších intervalech. Někdy velká trhlina mrazy způsobená,

[1]) Neznal jsem tehdy ještě studie Łozińského, který připisuje exposici stejný účinek a vedle toho též velký vliv na tvoření drobných forem na stěnách skalních (s. 8 a násl). Avšak uváživ podrobněji všecky okolnosti dospěl jsem v obojí příčině k odchylnému mínění.

jindy blesk, ještě jindy snad otřes země daly poslední popud k oddělení balvanu již v labilní poloze trvajícího. Také pohyby kořenu stromových ve sparách pískovcových skal, když stromy jsou zmítány větrem, leckdy přispívají k uvolnění neb vytržení jednotlivých balvanů. Jiná věc je, nebylo-li některé období minulosti svými zvláštními poměry nad jiná příznivo řícení balvanů; tím se dostáváme k otázce třetí.

Zdá se mně, že v té příčině mnoho pro sebe má myšlenka Obstova (*a*, s. 175), kterou skoro současně vyslovil též Loziński (s. 15), že v době čtvrtohorní, kdy bylo podnebí ve střední Evropě chladnější a též výstřednější, následkem častějších mrazů pískovec se více trhal a proto pády balvanů byly hojnější. Že by spadnutí větší části těch balvanů, které nyní nacházíme, bylo se událo před čtvrtohorní dobou, nelze mysleti. Byly by jistě z větší části již podlehly větrání, kdyby byly tak dlouho ležely isolovány. Poloha některých ukazuje, že hloubka Vokšické doliny jistě nebyla při jejich pádu mnohem menší než nyní, avšak celá dolina pod úrovní Vokšického hřbetu je pravděpodobně dílem erose v době čtvrtohorní. Ale i přímé důkazy svědčí pro věk čtvrtohorní. V lomech na v. od Babince byly opětovně nalezeny zbytky čtvrtohorních zvířat. První zmínku o těchto nálezech činí Šnajdr (*a*), podrobněji získaný materiál prozkoumal Woldřich. Oba poukazují na to, že díry a jeskyňky pod balvany a mezi nimi, kde byly kosti nalezeny, sloužily za skrýše šelmám, které sem zatahovaly svůj lup. Kosti se vyskytují ve hlíně, již Woldřich prohlašuje za *spraš* a která je silně promíšena pískem, jenž sem se stěn napadal. Bohužel v žádném z obou popisů není místo přesně vytčeno, ale myslím, že jde o lom zvaný „Na rovince" pod „Čertovou kuchyní". Nálezy kostí se tam i nyní opětují.[1]) Pokud jsem mohl zjistiti, jsou poměry, ve kterých se kosti nacházejí, zcela takové, jako líčí Šnajdr: buď leží pod sřícenými balvany, anebo ve svislých puklinách ve skále, obaleny pískem a hlínou. Původní stav této lokality je ovšem dlouholetým lámáním pískovce velmi změněn. Myslím, že i pro tyto nálezy je nejpravděpodobnější výklad Woldřichův. Tento geolog zjistil ve zbytcích, jež mu byly z těchto míst zaslány, kosti živočichů, jež řadí ke své *poledové fauně pastvin*, s výjimkou tura, jenž je příslušníkem zvířeny *glacialní*. Šnajdr však je spíše nakloněn odkázati tyto nálezy do *poslední doby meziledové* (*b*, s. 184, pozn. 59 b).

Některé pády balvanů však jistě připadají do geologické přítomnosti, ano z jiné části Prachovských skal je mně znám jeden případ i z posledních desítiletí. Pod Hrádkem leží několik velmi objemných balvanů přímo v zářezu potůčku, na př. ty, jež tvoří „Pelíškův most". Je viděti, že od doby jejich pádu erose neudělala vůbec žádného pokroku. V rokli Na Vodách leží menší balvan v řečišti potoka, který tu tvoří miniaturní „vodopád". Tak malou překážku by potok jistě odstranil v době po-

[1]) Byly prý tam nalezeny též pazourkové artefakty, avšak nebylo lze zvěděti, co se s nimi stalo.

měrně velmi krátké a jde tedy jistě o sřícení balvanu velmi pozdní. Pokud se týče výše naznačeného případu z poslední doby, udál se v Císařské chodbě asi před 20 lety (bližšího data jsem nemohl zjistiti.)[1] Z ostatních dvou kvádrových oblastí jsou zaznamenány podobné případy. (Obst, *a*, s. 149, Gutbier, s. 101), a tak dospíváme ku přesvědčení, že *padání balvanů v pískovcových oblastech je zjev, opakující se v geologické přítomnosti i době čtvrtohorní.* Při tom zcela připouštíme možnost, že *v době extremního podnebí diluvialního se opakovalo častěji než nyní.*

VII. Drobné formy na pískovci.

Tyto formy vyskytují se někdy v ohromném množství na stenách kvádrového pískovce, jsouce pro něj velmi příznačné, kdežto v jiných horninách našich krajin, pokud mně známo, se nenacházejí, s výjimkou jen *pestrého pískovce*.[2] Jinde bývá povrch pískovcových stěn hladký, ještě jinde na něm lze rozeznati nesčetné, tenounké (sotva 1 *cm*) plátky, jež byly případně přirovnány k lístkům máslového těsta.

Pod hořejší pojem *drobných forem* shrnuji vystupující lišty a římsy, dále důlky a díry nejrůznějších rozměrů i podoby. Lze mezi nimi rozeznávati tyto druhy, při čemž ovšem existují též tvary přechodní:

1 *Římsy*, vznikající tam, kde hořejší část skály skoro v pravém úhlu přečnívá přes nižší část stěny. V Jičínsko-Turnovské oblasti jsem tento zjev viděl jen ve dvou nebo třech případech.

2. *Lišty*, t. j. vodorovné aneb mírně nakloněné pruhy menší tloušťky (od několika *cm* do několika *dm*), jež činí více ku předu, než vrstvy vyšší i nižší. Jsou zjevem ve všech kvádrových oblastech zcela obyčejným.

3. *Otvory* a *výklenky*, sahající ve srovnání ke své světlosti hluboko do nitra skal. Shrnuji sem zase formy nejrůznějších rozměrů i obrysů. Nacházíme dirky ne širší než 2—3 *cm*, jež pokračují dovnitř skály rourkou šikmo vzhůru obrácenou a končící slepě ve vzdálenosti 8 — 10 *cm*. Na druhé straně vídáme výklenky, 1 *m* i více vysoké, nahoře zaoblené, dole někdy rovné, někdy však též obloukovitě omezené, tak že nabývají tvaru blížícího se kruhu nebo ellipse. Velmi často bývají sestaveny v řadách, souhlasících s výchozem vrstev, ať pravých neb nepravidelných, a mají mezery vrstevní za podlohu (tab. II., 2). Někde na vysokých stěnách skalních bývají též dvě neb i více řad nad sebou, ač při tom je jedna zpra-

[1] Pilíř, s něhož se balvan sřítil, byl mně již před tím, než jsem zvěděl o této události, nápadný tím, že horní část je převislá a obrysy její velmi ostré.

[2] Je to hlavně střední oddíl stejnojmenné střední části německého triasu, označovaný jako *hlavní pestrý pískovec* (Hauptbuntsandstein), křemitý, nejčastěji červený pískovec s malým množstvím tmelu, tedy velmi podobného složení jako křídové kvádry, jenž je nositelem těchto forem. Nejlépe vyvinut je ve Falckém lese, severním pokračování Vogéz. Sr. Häberle *a* a *b*.

vidla lépe vyvinuta. Na užších pilířích skalních bývají někdy takové otvory proraženy naskrz (tab. III., 1) a tak vzniká *přirozené okno*. Podloha těchto výklenků bývá někdy vodorovná, někdy však se též mírně zvedá do nitra skály. V některých případech jsou výklenky tak blízko sebe, že oddělující je část stěny se sůží na sloupek, často uprostřed zvláště tenký („přesypací hodiny"). Dutiny tyto vnikají často 1 *m* i hlouběji do skály, ale pak končí slepě, právě tak jako výše popsané rourkovité otvory. Často je jejich podloha pokryta dosti silnou vrstvou písku. Někdy nabývají takové výklenky tak značných rozměrů, že je musíme zváti jeskyněmi. V Saském Švýcarsku je jich větší počet (H e t t n e r, *a*, s. 295), v oblasti Jičínsko-Turnovské však, pokud vím, pouze jeden zasluhuje toho jména. Nalézá se ve „skále sv. Prokopa" při cestě ze Sedmihorek na Hrubou Skálu a nemá mnohem více než 2 *m* délky. Snad též brány ve skalních stěnách, jako Převyšská, vznikly spojením dvou velkých výklenků z opačných stran do skály se prohlubujících.

V oblasti Jičínsko-Turnovské nejvíce oplývá takovýmito výklenky vysočina Hruboskalská, zvláště v severní své části. Ale ani v některých částech Prachovských skal (v Laholi) a v okolí hradu Kosti nejsou vzácností. Velmi mnoho jsem jich viděl v různých částech Saského Švýcarska (Bastei, okolí Převyšské brány, Schrammsteine); rozhodně řídčeji se vyskytují v oblasti Broumovsko-Kladské, ač ani tam je nelze nazvati vzácným zjevem.

4. Jiného druhu jsou *dutiny v podobě polokoulí* neb *válců*, jejichž okraje jsou mnohem ostřeji vyznačeny, než u otvorů právě popsaných. Průměr jejich bývá, pokud jsem viděl, nejčastěji asi 0·2—0·3 *m*, ale podle zpráv O b s t o v ý c h někdy též přes 1 *m* (*a*, s. 114 a násl.). Viděl jsem je v dosti hojném počtu ve vyšším kvádru Hejšovinském, jenž je značně tvrdší než jiné odrůdy této horniny. Je zásluhou O b s t o v o u, že je poprvé výslovně odlišil od nepravidelných výklenků.

5. Konečně třeba uvésti *mřežování* neb *voštinové důlky*. I v této kategorii je značná různost. Někde shledáváme mělké, ploché *důlky miskovité podoby*, jež bývají od sebe více vzdáleny. Jinde jsou přehrady mezi nimi úzké a ostré, nabývajíce podoby *mřížek* (tab. III., 2.). Namnoze v takovém mřížoví vynikají vodorovné přehrady, jež pak můžeme stotožňovati s lištami. Leckde jsou tyto mřížky velmi jemné, jejich oka nemají více než 2—3 *cm* světlosti, a celé pletivo jich pokrývá jako závoj nebo krajka 10 i více *m* vysoké skály (tab. I., 2.). Někde končí mřežování náhle a dále nacházíme již jen lišty aneb hladkou skálu.

Nejpěknější vývoj takovýchto mřížek a voštin jsem viděl v Prachovských skalách v Babinci a v Čertově kuchyni, méně hojné, ač místy též typicky vyvinuté, jsou v Císařské chodbě. Často je nacházíme dále v okolí Mladějova, Kosti a v Boru, na z. od Rovenska; méně často ve vysočině Hruboskalské a na Troskovicku. Řídkým zjevem jsou ve všech

částech oblasti Broumovsko-Kladské, které jsem navštívil.[1]) V Saském Švýcarsku se s ním zase setkáváme mnohem častěji. Viděl jsem je v podobě zvláště typické a značné hojnosti na jihozápadních stěnách Schrammsteine a na severním srázu Edmundovy rokle u Hřenska.

Pokud se týče všeobecného pravidla jejich rozdělení, pozoroval jsem v celku totéž, co Gutbier (s. 92, 93 a 99): že jsou hojnější v nižších partiích, při úpatí skal, v roklích a chodbách, zvláště kde je skála zastíněna hustým stromovím; na pilířích a stěnách vysoko a o samotě strmících jich zpravidla nenalézáme, aspoň ne v takové hojnosti a tak typicky vyvinutých.

U některých z uvedených forem nečiní vysvětlení vzniku obtíží. Hladké stěny se vyskytují tam, kde rovnoměrně složený pískovec se na všech místech stejně drolí. Vyčnívající lišty bývají často tvořeny výše (s. 5.) popsanými konkrécemi železitými nebo pruhy pískovce, jejichž tmel obsahuje více limonitu než okolí. V obou případech větší tvrdost způsobila, že takový pruh se pomaleji rozpadal v písek a během času vyniknul nad okolí. Někdy snad touž úlohu, jako jinde limonit, hrála kyselina křemičitá, proniknuvši a ztuživši tmel.

Mnohem více sporů bylo vedeno o otázku vzniku *výklenků a mřežování*. Výzkumy v pouštech ukázaly, že tamější skály bývají pokryty formami zcela podobnými (sr. na př Walther, zvláště obr. 12. a 20.). Již Hettner se zabývá touto podobností (*b*, s. 609 a násl.) a uvažuje, nelze-li v důsledku jejím mysleti, že řečené formy u nás vznikly za stejných podmínek klimatických, totiž v podnebí suchém, jež ve střední Evropě převládalo v mladším diluviu. Zavrhuje však tuto myšlenku a prohlašuje zvláštnost horniny za důvod jejich vzniku (tamt. s. 626), hlavně proto, že jsou omezeny na pískovce, v jiných horninách jich nenalézáme. Avšak Passarge se později znova uchopil té věci a Obst byl od něho pověřen úkolem, aby ji podrobněji prozkoumal. Ten došel k závěru, že skutečně celá fysiognomie pískovcové oblasti Broumovsko-Kladské s velkými i drobnými formami je pozůstatkem z dob suchého podnebí diluvialního a že především *vítr* byl na modellování jejím zúčastněn. Tyto výklady mu vynesly prudkou polemiku s Hettnerem (Hettner *c*, a Obst, *b*). Později Rathsburg znova studoval tuto otázku v oblasti Broumovsko-Kladské a dospěl k mínění úplně opačnému než Obst, shodnému s Hettnerem.[2]) Na základě svých zkušeností v oblasti Jičínsko-Turnovské mohu k této sporné otázce podati následující příspěvek.

---

[1]) Jak poměrně vzácné je v Teplických skalách, viděti z toho, že vůdcové na ně na jednom místě zvláště upozorňují, ač je prostší, než na mnoha místech v Prachovských skalách. Pěkný výskyt z Adrsbašských skal zobrazuje Petrascheck (s. 615).

[2]) Obdržev práci Ratsburgovu teprve, když tento článek byl již v podstatné části své hotov, mohl jsem s potěšením konstatovati, že většinou jeho názory o morfologii pískovcových oblastí s mými plně souhlasí.

V severozápadní části Prachovských skal jsou zříceniny malého hradu *Pařezu*. Ze zdí nezbývá již mnoho, ale lépe je zachováno několik nevelkých sklepení, vyhloubených v pískovcové skále. Podoba jejich nedopouští nejmenší pochybnosti o jejich umělém vzniku, a na stěnách místy dobře ještě vidíme stopy špičáků. Avšak vedle toho pozorujeme na nich též prohlubiny docela podobné miskovitým dutinám, jaké často nacházíme na přirozených stěnách pískovcových. Zvláště na stěně zašpičatělého okna na západní straně největšího sklepení a pak naproti němu v obdélníkovém výklenku, v němž snad býval zasazen nějaký trám, jsou tyto skulptury zřetelné (tab. IV., 2.). Nemůže býti pochybnosti, že se *utvořily* na stěnách jistě původně hladkých *přirozenou cestou po vyhloubení sklepení*, v době několika posledních století.[1]) Po tomto nálezu jsme zajisté oprávněni považovati i *miskovité prohlubiny na přirozených stěnách pískovcových za zjev v geologické přítomnosti vytvořený*. Mám však za pravděpodobné, že mřežování s tenkými příčkami není než pokročilejší stadium vývoje miskovitých děr. Našel jsem v nejednom případě oba typy zastoupené na jedné skále a vidíme mezi nimi též všemožné přechody.[2]) Proto ani mřežování nemůžeme připisovati tak velký věk.[3]) *Všecko zdání ovšem mluví též proti tomu, že by drobné formy se byly zachovaly v tak hojném počtu na pískovci poměrně dosti měkkém až z doby diluvialní.*

Jaké argumenty může naproti těmto faktům uvésti theorie „poušťevní"? Podle Obstova výkladu asi tyto: Pískovec je velmi resistentní, voda naň skoro vůbec nepůsobí, střídání teploty, mráz a vítr za nynějších podmínek klimatických jen velmi slabě. V geologické přítomnosti se proto nedějí s pískovcem téměř žádné změny a kdyby i nynější síly působily po sebe delší dobu, nemohly by pískovci vtisknouti jeho nynější fysiognomii. Bylo to v diluvialní době stepní, kdy vítr a silnější střídání teploty vymodelovaly pískovec způsobem, jenž se zachoval až na naše dny. Snažil se tedy O b s t pro svůj názor vésti hlavně důkaz *negativní* (*b*, s. 340.).

Optejme se tedy: Je tento negativní důkaz skutečně tak pevný, aby mohl vzdorovati faktům výše uvedeným a stlačiti snad jejich význam na pouhé výjimky? Není skutečně síly, která by při nynějších podmín-

---

[1]) Přesněji dobu určiti nemůžeme, neboť o hradu tomto není historických zpráv. Od Balbína víme, že byl zříceninou již v XVII. stol., je tedy jistě nejméně již 300 let opuštěn (S e d l á č e k s. 269).

[2]) Nechci však vylučovati též možnost, že závisí na různém rozdělení tmelu pískovcového, vytvoří-li se dirky miskovité neb mřežování. Není tak snadno rozhodnouti se pro jednu z těchto dvou možností, ale pro otázku o stáří těchto forem nepadá to tolik na váhu.

[3]) H ä b e r l e připomíná ze starého hradu ve Falckém lese mřežování, které prý se též vytvořilo teprve v posledních stoletích, ale důkaz tu není tak nepochybný, jako v našem případě (*a*, obr. č. 10) Tvoření děr na pískovci, užitém ke stavbám, jichž stáří činí 150—300 let, vidíme na fotografiích H i r s c h w a l d o v ý c h (obr. 176, 177 a 184).

kách klimatických mohla tvořiti ono bohatství drobných forem, jež v pískovcových oblastech nacházíme? A tu najdeme řadu badatelů, kteří odpovídají na tuto otázku s rozhodností kladně. Ukázali jsme výše, jak na snadě leží myšlenka, četnými případy jasně dotvrzená, že lišty na pískovcových stěnách vznikají nestejně rychlým rozpadáváním pískovce různě stmeleného. Nebylo by lze mysleti, že z podobných důvodů na jiných místech skal vývětrávají dirky? Již Bischof připadl na to, že takovéto *selektivní větrání* by mohlo vysvětliti drobné formy ve skalách Adrsbašských (s. 486). Stejně se vyslovuje Hettner (*a*, s. 51). V tom případě vystačíme zcela se silami, jež dosud na pískovce působí, *mechanickou činností vody uvnitř i vně pískovců*. Zbývá pouze jedna otázka. Jak vzniklo zvláštní rozdělení resistentnějších partií uprostřed méně resistentních? Na to uspokojivou odpověď dal v nedávné době Häberle (s. 205 až 207). Podle něho prosakující voda místy tmel, zejména železitý, vyplavila neb rozpustila a odnesla, jindy jej zase usadlia. Na místech usazování jeho stěny rourek, jimiž voda prosakovala, ztvrdly, a pozdější denudace tyto tvrdší partie vypreparovala. Podle Bayerových výzkumů můžeme souditi, že též usazování kamence a sádrovce mělo vliv na modifikaci resistence pískovců; kamenec ji zmenšoval, sádrovec zvětšoval. Velkou oporou této infiltrační theorie je, že pískovec mřížek, lišt atd. skutečně ve většině případů již svou váhou, barvou atd. ukazuje na větší obsah limonitu než okolí a dále že síť jejich shoduje se s našimi představami o síti drah vody, v pískovci kolující. Majíce tak uspokojivé vysvětlení, jak mohou mřížky vznikati silami dosud působícími, můžeme negativní důkaz Obstův směle prohlásiti ze odbytý.

Pro jeho „pouštevní" neb eolickou thoerii by tedy zbýval jen důkaz podobnosti s formami z pouští nynějších. Ale uvážíme-li, že taková podobnost často klame, že známe dosti případů, kdy zcela stejné formy, drobné i velké, jsou vytvářeny silami různými (na př. zjevy glacialní a pseudoglacialní), nebudeme jistě ani okamžik na rozpacích, prohlásiti i tento důkaz za nedostačující a dáti přednost theorii infiltrační před eolickou.

Nechci tvrditi, že by vítr byl býval úplně bez účinku na vytváření forem kvádrových oblastí. Sám o sobě nemůže sice na pevné skále provésti nejmenší změny, ale zmocňuje se odvětralých zrnek křemene a pomocí nich může pak skály škrábati a hladiti (*korrase*). Ale v našich kvádrových oblastech mu následkem rozmáhání se pokrývky rostlinné tento účinný nástroj, volně ležící písek, obyčejně úplně chybí.[1]) A též tam, kde se vyskytuje, bývá obyčejně trochu vlhký a lne pohromadě, tak že se ho vítr nemůže tak snadno zmocniti. Viděl jsem to zejména při své návštěvě chodby zvané Schrammtor, v západní části Schrammsteine,

[1]) Něco málo ho poskytuje kácení nebo vyvracení stromů, jež odhaluje podlohu pískovcovou, ale to nemůže mnoho padati na váhu.

kde se nachází největší množství volného písku, jaké jsem kdy v kvádrových oblastech viděl. Ačkoli několik dní před tím nepršelo a vál východní vítr, který je tam nejpříznivější zvedání písku, přece se ani zrnko písku nehnulo.[1]) Můžeme z toho souditi, že *formy colického původu jsou u nás poměrně vzácné.*

Je možno přece některé formy připisovati činnosti větru? Odpověď na tuto otázku není snadná. Nejlépe zjištěná a nejtypičtější známka jeho činnosti, ohlazené plochy, jako u známých hranců, se tu nikde nevyskytují; pískovec ovšem svým složením není jejímu vyvinutí a zachování příznivý. B e c k přičítá jí jiné formy z lokality Schrammtor právě uvedené, totiž dutiny oválního tvaru, navzájem oddělené sloupky v podobě přesypacích hodin. Dokládá však sám hned, že i normální větrání může takové formy vytvořiti, když rozdělení tmelu v pískovci je tomu příznivé. Pokud se týče mřežování, soudí B e c k, že je větrem ničeno a ne tvořeno (s. 545)[2]). *Z oblasti Jičínsko-Turnovské neznám jediného místa, kde by bylo lze* s takovou aspoň jistotou jako ve Schrammtoru *mluviti o formách eolických; jsou-li tu vůbec, jsou jistě výjimkami.*

Dosud jsme mluvili více o vzniku mřížek a voštin, zbývá ještě přihlédnouti ke *tvoření hlubších děr a výklenků.* Bohatství tvarů, jež tu nacházíme, mne přivedlo na myšlenku, že se asi nejedná jen o jeden způsob vzniku. Soudil bych na tyto případy:

1. *Mezery vrstevní,* vzniklé vyplavením hlinitého mezivrství, *se zvětšují.* Vytvářejí se tím podlouhlé výklenky, jejichž tvar připomíná lidské oko neb obočí. Dalším vývojem z nich pravděpodobně vznikají výklenky, jichž výška je větší než šířka.

2. *Rourkovité dráhy vodní* se rozšiřují, vznikají nejprve výše popsané rourky o světlosti 2—3 *cm,* pak i rozsáhlejší výklenky. Podoba otvoru v tomto případě je kruhová neb elliptická.

3. *Množství tmelu se mění méně rychle než u mřížek,* proto normální větrání dává vznik větším děrám. Tvar otvoru v tomto případě může býti velmi různý.[3])

---

[1]) Pan prof. Purkyně mne upozorňuje, že zimní období bývá u nás bohatší na pískové vánice, což je vysvětlitelno tím, že zima je u nás obdobím poměrně suchým.

[2]) D e M a r t o n n e předvádí obrázek (tab. XXXII. B), kde vidíme na zříceninách Beaux v Provenci dutiny velmi podobné miskovitým v našich pískovcích a ve vysvětlení praví, že byly vyryty mistralem a podobají se formám na skalách pouští. Je to zajímavé tím, že se jedná o případ z podnebí, pokud se týče vlhkosti podobného našemu. Bohužel nepodává auktor vysvětlení, proč je pokládá za dílo větru (exposice?).

[3]) F r i č (*a* s. 9 a násl.) poukazoval ještě na jiný možný způsob vzniku podobných děr, totiž z mořských hub. P e t r a s c h e c k však podotýká (s. 616), že již tvar děr ve kvádrech Adrsbašských a Teplických nelze uvésti v soulad s takovýmto způsobem vzniku, a já podle všeho, co jsem po té stránce viděl, mohu s tím jen souhlasiti. F r i č ostatně opírá svoji domněnku jen o nález křemitých jehlic z hub v o p u c e u Chocně (*b*, s. 55); lze sotva pokládati za správné, když bez dotvrzení dalšími nálezy přenáší tento výklad i na pískovce a dalekosáhle jej sevšeobecňuje.

Je docela přirozená myšlenka, že *velké výklenky vyžadovaly ke svému vytvoření mnohem déle trvajícího větrání, že jsou mnohem starší než nepatrné poměrně mřežování.* Největší měrou to ovšem platí o jeskyních tohoto druhu v pískovci. Tu lze docela dobře mysleti, že základ k jejich tvoření byl položen již v době diluviální, ač proto nemusíme vítr pokládati za jejich původce, nýbrž větrání stejného druhu, jako působí dosud, ač z části snad účinnější následkem většího střídání teploty a častějších mrazů v tehdejším stepním podnebí.

Dlouho jsem uvažoval, jak by bylo možno vysvětliti hojnost voštin v některých a nedostatek jich v jiných částech pískovcových skal (sr. s. 20.), ale nedošel jsem k uspokojivému závěru. Dříve se mně zdálo nejpravděpodobnějším vysvětlovati je různým způsobem větrání, v exponovaných polohách že je směrodatný mráz, ve chráněných prosakující voda, jež se tam tak snadno nevypařuje a proto déle a mocněji působí. Došel jsem však později, jak právě vyloženo, ku přesvědčení, že *vznik drobných forem je podmíněn v první řadě růzností ve způsobu stmelení pískovce, že jsou výsledkem selektivního větrání*; nemá na ně valného vlivu, která síla větrání působící převládá, neboť všechny mají stejné účinky, drobíce pískovec v písek. Proto nemohu se zastávati výkladu právě proneseného a musím ponechati řešení svrchu nadhozené otázky na dobu pozdější.

* * *

Shrnuje ke konci hlavní výsledky své práce odpovídám k otázkám, jež jsem položil na počátku, takto:

1. *Podobnost forem v kvádrových oblastech Jičínsko-Turnovské, Saského Švýcarska a Broumovsko-Kladské jde do podrobností, ač je mezi prvními dvěma ještě větší než mezi nimi a třetí.* Příčinu toho třeba pravděpodobně hledati v malé odchylce ve složení pískovce, která by se snad ani podrobnému zkoumání mineralogickému a chemickému neobjevila.[1])

2. *Poměry oblasti Jičínsko-Turnovské rozhodně ukazují, že zvláštní formy pískovcových oblastí z valné většiny nelze považovati za pozůstatek z dob, kdy vládlo jiné podnebí, nýbrž že děkují za svůj vznik vlastnostem kvádrového pískovce, na němž se vliv ovzduší projevuje jinak než na jiných horninách.*

---

[1]) Snad by bylo možno z části to připisovati okolnosti, že tu není čedičových homolí a proto též ne tak silné infiltrace pískovců železitými vodami z nich přicházejícími.

Citovaná literatura.

Otto Bayer: „Alaun und Gips als Mineralbildungen und als Ursachen der chemischen Verwitterung in den Quadersandsteinen des sächsischen Kreidegebietes." Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft, sv. 63, 1911.

R. Beck: „Über die corrodierende Wirkung des Windes im Quadersandstein-Gebiet der sächsischen Schweiz" Z. D. Geol. Ges., s. 46, 1894.

Karel Bischof: „Das Felsen-Labyrinth zu Adersbach in Böhmen". Neues Jahrbuch für Mineralogie etc., ročn. 1844.

A. Daubrée: „Synthetische Studien zur Experimentalgeologie". Deutsche Ausgabe von Adolf Gurt. Brunšvík, 1880.

Richard Engelmann, *a*) Mitteilungen der k. k. Geograph. Gesellschaft in Wien, sv. 56, s. 114; 1913.

b) „Die Terrassen der Moldau-Elbe zwischen Prag und dem böhmischen Mittelgebirge." Geographischer Jahresbericht aus Österreich, sv. IX. 1911.

Kurt Flegel: „Heuscheuer und Adersbach—Weckelsdorf." 82. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 1905.

J. G. Forchhammer: „Geognostische Studien am Meeres-Ufer". N. Jahrb. f. Mineral. etc., sv. 24, 1841.

Antonín Frič, *a*) „Studie v oboru křídového útvaru, VII. část, Chlomecké vrstvy". Archiv pro přírodovědecký výzkum Čech, díl 10, 1897.

b) „Studie . . ., IV. část, Jizerské vrstvy." Archiv . ., díl 5. 1885.

c) „Studie. . ., VI. část, Březenské vrstvy". Archiv . . ., díl 9., 1893.

Gustav Götzinger: „Beiträge zur Entstehung der Bergrückenformen". Geographische Abhandlungen, díl IX., seš. 1. 1907.

H. V. Graber: „Eisenreiche Kernkonkretionen aus dem Quadersandstein der nordböhmischen Kreideplatte." N. Jahrb. f. Mineral etc., příloh. sv. XXV., 1908.

A. v. Gutbier: „Geognostische Skizzen aus der Sächsischen Schweiz". Lipsko, 1858.

Daniel Häberle, *a*) „Über Kleinformen der Verwitterung im Hauptbundsandstein des Pfälzerwaldes." Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereines zu Heidelberg, sv. IX., 1911.

b) „Der Pfälzerwald." Geographische Zeitschrift, ročn. XVII. 1911.

Alfred Hettner: „Gebirgsbau und Oberflächengestaltung der sächsischen Schweiz. Forschungen zur deutschen Landes-und Volkskunde, sv. II. seš. 4. 1887.

b) Die Felsbildungen der sächsischen Schweiz". Geogr. Zeitschr. r. IX. 1903.

c) „Wüstenformen in Deutschland?" Geogr. Zeitschr., r. XVI., 1910.

J. E. Hibsch: „Beiträge zur Geologie des böhmischen Mittelgebirges, II." Tschermak's mineralogische und petrographische Mitteilungen, sv. 19. 1900.

J. Hirschwald: „Handbuch der bautechnischen Gesteinsprüfung." Berlín 1912.

Karel Kořistka: „Popis hor Jizerských a Krkonošských s jižním a východním podhořím jejich". Archiv . . . , díl II. 1877.

Jan Krejčí: „Studie v oboru křídového útvaru v Čechách. I. Všeobecné poměry". Archiv, díl. I. 1870.

W. Łoziński: „Über mechanische Verwitterung der Sandsteine im gemässigten Klima." Bulletin international de l'académie de sciences de Cracovie. Classe de sciences mathém et nat., 1909, I. sémestre.

Emanuel de Martonne: „Traité de Géographie physique". Paříž 1909.

Erich Obst *a*) „Die Oberflächengestaltung der schlesisch-böhmischen Kreideablagerungen." Mitteilungen der Geograph. Gesellschaft in Hamburg; sv. XXIV. 1909.

b) „Wüstenformen in Deutschland?" Geograph. Zeitschr. r. XVII., 1911.

Josef Partsch: „Schlesien I. Das ganze Land." Vratislav 1896.

Wilhelm Petrascheck: „Die Oberflächen-und Verwitterungsformen im Kreidegebiet von Adersbach und Weckelsdorf." Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt, sv. 58, 1908.

Cyril rytíř Purkyně: „Terasy Mže (Berounky) a Vltavy mezi Touškovem nad Plzní a Prahou". Sborník Č. společnosti zeměvědné, sv. XVII., 1912.

Alfred Rathsburg: „Zur Morphologie des Heuscheuergebirges". 18. Bericht der naturwissenschaftlichen Gesellschaft in Chemmitz, 1912.

Salomon: „Die Bedeutung der Messung und Kartierung von gemeinen Klüften und Harnischen, mit besonderer Berücksichtigung des Rheintalgrabens". Z. D. Geol. Ges., sv. 63, 1911.

Sturm: „Der Sandstein von Kieslingswalde in der Grafschaft Glatz und seine Fauna". Jahrb. der K. Preussischen geolog. Landesanstalt; sv. 21, odd. III. 1900.

Ludvík Šnajdr, *a*) „Zbytky diluviální fauny v Prachovských skalách u Jičína". Vesmír, ročn. 12. 1883.

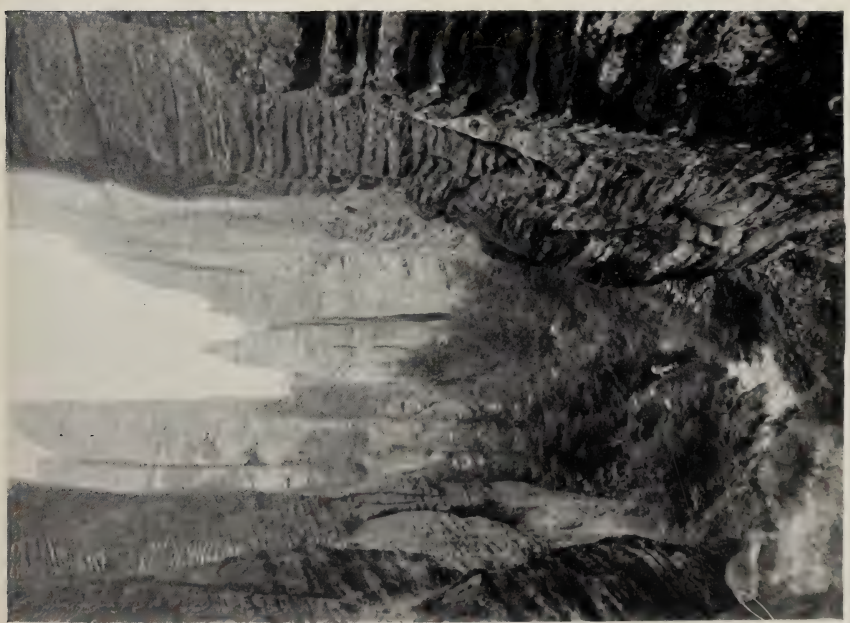
b) „Památky nejdávnější činnosti lidské v Českém Polabí". Pravěk, r. V., 1909.

Johannes Walther: „Das Gesetz der Wüstenbildung". Berlín, 1900.

Jan N. Woldřich: „Diluviale Fauna in den Prachover Felsen bei Jičin in Böhmen." Jahrb der k. k. geolog. Reichsanst., sv. 37, 1888.

Čeněk Zahálka: „Pásmo X. křídového útvaru v Pojizeří". Věstník král. č. společnosti nauk, r. 1905, rozpr. XVII.

2. Partie z Babince v Prachovských skalách.
Mezi dvěma skalami svislá mezera, v níž jsou vklíněny balvany shora spadlé. Na skále v pravo jemné mřežování.



1. Císařská chodba v Prachovských skalách.
Příklad hluboké, bezvodé rokle, jejíž dno spadá ve příkrých stupních. Skály poboční ukazují jemné zvrstvení a svislé mezery, jdoucí v celku rovnoběžně s chodbou.

1. „Skalní město“ nedaleko Valdštejna.
Skalní pilíře, navzájem oddělené svislými mezerami obojí soustavy, ukazují formy větráním zaoblené. Na mezerách vrstevních se místy tvoří velké výklenky.

2. Lahole v Prachovských skalách.
Jedna vrstva se tu zřejmě jeví zvláště přízniva ke tvoření velkých výklenků.

2. Mřežování v Císařské chodbě.
V levo vidět jednoduché dírky, v pravo pěkně vyvinuté mřížky.

1. Skála při cestě ze Sedmihorek na Hrubou Skálu
ukazuje různé drobné formy větrání (nahoře výklenky sloupky oddělené, dole v levo „okno“, v pravo „listky máslového těsta“). Dále zde vidíme nepravidelně zvrstvení, značně odlišné od skutečného sklonu pískovcového souvrství.

1. **Partie z Babince.**
Spadlé balvany ukazují vyvětralé lišty.

2. **Stěna sklepení na hradě Pařezu.**
Na mnoha místech, zvláště ve výklenku viděti dirky, zcela podobné těm, jež nacházíme na přirozených, ovětralých stěnách skalních (srv. tab. III., 2., v levo).

Šumavská jezera

IV.

Laka.

Napsal **V. Švambera.**

(S 1 tabulkou a mapkou.)

Předloženo dne 13. března 1914.

Poprvé objevuje se Laka, pokud víme na mapě Kreybichově[1]) ovšem beze jména. Nedlouho na to bylo jezero skutečně změřeno při pořizování stabilního katastru r. 1837,[2]) při čemž udány také jeho plošné rozměry. Jméno jezera označuje se zde jako Laka See. V známém díle Sommerově[3]) jest jen zmínka, že jezero chová hojně pstruhů. Nadmořskou výšku jezera určil Hochstetter,[4]) jemuž se jezero nezdálo nijak zajímavým. Na starší speciální mapě[5]) kr. Českého nalézáme jezero již zakresleno s obrysy odpovídajícími měřítku mapy a s označením „Laka See". Dílo Wenziga a Krejčího[6]) přináší asi první obrázek jezera, jenž se ovšem naprosto liší od dnešního; jinak dovídáme se z tohoto díla jenom to, že jezero nalézá se osaměle v divokém lese.

Frič[7]) při své návštěvě r. 1871 správně odhadnul hloubku jezera na 8 až 10 stop. Výtěžek zoologické kořisti jeho i assistenta Hellicha[8])

[1]) Kreybich F. J. H., Charte vom Prachiner Kreise. Prag 1831.

[2]) Katastrální mapa: Stadler III. Antheil (slavisch: Stadlowsky odjl 3tj dil). Aufgen. v. Geometer Karl Kozell. VIII. sekční list, 1 : 2880. 1837.

[3]) Sommer, Das Königreich Böhmen. VIII. Prachiner Kreis. Prag 1840, p. XXX a 242.

[4]) Hochstetter F., Die Höhenverhältnisse des Böhmerwaldes. Jahrb. d. k. k. Geol. Reichsanstalt. VII. 1856, p. 325, a *t.* Aus dem Böhmerwald. Außerordentliche Beilage zu Nr. 220 der Allg. Zeitung, 8. August 1855.

[5]) Specialkarte v. Böhmen, 1 : 144.000, list 29.

[6]) Wenzig J u. Krejčí J., Der Böhmerwald. Prag 1860, p. 49 a 51.

[7]) Frič A., Über die Fauna der Böhmerwaldseen. Sitzungsberichte d. kgl. böhm. Ges. d. Wiss. in Prag, 1871, II. (1872) p. 5 u. 9.

[8]) Hellich B., Perloočky země České (Cladocera). Archiv pro přír. prozk. Čech. 3. díl, č. 4, Praha 1878, p. 121.

tvoří až dosud souhrn našich vědomostí o fauně jezera. Fantastické rozměry a hloubku 20 *m* (!) udává pro jezero Möchel.[9]) Zcela krátké líčení jezera nalezneme u Willkomma,[10]) jenž patrně jezero sám navštívil. V té době bylo jezero podle břehů velmi bažinaté a také uprostřed jezera nalézala se velká plocha rákosí. Břehy byly již patrně upraveny, neboť Willkomm mluví zde o lávkách. Nové mapování vojenského ústavu geografického ve Vídni bylo tu provedeno r. 1878 a nová mapa speciální[11]) vydána na jeho podkladu r. 1882. Nalezneme na ní pro jezero nadmořskou výšku 1096 *m*. Časově následuje lesní mapa[12]) zdejšího panství hohenzollernského s nadmořskou výškou jezera 1080 *m* a o rok později cestovní průvodce Řivnáčův,[13]) jenž přejímá údaje Willkommovy, redukuje však značně plochu jezera. Bayberger[14]) sám na jezeru nebyl, zaznamenává však o něm, že lesníci zdejší nestaví jej na roveň ostatním jezerům šumavským. Z řady různých turistických průvodců uvádíme jenom největšího Detterova,[15]) v němž nalezneme nesmyslně velké číslo pro hloubku jezera. Teprve po dosti dlouhé řadě let objevuje se tu nový badatel — dr. P. Wagner.

Při návštěvě 14. srpna 1896 zastihl Wagner jezero na nejnižším stavu, neboť právě tehdáž bylo za účelem lovu pstruhů úplně vypuštěno, takže jenom v části u odtoku nalézala se louže ne více než 0·75 *m* hluboká. Celé ostatní dno jezera mohl tu Wagner spatřiti a právě proto jest tento první a jediný popis jezera Laka zajímavým.

Wagnerovi děkujeme první petrografické poznámky o březích jezera, jakož i poznámky o teplotě přítoku, odtoku a hladiny jezerní a také na základě mapy katastrální skizzu jezera v měřítku 1 : 5000 doplněnou zakreslením ostrovů podle tehdejšího stavu.

Já sám věnoval jsem výzkumu Laka hlavně dny 25. až 27. července 1907, při čemž jsem provedl obdobná měření jako na ostatních jezerech šumavských. Zúčastnili se při tom p. assistent Maule, p. Kracík a p. učitel Erhardt ze Sušice. Účinně podporovali nás p. farář Ivan Soukup z Hůrek a p. revírník Weiss tamtéž. Ještě dvakráte navštívil jsem toho roku jezero a sice 13. a 27. srpna. Také v létech následujících zastavil jsem se někdy na jezeru. Z těchto návštěv uvádím zvláště onu 10. září 1910 s p. lesním Broncem a koncem září 1913 s menší exkursí posluchačů.

---

[9]) Möchel, Průvodce na trati Plzeň-Eisenstein-Deggendorf. Plzeň 1878.

[10]) Willkomm M., Der Böhmerwald. Prag 1878, p. 12 a 14.

[11]) Spezialkarte der Österr.-Ungar. Monarchie. Z. 9 C. VIII. Eisenstein und Viechtach. 1 : 75.000. 1882. Sekce původního mapování Z. 9 C. VIII, SO. 1 : 25.000.

[12]) Karte der Forstverwaltungsbezirke Böhmisch-Eisenstein, Deffernik-Hurkenthal u. Bayer. Eisenstein. gez. v. J. Stehlik im J. 1881. M. 1 *cm* = 331·20 *m*.

[13]) Řivnáčův Průvodce po král. Českém. Praha 1882. p. 585.

[14]) Bayberger F., Geographisch-geologische Studien aus dem Böhmerwalde. Gotha 1886. p. 36 a 37.

[15]) Detter's Illustrierter Führer durch den unteren Bayer- u. Böhmerwald mit Mühlkreis. II. Aufl. Deggendorf 1906. I. Bd., p. 347.

Asi ½ hod. cesty od farní osady Hůrek na 49° 6·5′ s. š., 30° 59·5′ v. d. F. (13° 19·6′ G.) nalézá se malé jezírko, jež v literatuře různě bývá označováno, nejčastěji Lakka n. Laka, také však Lackensee a docela i Laccensee. V české literatuře označuje se někdy jako „Pleso", s čímž nemohu projeviti souhlas.

Jezírko nenalézá se těsně pod stěnou jako některá jiná jezera šumavská, nýbrž v jisté vzdálenosti. Ostatně stěna činí dojem menší příkrosti, než u jiných jezer, což potvrzuje také Wagner, jenž udává zde průměrný sklon na 12°, a jen místy na 30° a na strmých, lysých skalách 40°. Relativní výška stěny činí 250 *m*, při čemž dlužno ještě míti na paměti značnou linearní vzdálenost vrcholového bodu od jezera.

Gümbel na své mapě zakreslil jezero v rule, jež zde vykazuje dvě lože žulová. Wagner, jenž se právě zde věnoval petrografickému ohledání břehů, nemohl pro porost tato místa zjistiti; pouze na jednom místě konstatoval směr vrstev N. 35° W, a zapadání jich v úhlu 55° k jihu. Podle výbrusu zjistil v hornině mimo biotit, muskovit a křemen ještě sillimanit a nerost blížící se orthoklasu; plagioklas se nevyskytl. Wagner praví, že nelze tudíž tuto horninu označovati jako rulu nýbrž nejvýše jen jako rulovitý svor (Gneis-Glimmerschiefer).

Dále na stěně však bylo lze konstatovati žulu a na jednom potůčku varietu svoru velmi bohatého na granáty.

Jezero má, jak z mapy lze viděti, podobu dosti pravidelného obdélníku ve směru od jjz. k ssv. Hráz, přepažující jezero v sv. při odtoku, činí převahou dojem umělý. Byla pořízena již v létech 30tých stol. XVIII., kdy majitel panství Krištof Abele dal zvýšiti stav jezera. Že jezero již jednou bylo ještě menší než dnes, tomu nasvědčují kořeny velkých stromů přirozeně ve dně zarostlé, jež mohl Wagner r. 1896 při vypuštění jezera konstatovati. Podruhé byla hráz upravena r. 1888. Stavidlo nalézá se uprostřed hráze a lze jím jezero úplně vyprázdniti. Přes toto stavidlo děje se hlavní odtok, kdežto starším odtokem na východě odtéká nyní jezero jenom při vyšším stavu. Také v severozápadním cípu jezera prosakuje na jednom místě voda, jak jsem seznal r. 1910. V hrázi nalézají se větší i menší balvany v hnědém jílu. Vykazují místy rovné kluzné plochy, částečně jsou také zaobleny a mírně poškrábány. Také balvany při cestě jsou pěkně zaobleny, jak Wagner konstatoval.

Na jezeře se nalézá několik plovoucích ostrůvků, jichž poloha se každoročně mění; jenom velký ostrov nejdále k jihu posunutý a jen úzkým pruhem vody od východního břehu jezera oddělený má již jistou stabilnost; na tomto ostrůvku zachytila se řada smrčků, z nichž nejvyšší jsou již přes 3 *m* vysoké. Ostatně roste na těchto ostrůvcích ostřice a v ni suchopýr; podklad tvoří většinou rašeliník a mezi tím se nalézá Vaccinium oxycoccos.

Na břehu jezera vládne úplně smrk a jenom místy nalézá se nějaký jeřáb; ostatní porost tvoří hlavně borůvky a kapradí.

Celé jezírko lze dnes na pohodlné cestě obejíti. Není tu ani stopy po nějaké divokosti přírody; spíše působí Laka dojmem přívětivého parkového jezírka. Na březích objevují se balvany, ovšem nikoliv tak veliké, jako jinde. Celý ráz končiny v pozadí mezi oběma přítoky, kde dnes stojí krásné smrky aspoň 90 let staré, ukazuje, že zde jezero sáhalo dříve dále ku stěně, jež dnes nikde nedostupuje k jezeru. Vyjdeme-li zde v jihovýchodním cípu jen několik metrů nahoru, vidíme, jak terrén v odstavcích jest plochý. Již oba přítoky v pozadí do jezera vtékající účinkují velmi značně na zanášení se jezera. Rovněž methoda potopování plovoucích ostrůvků nákladem kamenů v zimě sem svežených urychlí vlastně jen jeho vyplnění. V pozadí jezero přechází ve slať a zde postupují mladé smrčky vůčihledě, následkem čehož bude zbahnělá část ještě více upevněna. Bude zapotřebí veliké dbalosti kníž. hohenzollerské lesní správy, aby Laka jako jezírko ještě na delší dobu bylo zachováno.

Jezero odtéká Jezerním potokem do Křemelné a touto do Vydry.

Nadmořská výška jezera. První číslo pro nadmořskou výšku hladiny Laka sdělil Hochstetter podle vlastního měření, t. 3369·4 víd. stop = 1065 *m* Toto číslo Hochstetterovo citují potom Möchel i Willkomm, kdežto Krejčí udává 3370 stop = 1065 *m*, což jest jenom zaokrouhlené číslo. Partsch korriguje je na 1080 resp. 1082 *m*, ježto nadmořská výška základního bodu Hochstetterova ukázala se jinou, než s jakou Hochstetter počítal. Toto číslo přejímá také lesní mapa Hohenzollernská (1080 *m*) i Bayberger (1082 *m*), kdežto Gümbel má 1090 *m*. Specialní mapa 1 : 75.000 udává 1096 *m* a totéž číslo podle ní Wagner. Nelze nám oddůvodniti správnost tohoto čísla 1096 *m*, ježto však lze všeobecně souditi, že výšky měřené při novém mapování voj. geografického ústavu r. 1878 zasluhují přednost před čísly Hochstetterovými, přijímáme pro nadm. výšku hladiny Laka 1096 *m*. Jest to tudíž nejvýše položené jezero ze všech šumavských.

Plochu jezera udává poprvé stabilní katastr na 4 jitra 1465 čtv. sáhů, podle úředního přepočítání 2·8288, podle mého 2·8294 *ha*. Různí autoři později udávají bez důvodů různá čísla pro plochu Laka, tak Willkomm 7 jiter, Möchel 12 *ha*, Řivnáčův průvodce 3·5 *ha*, Detterův 3 *ha*. Nové planimetrické měření podle mapy provedl Dr. Wagner, jenž dospěl k výsledku 2·5317 *ha*.

Já jsem provedl rovněž nové planimetrické měření podle vlastní mapy a dospěl jsem k výsledku 2·7840 *ha*.

Z této plochy připadalo podle stavu v létě 1907 asi 1600 m^2 na ostrovy, z nichž největší, částečně již upevněný zaujímá ok. 1100 *m*. O vývoji břehů nelze zde dobře mluviti, neboť jezero vykazuje vlastně jenom linie přímočárné bez zátok a výběžků. Délka břehů obnáší 870 *m*.

Nejvzdálenější bod jezera od břehu — asi 44 *m* — nalézá se v části odtokové. Podélnou osu, tedy *délku jezera* udával Wagner na 374, *nej-*

větší šířku na 86 *m*. Podle mých měření jest tu rozdíl nepatrný, spíše o několik metrů méně.

O *hloubkových poměrech* první zmínku činí A. Frič, jenž ji — celkem asi správně — odhadnul na 8 až 10 stop. Nesmyslné číslo 20 *m* udal r. 1878 Möchel a stejně fantastický jest údaj v průvodci Detterovu o průměrné hloubce 16 *m*. Prostý pohled na jezero poučí i úplného laika o nemožnosti takových čísel. Wagner viděl r. 1896 jezero úplně vypuštěné za účelem lovu pstruhů. Zbývala tu jenom při odtoku louže vody nejvýše 0·75 *m* hluboká. Umělá strouha spojovala ji s hlavním přítokem a „serpentiny" vedly ku druhému přítoku. Několik ostrovů, jež ostatně plovou na vodě, spočívalo na bahnitém dnu, v němž tyč dlouhá 3·6 *m* ještě nenalezla pevného dna. Četné kořeny v zadní části jezera a podél jeho břehů ukazovaly, že jezerní plocha bývala ještě menší, dokud ji člověk uměle nezvětšil. Na jemném šedém bahnu šířily se, jak již uvedeno, Myriophyllum, Potamogeton a modrošedé algy. Wagner slyšel od rybáře zdejšího, že během posledních 10 let usadilo se tu aspoň 1 *m* bahna, a přikládá tomu víry. Podle Wagnera mělo by jezero, když by dosáhlo nejvyšší možné hladiny, hloubku 3·75 *m*, při čemž zbývá až ku niveau hráze 0·5 *m*. To shoduje se s mým pozorováním.

Celkový ráz jezera nelákal mne, abych provedl zde profilové měření jako na ostatních jezerech. Nebylo třeba sondovacího stroje, stačila tyč sebraná na břehu jezera, abych konstatoval jeho hloubku.

Podle sdělení p. revírníka Weisse bylo jezero r. 1906 pokud lze vyčištěno od bahna. Týkalo se to jistě hlavně části u odtoku, kde jsem skutečně v odvodňovací rýze nalezl hloubku 3·9 *m*. Právě v části odtokové jest jezero trochu hlubší, než dále ku stěně, celkem však jedná se tu všude o hloubku nepatrnou. Udává-li Wagner 2 *m* jako *střední hloubku* jezera, tu musím dnes pokládati toto číslo za příliš vysoké. Více jak 1·4 *m* střední hloubky nemohu Laka i za nejvyššího stavu vody přiznati. Následkem toho pokládám také Wagnerovo číslo 50.634 m^3 jako *objemu vody* za příliš vysoké, a odhaduji jej přibližně na 40.000 m^3.

O teplotě vody jezerní bylo dosud známo jenom to, co pozoroval Dr. Wagner.[16]) „Teplota pramene na jezerní stěně 14. srpna 1896 byla 4·75°, prvního přítoku 10°, druhého přítoku 8·75°. V zadní části jezera bylo lze konstatovati 6 pramenů, jež obyčejně ústí pod hladinou a mají teplotu 4—5°. Zdejším lidem byly známy podle studeného proudění v této části jezera. Povrch jezera měl teplotu 14·5°, odtok 13°, vzduch současně 11·5°."

Pozorování teploty vykonaná za mé exkurse v červenci a srpnu 1907 sestavuji zde v přehledu:

---

[16]) Wagner P., Die Seen des Böhmerwaldes. Leipzig 1897, p. 54.

	25. VII. 5 h. 30 m. až 6 h. odp.[17])	26. VII. 10 h. dop.[18])	26. VII. 2 h. odp.	26. VII. 4 h. odp.[19])	26. VII. 6 h. odp.	27. VII. 10 h. dop.[20])	27 VII. 12 h. dop.	13. VIII. 4 h. odp.[21])	27. VIII. 1—2 h. odp[22])
vzduch	14·7	17·5	—	—	—	15·5	15	21·5	22·3
povrch vody	14·75	14	15	14	15	14·5	14·5	17·5	14
1 *m*	13·5	13·25	14	13·5	12·7	14	14	16·3	13·2
2 *m*	11	11·5	12	12		12	11·5	14·1	13
3 *m*	10·75	10·5	—	10·5		10·5	10·7	12·75	11·2
dno 3·7 *m* .	10·75		10·5						

Tato měření byla vesměs provedena v nejhlubší části jezera poblíž odtoku.

Teplotu pramene na jezerní stěně u „Kanzel", jehož také Wagner vzpomíná, měřil jsem v poledne 27. července 1907 na 5°.

Teplota přítoků a odtoku měřena byla vícekráte, ovšem vždy jen nedaleko ústí:

Přítok:	do jz. cípu jezera:	do jv. cípu jezera:
25. VII. 1907 v 7 h. večer	9·25°	7·75°
26. VII. 1907 v 10 h. dop.	10·5°	8·5° (10 *m* dále v jezeře 13·5°)
26. VII. 1907 v 1 h. odp.	10°	8·5°
27. VII. v 10 h. 30 m. dop.	9·75°	8°
13. VIII. 1907 ve 4 h. odp.	11·5°	9·5°
27. VIII. 1907 ve 4 h. odp.	10°	9°

Jeví se tudíž jihozápadní přítok vždy o 1 až 2° teplejším, než přítok jihovýchodní.

Odtok:

25. VII. 1907 v 6. h. večer hlavní odtok... 13·25°
27. VII. 1907 v 11 h. dop. „ „ ... 13·5°
27. VIII. 1907 ve 3 h. odp. „ „ ... 13·5°.

Průhlednost a barva vody. Měřil jsem poprvé průhlednost i barvu vody na Laka. Za krásného, slunečného počasí 25. července 1907 v 5 h. odp.

---

[17]) Krásné, slunečné počasí jako den před tím.

[18]) Dopoledne pěkně, ve 3 h. začalo slabě poprchávat — měřeno za deště — po 4 h. značný dešť.

[19]) Po značném dešti.

[20]) Za pěkného počasí.

[21]) Podmračno.

[22]) Pěkně počasí rovněž 2 dny před tím; dříve velké deště.

bílá deska o průměru 30 *cm* byla viditelna v nejhlubší části jezera v hloubce 4 *m*, t. j. až na dně. Pozorovali jsme průhlednost vody ještě 26. července ve 3 h. 30 m. po dešti. Bylo ji ještě dobře viděti na dně v hloubce 3·5 *m* a byla by zde jistě viditelna v hloubce ještě větší.

Barvu vody odhadoval jsem sám 26. července 1907 v 6 h. odpoledne a 27. července 1907 ve 12 h. v poledne pp. Erhardt, Kracík a Maule každý zvlášť okolo stupně č. 15 skály Uleovy, spíše o něco temnější.

O *sněhu* na Laka udává Wagner, že v zimě 1896-97 byla na jednom místě stěny měřena výška jeho 2·5 *m*, a také prý v údolí byla podle značek konstatována výška 2—3 *m*. V přední části jezera, t. j. u odtoku bývá prý sníh poněkud odvát. Wagner výslovně podotýká, že podle všeho nepřichází zde se stržemi sněhovými žádné balvany se stěny do nižších poloh.

Mně sdělil p. revírník Weiss, že v zimě r. 1906-7 bylo na jezeře sněhu průměrně asi 1·5 *m*. Jezero zamrzlo podle jeho zprávy v listopadu 1906 a uvolnilo se od ledu teprve uprostřed května 1907. Ještě počátkem května bylo lze jezditi s potahem přes jezero. Tloušťka ledu byla měřena v té zimě poblíž odtoku na $^3/_4$ *m*.

O *chemii vody jezerní* nemáme dosud žádného pozorování. Pozorování v tomto směru nebyla, jak již praveno, vůbec v mém programu.

O *biologických poměrech* jezera víme pouze tolik, co vynesla návštěva A. Friče a jeho assistenta B. Hellicha v létě r. 1871. Frič [23]) srovnávaje Laka s jezerem Prášilským, praví, že Laka pro svou mělkost (sotva 8—10′) činí docela jiný dojem, než j. Prášilské. Není tu Holopedium, a jenom Polyphemus oculus upomíná zde na horská jezera. Veškeré ostatní druhy byly v Čechách nalezeny také v nižinách, především na tichých místech a v tůních polabských. Frič nalezl v Laka tyto druhy: Daphnia longispina, D. sima, D. quadrangula, D. mucronata, Lynceus lacustris, L. lamellatus, L. leucocephalus, L. affinis, L. sphaericus, Macrothrix laticornis, Polyphemus oculus. Nápadným jest, že zde naprosto se nedostává Cyclops a Diaptomus castor, jenž jinak všude se vyskytá.

Hellich [24]) nalezl zde tytéž druhy perlooček jako v jezeru Prášilském a mimo to ještě Simocephalus vetulus, Scapholeberis mucronata, Macrothrix laticornis, Streblocerus serricaudatus, Eurycercus lamellatus.

Za své návštěvy r. 1907 pozoroval jsem na Laka ohromné množství pstruhů. Celé jezero ozývalo se zrovna vymrštováním se pstruhů nad povrch. Za to jindy nepozoroval jsem zde při celé návštěvě ani jediného. Revírník p. Weiss sdělil mi že se jich tu ročně uloví 400—500, aniž by

[23]) Frič A., Über die Fauna der Böhmerwaldseen. Sitzungsberichte d. kgl. böhm. Ges. d. Wiss. Prag. 1871, II., p. 9.

[24]) Hellich B., Perloočky země české (Cladocera). Archiv pro přírodov. prosk. Čech. 3. díl, č. 4. Praha 1878, p. 121.

bylo znáti nějaký úbytek. Toto veliké množství pstruhů v Laka konstatoval již dávno Sommer ve svém díle a já sám jsem přesvědčen, že na žádném jezeru šumavském není tolik pstruhů jako na Laka.

Také jezera Laka užívá se ku zvýšení stavu vodního v potocích při plavení dříví polenového.

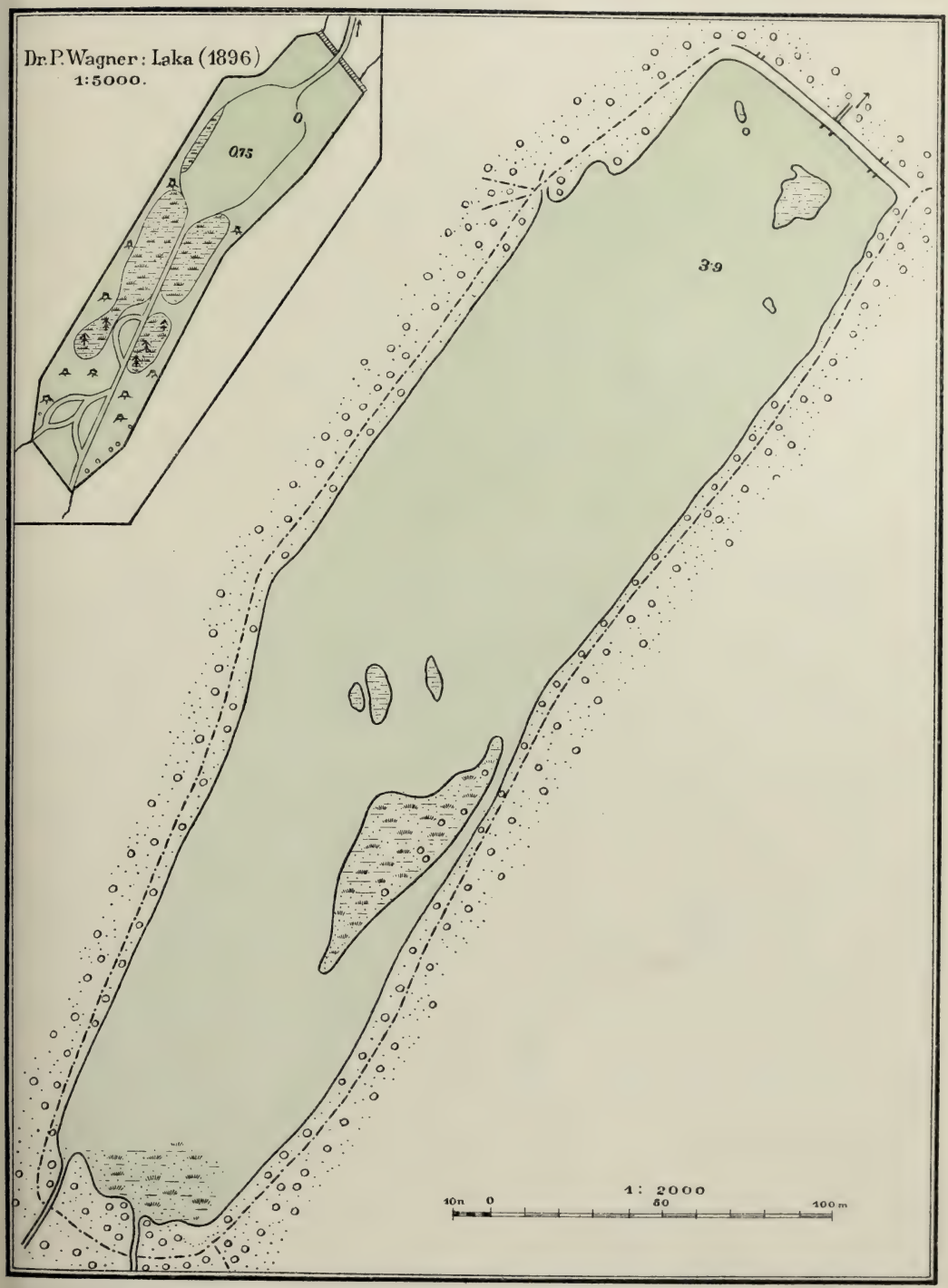
Jezero náleží ku kníž. hohenzollerskému revíru v Debrníku (Deffernik).

Pohled na Laka s hůry od „Kanzel".

Fot. V. Švambera.

Pohled přes jezero od hlavního přítoku ku odtoku.

Fot. V. Švambera.



V. ŠVAMBERA: Laka (1096 m.)

podle měření v srpnu 1907.

O tvaru meteorického roje komety Halleyovy.

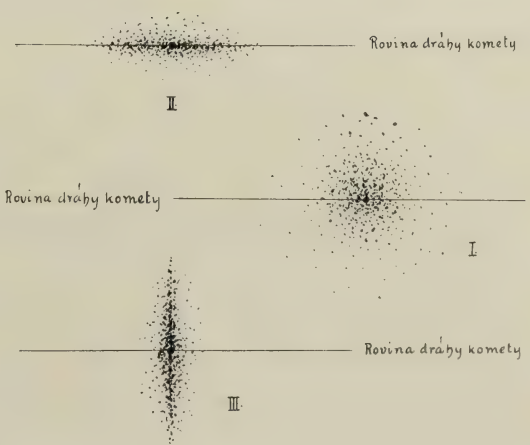
Napsal

Dr. JINDŘICH SVOBODA.

(Předloženo dne 26. března 1914.)

S 9 vyobrazeními v textu.

V předešlé své práci o souvislosti Aquarid a Orionid s kometou Halleyovou vyšel jsem z předpokladu, že meteority vyplňující dráhu komety po celé její délce jsou v místech, kde Země proud potkává, rozloženy souměrně kol dráhy komety, že totiž normálným řezem roje jest kruh (obr. 1., I.). Tento předpoklad jest jaksi středním případem mezi dvěma krajními. Jeden krajní případ by byl, že meteority jsou v největším množství rozloženy v rovině dráhy komety — normálným řezem roje byla by protáhlá ellipsa, jejíž velká poloosa ležela by v průsečnici normálného řezu s rovinou dráhy komety (obr. 1., II.). Tento předpoklad sloužil dosud za východisko při odvozování souvislosti rojů meteorických s kometami, neboť objevování se meteoritů bylo hledáno v uzlu dráhy komety s dráhou zemskou. Proto nebylo možno také dospěti touto cestou k nalezení souvislosti Orionid s kometou Halleyovou, neboť roj objevuje se kolem 19. října a Země jde uzlem až v druhé polovici listopadu ve značné vzdálenosti od dráhy komety.

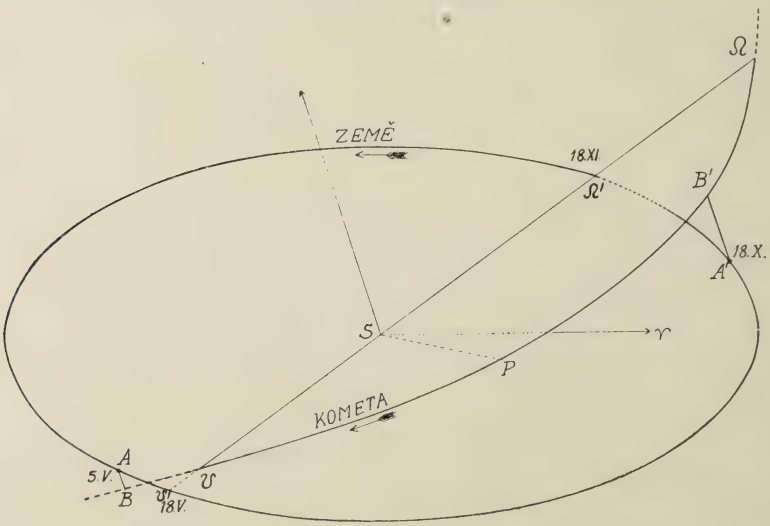


Obr. 1.

V druhém krajním případu byly by meteority rozloženy hlavně kolmo k rovině dráhy komety — normálným řezem byla by protáhlá ellipsa, jejíž velká osa je kolmá k rovině dráhy (obr. 1., III.).

Na obr. 2. jest nakreslena vzájemná poloha dráhy zemské a dráhy komety Halleyovy. Body A a A' značí polohu Země, kdy jde nad a pod dráhou komety, t. j. když kolmice spuštěná se Země na rovinu dráhy komety protíná dráhu v bodech B a B'.

Applikujme tyto tři případy na náš roj. Všimneme-li si vzájemné polohy dráhy Země a komety, vidíme, že v případě I. by mělo nastati maximum objevování se meteoritů v době, kdy Země jest dráze komety nejblíže. Kdyby platil případ II., objevovaly by se meteority v největším počtu blíže k uzlům (Ω', $\mho'$), tedy až *po* době, kdy Země je dráze komety nejblíže, kdežto v případě III. mělo by maximum Aquarid a Orionid nastati *před* touto dobou, tedy blíže k místům A' a A.



Obr. 2.

Z výsledků, k nimž došel jsem v první práci při hledání nejkratší vzdálenosti Země od dráhy komety, dá se odvoditi, že Země

je nejblíže dráze komety 8.—9. května a 24.—25. října ve vzdálenosti 10 a 23 mill. *km*,

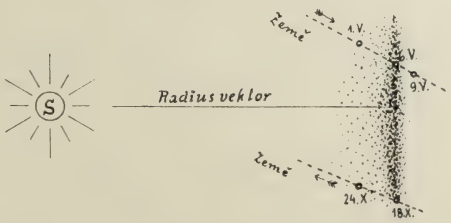
jde uzly asi 18. května a 18. listopadu ve vzdálenosti asi 20 a 60 mill. *km*,

jde nad a pod dráhou komety 5. května a 18. října ve vzdálenosti 11 a 25 mill. *km*.

Dle pozorování vykonaných v posledních létech připadá maximum Aquarid na 6. květen a maximum Orionid na 19. říjen, což se velmi blíží dobám 5. května a 18. října, kdy jde Země nad a pod dráhou komety, t. j. případu III. (obr. 1.).

Vedeme-li tedy normálný řez ku dráze komety v místech, kde roj Zemi potkává, prochází nejvíce meteoritů protáhlou ellipsou, jejíž velká poloosa stojí k rovině dráhy komety kolmo. Jest přirozeno, že přechod

kolem maxima není náhlý, ale je zajímavo, že není k maximu symetrický. Tak Aquaridy začnou se objevovati již od 1. května a přestávají krátce po 6. květnu, ačkoli se Země dráze komety ještě přibližuje. Rovněž Orionidy objevují se v době od 17. října až skoro do konce října. Nápadné jest, že maximum nepadá doprostřed těch dob. U Orionid mohli bychom to vysvětliti velikou vzdáleností Země od dráhy komety před 18. říjnem, ale u Aquarid tento výklad připustiti nelze. Kdyby meteoritů ubývalo směrem od maxima na obě strany stejnoměrně, objevovaly by se mnohem delší dobu po 6. květnu než před 6. květnem, neboť se Země dráze komet po 6. květnu ještě blíží. Z toho můžeme souditi, že meteoritů ubývá směrem od maxima k Slunci ponenáhlu, kdežto směrem od Slunce velmi rychle, jak viděti na obr. 3., který udává rozdělení drah meteoritů v řezu vedeném průvodičem kolmo k rovině dráhy komety; tečkované čáry naznačují průchod Země rojem v jednotlivých průřezech.



Obr. 3.

Tím jsem naznačil tvar roje v blízkosti míst, kde potkává Zemi. Z výsledků odvozených v předešlé práci lze však souditi také na tvar roje podél dráhy.

Dle pozorování jsou souřadnice radiantu

		AR	δ
Aquarid:	6. květen	338^0	$-\ 2^0$,
Orionid:	19. říjen	92^0	$+\ 15^0$.

Výpočtem obdržel jsem souřadnice radiantu

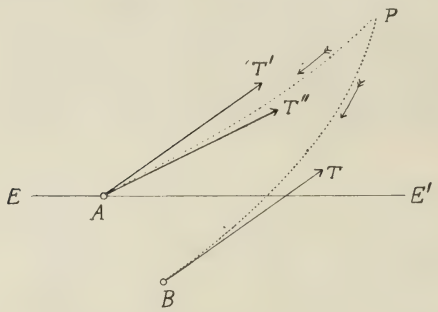
Aquarid:	6. květen	$336{\cdot}2^0$	$+\ 0{\cdot}6^0$,
Orionid:	19. říjen	$92{\cdot}7^0$	$+\ 19{\cdot}8^0$.

Kdežto v rektascensi jeví se rozdíly malé ($+\ 1{\cdot}8^0$ a $-\ 0{\cdot}7^0$), jsou rozdíly v deklinaci nápadnější ($-\ 2{\cdot}6^0$ a $-\ 4{\cdot}8^0$).

Výpočet souřadnic radiantu byl tu proveden za předpokladu, že meteority v roji běží parallelně s dráhou komety, t. j. že meteority potkávající Zemi mají směr jako kometa v bodě tomu místu na dráze zemské nejbližším. Kdyby tento předpoklad byl splněn, měl by roj na základě toho, co bylo nahoře dokázáno, tvar obruče a dráha každého jednotlivého meteoritu běžela by stále rovnoběžně s dráhou komety. To však neodpovídá skutečnosti, neboť meteority běžící nad nebo pod dráhou komety musí se nutně pohybovati v rovinách k rovině dráhy komety skloněných a průsečnice všech těchto rovin procházejí Sluncem. Než v první práci byl tento předpoklad nutný a úplně by byl pro naši úlohu dostačoval udávaje průměrný směr meteoritů Zemi potkávajících, kdyby uzlové body drah jednotlivých meteoritů byly po celé dráze komety stejnoměrně roz-

troušeny. Jest tedy hledati příčinu nesouhlasu vypočtených souřadnic radiantů se souřadnicemi odvozenými z pozorování v tom, že u meteoritů Zemi potkávajících převládá určitý směr, čili jinými slovy, že uzly drah jednotlivých meteoritů padají většinou ke dvěma místům na dráze komety.

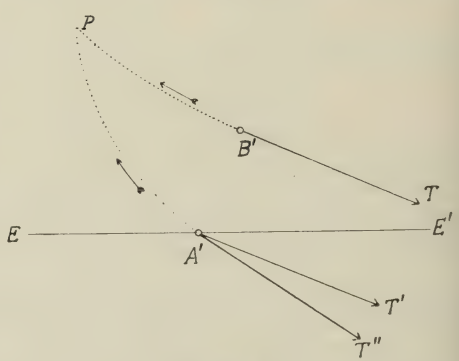
Která jsou to místa na dráze komety, najdeme následující úvahou. Veďme body B a B' (obr. 2.) oskulační roviny ku dráze komety a zvolme je za nákresné roviny pro obr. 4. a 5. Přímka E, E' značí v obou případech průsek oskulační roviny s rovinou ekliptiky a body A, A' jsou ony posice Země nad a pod dráhou komety.



Obr. 4.

V případě Aquarid (obr. 4.) sestupují v místě A meteority pod ekliptiku; má tedy radiant severní heliocentrickou šířku. Při prvním výpočtu byla brána jako úhel, který svírá opačný směr tečny ku dráze komety v místě B (BT resp. AT') s rovinou ekliptiky. Poněvadž ale deklinace a tedy také heliocentrická šířka pozorovaná jest menší, převládá u meteoritů Zemi potkávajících směr $T''A$, který se více přiklání k rovině ekliptiky. Z toho vidíme, že dráhy Aquarid rozbíhají se většinou směrem od perihelu s dráhou komety, čili jinými slovy, výstupné uzly jejich drah s dráhou komety padají větším dílem k perihelu, uzly sestupné pak k afelu komety.

Heliocentrická šířka Orionid (obr. 5.) jest jižní, neboť meteority v místě A' vystupují nad ekliptiku. Počtem vychází deklinace kladná a jest příliš veliká proti pozorované. Vykazují tedy dráhy meteoritů k ekliptice větší sklon ($T''A'$) než do počtu vzatý směr komety v bodě B' (TB' resp. $T'A'$) Z toho vidíme, že dráhy Orionid se větším dílem sbíhají s dráhou komety směrem k perihelu, kam tedy padá většina uzlů výstupných. S velkou pravděpodobností můžeme souditi, že meteority, které jdou v místě B pod dráhou komety a v místě B' nad dráhou komety, mají většinou uzly sestupné v perihelu komety.



Obr. 5.

Obíhá tedy většina meteoritů v rovinách, jichž průsečnice s rovinou dráhy komety svírají se spojnicí perihelu a afelu komety jen malé úhly nebo leží dokonce v ní.

Co jsme svrchu odvodili jen přibližnou úvahou, pokusíme se doložiti počtem. Vypočítejme souřadnice radiantu Aquarid a Orionid za předpokladu, že dráhy meteoritů jsou shodné ellipsy s dráhou komety Halleyovy, a že roviny těchto drah tvoří svazek, jehož osou jest spojnice perihelu s afelem komety. Tento předpoklad velmi blízce odpovídá tomu, co jsme nahoře o tvaru meteorického proudu dokázali: Uzly drah meteoritů s dráhou komety padají do perihelu a afelu komety a meteority vyskytují se v největším množství na obou stranách dráhy komety skoro kolmo k rovině dráhy.

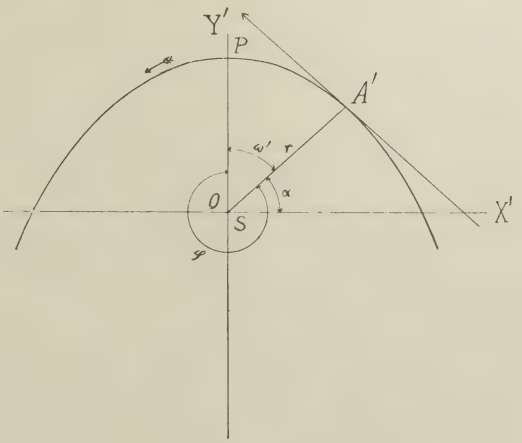
Otočením dráhy komety kol osy SP (obr. 2.) povstane rotační ellipsoid. Na povrchu tohoto ellipsoidu v pásu rozkládajícím se po obou stranách dráhy komety a zúžujícím se směrem k afelu a perihelu jsou rozloženy dráhy většiny meteoritů. Ellipsoid protíná dráhu zemskou ve dvou bodech. Nalezením těchto bodů, ovšem jsou-li dráze komety dostatečně blízko, obdržíme doby, kdy se meteority objevují v největším množství.

Jsou dány elementy dráhy komety

$$\omega,\ \Omega,\ i,\ (p),\ a,\ e$$

a elementy dráhy meteoritů Zemi v určitém bodě její dráhy potkávajících buďtež

$$\omega',\ \Omega',\ i',\ (p),\ a,\ e.$$



Obr. 6.

Když do rovnice dráhy komety (obr. 6.)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

dosadíme za r vzdálenost Země od Slunce v místech, kde meteority Zemi potkávají, jest φ pravou anomalií bodu ellipsy, který při jejím otáčení kolem osy SP padne na dráhu zemskou. Pak

$$\cos \varphi = \frac{p - r}{r e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Do kterého kvadrantu patří φ, rozhodneme následovně. Má-li kometa perihel nad rovinou ekliptiky, musí býti nutně pro uzel

výstupný	sestupný
$\varphi \geqq 180^0$	$\varphi \leqq 180^0$

Je-li perihel komety pod ekliptikou, jest tomu naopak.
Vzdálenost perihelu od uzlu

$$\omega' = 360^0 - \varphi \quad | \quad \omega' = 180^0 - \varphi \quad \ldots \quad (2)$$

Z trojúhelníka $K\,M\,P$ (obr. 7. *a*, *b*) vypočítáme

$$\sin i' = \frac{\sin \omega}{\sin \omega'} \sin i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

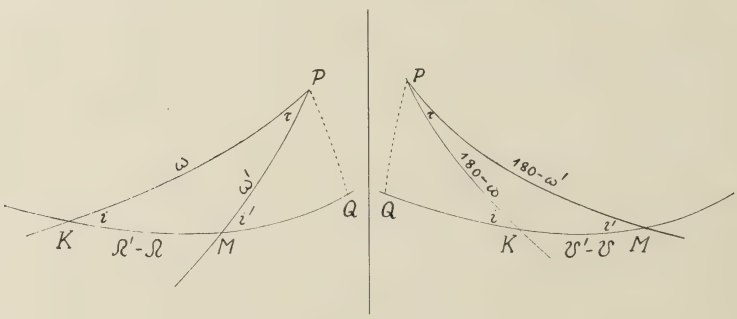
Označíme-li délku oblouku $K\,Q = u$ a $M\,Q = v$, obdržíme z pravoúhlých trojúhelníků $K\,Q\,P$ a $M\,Q\,P$

$tg\ u = cos\ i\ tg\ \omega$	$tg\ u = -cos\ i\ tg\ \omega$[1])
$tg\ v = cos\ i'\ tg\ \omega'$	$tg\ v = -cos\ i'\ tg\ \omega'$
$\Omega' - \Omega = K\,M = u - v$	$\mathfrak{V}' - \mathfrak{V} = K\,M = v - u$
$\Omega' = u - v + \Omega$	$\Omega' = v - u + \Omega$ . . (4)

Je-li $\odot$ délka Slunce v době, kdy meteority Zemi potkávají, jest

$\odot = \Omega' + 180^0$	$\odot = \Omega'$ . . . . (5)

Pro takto vypočtené $\odot$ najdeme v efemeridách příslušné datum.



Obr. 7.

Řešení rovnic (1)—(5) nelze provésti najednou, neboť neznáme přesně r. Poněvadž ale délka průvodiče Země se pomalu mění, dostaneme žádané datum s dostatečnou přesností, když za r dosadíme hodnotu, která odpovídá přibližně době, kdy meteority Zemi potkávají. Jedná-li se o nalezení dosud neznámé souvislosti, stačí při prvním výpočtu dosaditi $r = 1$, vypočísti $\odot$, k tomu najíti v efemeridách příslušné r a počet opakovati, až je úplná shoda, čehož docílíme velmi brzy. Vzdálenost Země od dráhy komety v místě, kde roj potkává, obdržíme velmi přibližně, když vypočítáme délku oblouku, který opíše bod M (obr. 7.) při otočení dráhy komety kol osy $S\,P$. Je-li τ úhel, který svírá dráha meteoru s dráhou komety, jest

$$\sin \tau = \frac{\sin i}{\sin \omega'} \sin (\Omega' - \Omega)$$

Pak délka oblouku, který opíše bod M, a tedy velmi přibližně vzdálenost Země od dráhy komety jest

$$l = r\ arc\ \tau\ .\ \sin \omega' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

[1]) u a v v mezích $0^0 - 180^0$.

Poněvadž úhel τ musí býti malý, aby Země roj potkávala, můžeme arcus nahraditi sinem a psáti

$$l \doteq r \sin i \sin (\Omega' - \Omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

Do roviny dráhy meteoritu Zemi potkávajícího položíme souřadný systém $O\,X'\,Y'$ (obr. 6.) tak, že počátek O leží ve středu Slunce a osa $O\,Y'$ směřuje k perihelu.

Bod A' má souřadnice

$$x' = r \cos \alpha = -r \sin \varphi$$
$$y' = r \sin \alpha = r \cos \varphi.$$

Směrnice tečné v tom bodě jest

$$\frac{d\,y'}{d\,x'} = \frac{\sin \varphi}{e + \cos \varphi} = tg\ \sigma,$$

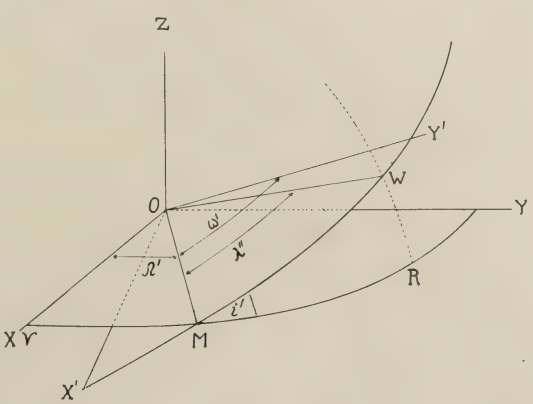
když σ jest úhel, který svírá tečna s kladným směrem osy X'. Úhel σ vypočítáme z rovnic

$$\sin \sigma = -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{(e + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}}$$
$$\cos \sigma = -\frac{e + \cos \varphi}{\sqrt{(e + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Jsou tedy souřadnice pravého radiantu W (obr. 8.) v systému $O\,X'\,Y'$

$$\lambda'' = 180^0 + \sigma, \quad \beta'' = 0.$$

Ekliptikální souřadnice pravého radiantu v systému $O\,X\,Y\,Z$ λ, β obdržíme z trojúhelníka $M\,R\,W$ (obr. 8.), kdež $M\,W = \lambda'' + \omega' - 90^0 = 90^0 + (\sigma + \omega')$, $M\,R = \lambda' - \Omega'$, $R\,W = \beta'$:



Obr. 8.

$$\cos \beta' \sin (\lambda' - \Omega') = \cos (\sigma + \omega') \cos i'$$
$$\cos \beta' \cos (\lambda' - \Omega') = -\sin (\sigma + \omega') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
$$\sin \beta' = \cos (\sigma + \omega') \sin i'.$$

Známým způsobem pak přejdeme k aequatoreálným souřadnicím zdánlivého radiantu.

Schema výpočtu.

Jsou dány elementy dráhy komety

$$\omega,\ \Omega,\ i,\ (p),\ a,\ e$$

a přibližné průvodiče Země v místech, kde roj tuto potkává v uzlu

výstupném	sestupném
r_1	r_2

$$\cos\varphi = \frac{p - r}{r\,e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Je-li perihel komety nad ekliptikou, jest

$$\varphi_1 > 180^0 \qquad | \qquad \varphi_2 < 180^0,$$

je-li perihel pod ekliptikou, jest

$\varphi_1 < 180^0$	$\varphi_2 > 180^0$
$\omega_1' = 360^0 - \varphi_1$	$\omega_2' = 180^0 - \varphi_2$ . . (2)

$$\sin i' = \frac{\sin\omega}{\sin\omega'}\sin i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$tg\,u_1 = \cos i\, tg\,\omega$	$tg\,u_2 = -\cos i\, tg\,\omega$
$tg\,v_1 = \cos i_1'\, tg\,\omega_1'$	$tg\,v_2 = -\cos i_2'\, tg\,\omega_2'$. (4)
$\Omega_1' = u_1 - v_1 + \Omega$	$\Omega_2' = v_2 - u_2 + \Omega$
$\odot_1 = \Omega_1' + 180^0$	$\odot_2 = \Omega_2'$ . . . . . (5)

Je-li mezi $\odot$ a r souhlas dostatečný, najdeme v efemeridách pro $\odot$ příslušné časy

$$t_1 \qquad | \qquad t_2.$$

Není-li souhlas mezi r a $\odot$ dostatečný, opakujeme řešení rovnic (1)—(5) znovu vycházejíce od r, které jsme našli v efemeridách pro právě vypočtené $\odot$, až jest souhlas patřičný.

$$l = r\sin i\sin(\Omega' - \Omega) \quad \ldots\ldots\ldots (6')$$

$$\sin\sigma = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(e+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}}$$

$$\cos\sigma = -\frac{e+\cos\varphi}{\sqrt{(e+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\begin{aligned} \cos\beta'\sin(\lambda' - \Omega') &= \cos(\sigma + \omega')\cos i' \\ \cos\beta'\cos(\lambda' - \Omega') &= -\sin(\sigma + \omega') \quad \ldots\ldots (8) \\ \sin\beta' &= \cos(\sigma + \omega')\sin i' \end{aligned}$$

$$L = 270^0 + \odot + \frac{e}{\sin 1'} \sin (\odot - \tilde{\omega})$$

$$\frac{e}{\sin 1'} = 57{\cdot}'6 \quad , \quad \tilde{\omega} = 101^0\,13{\cdot}2' + 1{\cdot}'028\,(t - 1900)$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \sin \psi &= \sin \beta' \\ \sin \vartheta \cos \psi &= \cos \beta' \sin (\lambda' - L) \\ \cos \vartheta &= \cos \beta' \cos (\lambda' - L) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}{\frac{2}{r} - 1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$tg\, \chi = \frac{\sin \vartheta}{\frac{v}{V} + \cos \vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin (\lambda - L) &= \sin (\vartheta - \chi) \cos \psi \\ \cos \beta \cos (\lambda - L) &= \cos (\vartheta - \chi) \\ \sin \beta &= \sin (\vartheta - \chi) \sin \psi \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sin m \sin M &= \sin \beta \\ \sin m \cos M &= \cos \beta \sin \lambda \\ \cos m &= \cos \beta \cos \lambda \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin \alpha &= \sin m \cos (M + \varepsilon) \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos m \\ \sin \delta &= \sin m \sin (M + \varepsilon) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Výpočet.

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 111^0\,42' \\ \Omega &= 57\ \ 16 \\ i &= 162\ \ 13 \end{aligned}\right\} 1910{\cdot}0$$

$$\begin{aligned} a &= 17{\cdot}9456 \\ e &= 0{\cdot}9673 \\ p &= 1{\cdot}1744. \end{aligned}$$

Uzel výstupný, Orinoidy.

Uzel sestupný, Aquaridy.

Řešení rovnic (1)—(5) provedl jsem trojím parallelním výpočtem pro

17. říjen	$r = 0{\cdot}9963$	4. květen	$r = 1{\cdot}0086$
19. „	$r = 0{\cdot}9957$	6. „	$r = 1{\cdot}0091$
21. „	$r = 0{\cdot}9952$	8. „	$r = 1{\cdot}0096$

Z toho obdržel jsem

$$\varphi = \begin{cases} 280^0\,39' & 80^0\,13' \\ 280\ 42 & 80\ 15 \\ 280\ 44 & 80\ 17 \end{cases}$$

$$\omega' = \begin{cases} 79^0\,21' & 99^0\,47' \\ 79\ 18 & 99\ 45 \\ 79\ 16 & 99\ 43 \end{cases}$$

$$i' = \begin{cases} 163^0\,13' & 163^0\,16' \\ 163\ 13 & 163\ 16 \\ 163\ 13 & 163\ 16 \end{cases}$$

$$u = \quad 67^0\,19' \qquad 112^0\,41'$$

$$v = \begin{cases} 101^0\ 7' & 100^0\,12' \\ 101\ 9 & 100\ 10 \\ 101\ 12 & 100\ 8 \end{cases}$$

$$\Omega' = \begin{cases} 23^0\,28' & 44^0\,47' \\ 23\ 26 & 44\ 45 \\ 23\ 23 & 44\ 43 \end{cases}$$

$$\odot = \begin{cases} 203^0\,28' & 44^0\,47' \\ 203\ 26 & 44\ 45 \\ 203\ 23 & 44\ 43 \end{cases}$$

Pro vypočtěné $\odot$ najdeme v Berl. Jahrb. 1910 data 17. října a 6. května.

Ze vzorce (6′) obdržíme pro ty dny vzdálenosti Země od dráhy komety

$$l = 0{\cdot}169 \doteq 25 \text{ mill. } km \qquad 0{\cdot}067 \doteq 10 \text{ mill. } km.$$

Tyto výsledky velmi dobře souhlasí s hořeními předpoklady. V případě Orionid nastává maximum 19. října, jest tedy poněkud posunuto, což jest přirozené (obr. 3.), k době, kdy dráha komety jest dráze zemské nejblíže (24.—25. října). V případě Aquarid jest souhlas úplný, neboť dráha komety jest v té době již dosti blízko dráze zemské.

V dalším počítal jsem pro ty dny (17. říjen a 6. květen) souřadnice radiantu.

Z formulí (7) obdržel jsem

$$\sigma = 139^0\,32' \qquad 139^0\,4'$$

a z (8) ekliptikální souřadnice pravého radiantu

$\lambda' =$ 73° 22′ 355° 17′
$\beta' =$ — 12° 59′ + 12° 52′

Délka apexu

$L =$ 114° 24′ 313° 57′

Z formulí (9)

$\psi =$ 160° 38′ 18° 45′
$\vartheta =$ 42° 41′ 43° 53′

(10)

$\frac{v}{V} =$ 1·3919 1·4006

(11)

$\chi =$ 17° 41′ 18° 6′

Pro ekliptikální souřadnice zdánlivého radiantu obdržel jsem z (12) tyto hodnoty

$\lambda =$ 90° 39′ 338° 32′
$\beta =$ — 8 4 + 8 2,

které pomocí vzorců (13) a (14) ($\varepsilon = 23° 27'$) převedl jsem na souřadnice aequatoreální:

$\alpha =$ 90° 41′ 337° 10′
$\delta =$ + 15° 23′ — 0° 55′.

Obr. 9.

Dostáváme tedy výpočtem souřadnice radiantu:

	AR	δ	maximum
Aquarid	337·2°	— 0·9°	6. květen,
Orionid	90·7°	15·4°	17. říjen,

které mnohem lépe než souřadnice odvozené v práci prvé souhlasí s pozorovanými souřadnicemi:

Aquarid	338°	— 2°	6. květen,
Orionid	92°	+ 15°	19. říjen.

Rozdíly v rektascensi (+ 0·8° a + 1·3°) i v deklinaci (— 1·1° — 0·4°) leží úplně v mezích pozorovacích chyb.

Tím jest velmi pravděpodobně doložena svrchu uvedená *domněnka, že dráhy většiny meteoritů v roji komety Halleyovy jsou shodné ellipsy s dráhou komety a roviny jejich protínají se ve spojnici perihelu s afelem komety.* Jinými slovy: Otočením dráhy komety Halleyovy kolem spojnice perihelu s afelem vznikne rotační ellipsoid, na jehož povrchu kol dráhy komety jsou rozloženy dráhy většiny meteoritů v pásu zužujícím se směrem k perihelu a afelu (obr. 9.).

□ □ □

O štěpení racemických cukrů opticky činným amylmerkaptanem a o některých nových merkaptalech.

Podávají

prof. **E. Votoček** a Doc. Dr. **V. Veselý.**

Předloženo dne 24. dubna 1914.

Racemickými nazýváme, jak známo, takové opticky inaktivné sloučeniny[1]) organické, jež vznikly kombinací ekvimolekulárných množství dvou optických antipodů, anebo ony, jež se dají v antipody řečené rozložiti.

Methody ku štěpení racemických látek (po případě inaktivných směsí $[d + l]$) podal v klassických svých pracech Pasteur. Jsou to:

1. Methoda biochemická, při níž působením vhodného mikroorganismu odstraní se jedna z aktivných složek, takže zbytek skládá se z opticky činné složky druhé. Tak na př. zpracovává plíseň penicillium glaucum kyselinu hroznovou (resp. její soli) na opticky aktivnou formu tím, že zruší složku *d* (kyselinu pravovinnou), načež zbývá složka *l* (kyselina levovinná).

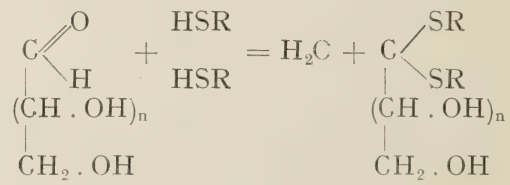
2. Samovolné štěpení racemické látky v enantiomorfné krystally, jež dají se mechanicky od sebe odděliti; tak se rozpadá ku př. hroznan sodnato-ammonatý, krystalluje-li pod 28°, v pravovinan a levovinan.

3. Štěpení pomocí opticky aktivných činidel, jimiž složky dané látky racemické převádíme v deriváty nestejných vlastností fysikálných (zvláště nestejné rozpustnosti), jež rovněž více méně snadno lze od sebe krystallisací odděliti. Tak sráží se z kyseliny hroznové alkaloidem chininem pravovinan chininu (tíže rozpustný), kdežto levovinan zásady té zbývá v roztoku.

[1]) Vedle racemických sloučenin známe též inaktivné směsi optických antipodů, vzniklé z ekvimolekulárných množství látky pravotočivé a levotočivé bez chemického sloučení.

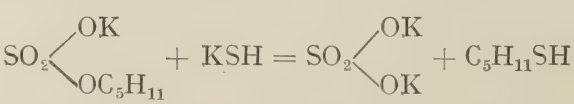
Těchto tří klassických method Pasteurových bylo během doby s úspěchem použito ku štěpení (po případě aktivování) přečetné řady sloučenin racemických nebo směsí inaktivných. Až do r. 1903 bylo však methody pod 3. uvedené používáno jen na štěpení inaktivných kyselin aktivnými zásadami nebo inaktivných zásad aktivnými kyselinami, kdežto v řadě vlastních karbonylových sloučenin, zvláště cukrů aldehydických, první pokusy toho druhu provedl jmenovaného roku teprve C. Neuberg. Užil totiž *l*-menthylhydrazinu k rozštěpení racemické arabinosy a za nějaký čas potom spolu s M. Federerem *d*-amylfenylhydrazinu k štěpení racemické arabinosy i racemické galaktosy v opticky složky aktivné.

Ještě před tím, než jmenované práce vyšly, zabývali jsme se myšlenkou užiti k štěpení racemických cukrů snadnosti, s jakou látky ty se kondensují u přítomnosti koncentrované kyseliny solné s alkylmerkaptany v merkaptaly dle schematu:



K dosažení cíle našeho potřebovali jsme ovšem opticky aktivného merkaptanu a jako takový uznali jsme za poměrně nejpřístupnější příslušný derivát opticky aktivného amylalkoholu, jehož přípravu v čisté formě umožnil Marckwald svými methodami. Mezi tím, co jsme byli zaměstnáni zdlouhavou přípravou řečeného *d*-amylalkoholu, vyšly zmíněné práce z laboratoře Neubergovy. V druhé z nich nalezli jsme poznámku, že autoři hodlají ku štěpení racemických sloučenin karbonylových užiti též přeměny v alkoholy, acetaly, merkaptaly atd. Se zřetelem na to, že si autoři toto thema na čas vyhradili, upustili jsme tehdáž od dalších svých pokusů ve směru merkaptalů a jali se v nich pokračovati teprve roku loňského, tedy osm let po uveřejnění jmenovaných prací, jelikož jsme se právem mohli domnívati, že autoři řečení thematu toho zanechali.

K účelům svým upravili jsme si větší množství drahocenného, čistého *d*-amylalkoholu, převedli tento v příslušný amylsíran a z něho získali *d*-amylmerkaptan dle reakce:



Opticky aktivným amylmerkaptanem tímto rozdělili jsme racemickou arabinosu v *d*-amylmerkaptal *l*-arabinosy a *d*-arabinosy, z čehož

vyplývá, že lze methody té vskutku použiti ku karakterisaci racemických nebo obecně (*d* + *l*) sloučenin.

Aby se získal opticky aktivný amylalkohol z prodejného amylalkoholu, jenž jest směsí *d*-amylalkoholu s inaktivným isoamylalkoholem, jest třeba oba tyto alkoholy od sebe odděliti. Tento velmi nesnadný úkol rozřešil Marckwald dvěma způsoby, z nichž prvý zakládá se na různé rozpustnosti obou amylestherů kyseliny 3-nitroftalové v benzolu,[1]) druhý na různé rozpustnosti obou příslušných amylsíranů barnatých ve vodě.[2]) V obou případech jest však rozdíl rozpustnosti pouze nepatrný, neboť tvoří obě látky v obou případech krystally smíšené a jest tudíž třeba k jich oddělení podjati se velmi pracné krystallisace frakční. Dělíme-li oba alkoholy kyselinou 3-nitroftalovou, hromadí se v podílu tíže rozpustném amylalkohol opticky aktivný, kdežto užijeme-li methody druhé, získáváme z tíže rozpustného amylsíranu barnatého isoamylalkohol. Poněvadž jest při frakční krystallisaci vždy snazší úlohou úplně vyčistiti část nesnadněji rozpustnou, užili jsme k přípravě *d*-amylalkoholu methody prvé, kdežto isoamylmerkaptan získali jsme dle methody druhé.

Příprava d-amylalkoholu.

20 litrů přiboudliny melasové[3]) z lihovaru J. Wertheimera v Pardubicích zrektifikováno za užití deflegmatoru Le Bel-Henningerova i získáno 5600 *g* frakce mezi 127—132° vroucí a jevící otáčivost v trubce 2 *dm* α_D = —4·44°, což odpovídá 46%ům aktivného alkoholu. Frakce tato nasycována suchým chlorovodíkem a zahřívána v silnostěnných lahvích od šampaňského, uzavřených zátkami kaučukovými, po 4 hodiny na 105° v lázni solné. Frakční destillací získáno z produktu takto zpracovaného 740 *g* amylalkoholu, jenž obsahoval dle otáčivosti své [α_D = —7·19° pro *l* = 2] 75% amylalkoholu opticky činného. Působením kyseliny 3-nitroftalové a frakční krystallisací z benzolu i zmýdelněním čisté estherkyseliny získali jsme 132 *g* čistého, opticky aktivného amylalkoholu.[4])

Náš výtěžek čistého *d*-amylalkoholu byl méně uspokojivý nežli výtěžky, jež udává Marckwald, což beze vší pochyby mělo v tom svou příčinu, že výchozí přiboudlina naše již sama sebou byla chudší opticky aktivným amylalkoholem nežli Marckwaldova.

---

[1]) B. B. *34*,479 a B. B. *37*,1038.

[2]) B. B. *35*,1595.

[3]) Nutno užiti vždy přiboudlin melasových, neboť obsahují, jak Marckwald poprvé ukázal, mnohem více opticky činného amylalkoholu, nežli přiboudliny původu jiného, na př. z lihu bramborového a p.

[4]) Bod tání čisté estherkyseliny té byl mezi 114.8—115·2°, kdežto Marckwald udává jej při 113.5—114.5°, Klages a Sautter při 111—112°.

Příprava isoamylalkoholu.

Ku 410 *g* prodejného amylalkoholu, jevícího pouze malou otáčivost [$\alpha_D = -1{\cdot}82^0$ při $l = 2$], přidáno po malých dávkách za chlazení ledem 552 *g* koncentrované kyseliny sírové. Nažloutlá směs ostavena 24 hodin při teplotě pracovny a přesně neutralisována hydroxydem barnatým. Z roztoku, zbaveného síranu barnatého filtrací a zahuštěného na vodní lázni na malý objem, vyloučil se po vychladnutí amylsíran barnatý v bezbarvých šupinkách, které, podrobeny pracné frakční krystallisaci, poskytly 180 *g* čistého inaktivného amylsíranu barnatého. Z této esthersoli látky získán zmýdelněním opticky naprosto nečinný isoamylalkohol, jehož pak použito k přípravě čistého isoamylmerkaptanu.

Příprava opticky aktivného amylmerkaptanu.

Potřebný *d*-amylsíran připraven takto: 35 *g* čistého *d*-amylalkoholu vneseno v malých dávkách a za chlazení ledem do 50 *g* koncentrované kyseliny sírové. Směs velmi slabě nažloutlá ostavena po 24 hodin při teplotě pracovny, pak vylita na led, přesně zneutralisována hydroxydem barnatým, zbavena vyloučeného síranu barnatého filtrací, zalkalisována přebytečnou potaší, sfiltrována od vyloučeného uhličitanu barnatého a odpařena na vodní lázni asi na 150 cm^3. Takto získaný roztok *d*-amylsíranu draselnatého nasycen sírovodíkem, načež přidán čerstvě připravený roztok sulfhydrátu draselnatého, získaný z 50 *g* KOH a 100 cm^3 vody uváděním sírovodíku za chladu, až příbytek na váze obnášel 24 g. Směs destillována, při čemž prováděn kapalinou nepřetržitý proud sírovodíku a to z toho důvodu, aby se jednak zamezilo přílišné bouchání alkalické kapaliny, jednak aby se uváděním sírovodíku stlačila pro výtěžek merkaptanu škodlivá reakce

$$SO_2\begin{matrix}OK\\OC_5H_{11}\end{matrix} + KOH = SO_2\begin{matrix}OK\\OK\end{matrix} + C_5H_{11}OH$$

na míru nejmenší.

Destillováno tak dlouho, až úplně přestaly přecházeti kapičky olejovité, což vyžadovalo asi 12hodinné destillace. Obdrželi jsme tak 12·4 *g* olejovitého produktu, jenž poskytl — oddělen byv od vody, vysušen a rektifikován — 10·4 *g* čistého *d*-amylmerkaptanu, vroucího mezi 119° až 121°. Látka jevila hutnotu 0·8415 při 23°, a otáčela slabě v pravo,

$$[\alpha]_D = \frac{\alpha_D}{1 \times 0{\cdot}8415} = +3{\cdot}21^0 \text{ při } 23^0\ C.$$

* * *

Abychom štěpení racemické arabinosy mohli provésti pokud možno úsporně (vzhledem k nemalé ceně výchozích produktů), připravili jsme si

předem merkaptany obou aktivných arabinos, neboť bylo zřejmo, že tím způsobem usnadníme si vyhledání podmínek vhodných pro štěpení.

d-Amylmerkaptal l-arabinosy.

K 1 *g* *l*-arabinosy, rozpuštěné v 1·5 cm^3 dýmavé kyseliny solné, přidáno 1·4 *g* *d*-amylmerkaptanu a směs třepána za mírného ohřívání na 30—35° tak dlouho, až zprvu vzniklá emulse přešla v kapalinu čirou. Tato ostavena na 2—3 hodiny při obyčejné teplotě a pak zředěna vodou, čímž vyloučil se merkaptal ve způsobě sněhobílé hmoty krystallické. Po dvojnásobném překrystallování ze zředěného alkoholu získali jsme produkt čistý jakožto dlouhé ploché jehličky bodu tání 114—116°.

Budiž výslovně podotknuto, že při stanovení bodu tání merkaptalů musí látka do špičky kapilláry býti pevně napěchována, jinak nedochází se k výsledkům shodným.

d-Amylmerkaptal d-arabinosy.

Látka připravena stejně, jako právě popsaný derivát *l*-arabinosy. Liší se od něho již bodem tání, jenž leží zde při 118—120°, zvláště však svým tvarem krystallickým. Kdežto *d*-amylmerkaptal *l*-arabinosy vylučuje se v dlouhých sploštělých jehličkách, tvoří derivát *d*-arabinosový šupinky lesku perleťového, jež pod drobnohledem jeví tvar šestihranných tenkých destiček. Oba tvary krystallické jsou od sebe tak odlišny, že je lze již pouhým okem bezpečně rozeznati. I rozpustnost jest rozdílna a to větší u derivátu *l*-arabinosového: 100 dílů alkoholu 96%ního rozpouštělo za obyčejné teploty asi 4·1 dílů derivátu *l*-arabinosového, kdežto derivátu *d*-arabinosového vcházely v roztok pouze 2 díly.

Štěpení r-arabinosy ve způsobě d-amylmerkaptalů.

1·4 *g* *r*-arabinosy rozpuštěno ve 2 cm^3 dýmavé kyseliny solné, přidáno 1·8 *g* *d*-amylmerkaptanu a vyloučen merkaptal způsobem nahoře udaným. Produkt ten, jenž tál neostře mezi 106—110°, podroben frakční krystallisaci z 96%ního alkoholu. Po pětinásobném přehlacení jevil tíže rozpustný podíl bod tání 118—120° a byl již čistým *d*-amylmerkaptalem *d*-arabinosy, neboť neměnil svého bodu tání ani po přimísení *d*-amylmerkaptalu, získaného z pouhé *d*-arabinosy. Též tvar krystallů byl karakteristický pro derivát *d*-arabinosový. V posledních matečných louzích nahromadil se *d*-amylmerkaptal *l*-arabinosy, jak plynulo zřetelně z jeho tvaru krystallického. Vzhledem k malému množství látky, s níž jsme pracovali, nebylo lze docíliti bodu tání 114—116°, jaký vyznačuje úplně čistý *d*-amylmerkaptal *l*-arabinosy.

d-Amylmerkaptaly rhodeosy a fukosy.

Obdobný pokus štěpný, jako s (*d* + *l*)-arabinosou, hleděli jsme provésti též s racemickou sloučeninou rhodeosy a fukosy. Zanechali jsme však úmyslu toho, když jsme se předběžnými pokusy přesvědčili, že body tání *d*-amylmerkaptalů jmenovaných dvou cukrů liší se od sebe toliko o 2° a že také rozdíly v rozpustnosti jsou dosti nepatrny, takže by dělení a jeho kontrola spojeny byly se značnými obtížemi, a to tím spíše, že i rozdíly ve tvaru krystallickém lze postřehnouti toliko pod drobnohledem.

* * *

Jako dodatek k práci naší uvádíme ještě přípravu několika merkaptalů cukrů aldehydických a to z toho důvodu že dosavadní udání o bodech tání amylmerkaptalů, v literatuře se vyskytující, jsou vesměs nesprávná, Tyto chyby starších autorů vznikly tím, že používáno bylo amylmerkaptanu z prodejného amylalkoholu, t. j. směsi isoamylmerkaptanu s *d*-amylmerkaptanem, kdežto naše pokusy provedeny byly vesměs s čistým, opticky aktivným amylmerkaptanem a čistým isoamylmerkaptanem. Kromě toho připravili jsme též dosud neznámé ethyl- a ethylen-merkaptaly cukrů rhodeosy a fukosy.

V přehledu níže uvedeném sestaveny jsou tabelárně čisté merkaptaly, námi připravené. Připravili jsme je methodou E. Fischerovou.[1])

Aldosa	Merkaptan	Bod tání merkaptalu	Vhodné rozpustidlo	Stanovení síry
l-arabinosa	*d*-amyl-merkaptan	114—116°	zřed. alkohol	—
l-arabinosa	isoamyl-merkaptan	121—124°	,, ,, ,, ,,	—
d-arabinosa	*d*-amyl-merkaptan	118—120°	,, ,,	—
d-arabinosa	isoamyl-merkaptan	121—124°	,, ,,	—
i-arabinosa	isoamyl-merkaptan	113—115°	,, ,,	—
rhodeosa	*d*-amyl-merkaptan	136—138·5°	alkohol	theor. *S* 18·08 nal. *S* 18·41

[1]) B. B. 27,673.

Aldosa	Merkaptan	Bod tání merkaptalu	Vhodné rozpustidlo	Stanovení síry
rhodeosa	isoamyl-merkaptan	151—152·5°	„	theor. *S* 18·08 nal. *S* 18·33
fukosa	*d*-amyl-merkaptan	140—142°	„	theor. *S* 18·08 nal. *S* 18·13
fukosa	isoamyl-merkaptan	151—152·5°	„	theor. *S* 18·08 nal. *S* 18·27
i-fukosa (= *i*-rhodeosa)	isoamyl-merkaptan	160—162°	„	—
rhamnosa	isoamyl-merkaptan	108—110·5°	zřed. alkohol	theor. *S* 18·08 nal. *S* 18·21
d-glukosa	*d*-amyl-merkaptan	138—139°	alkohol	—
d-glukosa	isoamyl-merkaptan	142—144°	„	—
d-galaktosa	*d*-amyl-merkaptan	123—124°	alkohol	—
d-galaktosa	isoamyl-merkaptan	122—123°	„	—
rhodeosa	ethyl-merkaptan	167—168·5°	alkoh. n. voda	theor. *S* 23·70 nal. *S* 24·01
fukosa	ethyl-merkaptan	167—168·5°	alkoh. n. voda	theor. *S* 23·70 nal. *S* 23·92
rhodeosa	ethylen-merkaptan	191—191·5°	alkohol	theor. *S* 26·58 nal. *S* 26·26
fukosa	ethylen-merkaptan	191—191·5°	„	theor. *S* 26·58 nal. *S* 26·65

Ke konci budiž nám dovoleno vysloviti obzvláštní díky p. prof. Dr. C. Neubergovi, v Dahlemu u Berlína, jenž nám rychlejší ukončení práce umožnil laskavým zasláním chemicky čisté *d*-arabinosy.

Z laboratoře organické chemie na c. k. české vysoké škole technické v Praze.

Krystalografie betainu a některých jeho sloučenin.

Podává

Dr. **L. Kaplanová** v Praze.

(S 6 obrazy v textu.)

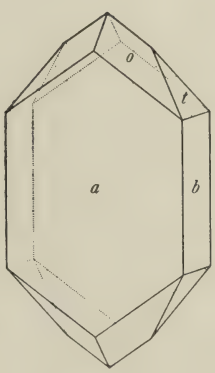
Předloženo dne 24. dubna 1914.

Předem dovoluji si vysloviti svůj uctivý dík panu dvornímu radovi prof. Dru K. Vrbovi za laskavost, s jakou mi dovolil pracovati ve svém ústavě. Nemenším díkem jsem povinna panu prof. Dru F. Slavíkovi za četné rady a zájem o mou práci a panu správci Výzkumné laboratoře cukrovarské V. Staňkovi, který mi poskytl materiál. Tři ze sloučenin zde popsaných, totiž bromoplatičitan, bromhydrát a jodhydrát betainu, byly jím vyrobeny poprvé.

Betain $C_5H_{11} . NO_2 . H_2O$.[1])

Rhombicky bipyramidální

$$a : b : c = 0{,}8800 : 1 : 0{,}7093.$$



Obr. 1.

Tvoří bezbarvé, průhledné krystaly, silně hygroskopické a málo dokonalé, s plochami i hranami obyčejně zaoblenými. Měřené krystaly reflektovaly signály nezřetelné a zřídka jednotné; výpočet není tudíž naprosto přesný.

Tvary vyskytující se na krystalech betainu jsou *a* (100), *b* (010), *t* (021), *o* (111). Habitus krystalů je téměř vždycky tabulkový dle (100) (obr. 1.). Některé tabulky jsou jednodušší, postrádajíce pyramidy.

		Vypočteno:	Měřeno:
a : *o*	100 : 111	—	*56° 40′
b : *t*	010 : 021	—	*35 10
: *o*	010 : 111	61 $4^2/_3$	61 7
t : *o*	021 : 111	37 56	37 $54^1/_2$.

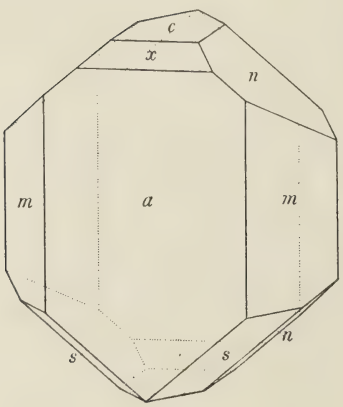
[1]) Chemicky popsal Scheibler, Berliner Berichte 3. 155.

Štípe se nedokonale dle 001 a dle 010. Rovina os optických leží v 001; makrodiagonála je ostrou bissektricí; směr

$$a = \alpha$$
$$b = \gamma$$
$$c = \beta$$

Úhel os optických $2E_{Na}$ = cca 103°.
Disperse je silná $\varrho > v$.
Hustota = 1,257.

Fosfát betainu $C_5H_{11}NO_2 . H_3PO_4$.[2])



Obr. 2.

Monosymetricky prismatický,

$$a : b : c = 1{,}2296 : 1 : 0{,}8242$$
$$\beta = 83^0\ 49'.$$

Krystaly jsou bezbarvé, průhledné, jsou to nejčastěji tabulky dle 100, (obr. 2.), někdy je tvar skoro isometrický, jindy prodloužením vertikály vzniká sloupec poněkud sploštělý dle 100, nebo jsou krystaly nepravidelné nestejným vývojem různých ploch téhož tvaru.

Pozorovány byly tvary *a* (100), *c* (001), *m* (110), *x* (101), *n* (011), *s* ($\bar{1}11$).

		Vypočteno:	Měřeno:
c : *a*	001 : 100	—	*83° 49′
: *n*	: 011	—	*39 20
: *m*	: 110	86 5 1/3	86 2
: *x*	: 101	31 51 1/2	31 47
: *s*	: $\bar{1}11$	48 43 3/4	48 34
a : *m*	100 : 110	—	*50 43
: *x*	: 101	51 57 1/2	51 45
: *n*	: 011	85 13	85 28
: *s*	$\bar{1}00$: $\bar{1}11$	66 24	66 25 1/4
m : *x*	110 : 101	67 8	67 40
: *n*	: 011	57 4 3/4	57 12
: *s*	$\bar{1}10$: $\bar{1}11$	45 11	45 8
x : *n*	101 : 011	48 56	48 40
: *s*	: $\bar{1}11$	71 57	71 23
n : *s*	011 : $\bar{1}11$	28 23	28 22 1/3

[2]) Chemicky popsal Andrlík, Listy Cukrovarnické 22. 397.

Štípe se dokonale dle $\bar{1}01$, méně dokonale dle 001, zřetelně dle 010. Štěpné lupénky dle 010 zhášejí šikmo v úhlu ca. $11^1/_2{}^0$ k délce. Směr bližší vertikále, ukloněný do tupého úhlu, je α.

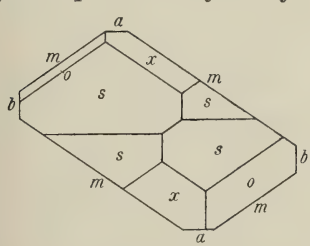
Hustota = 1,474.

Bromoplatičitan betainu $(C_5H_{11} . NO_2 . HBr)_2\ PtBr_4 . 2\ H_2O$.[3])

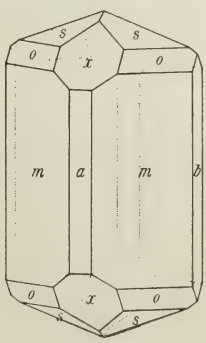
Rhombicky bipyramidální,

$$a : b : c = 0{,}6796 : 1 : 0{,}7263.$$

Tvoří krystaly temně červené, kovově lesklé, sloupcovité. Na všech je dominujícím tvarem základní prisma, jehož dvě rovnoběžné plochy jsou obyčejně nepoměrně širší než ostatní. Touto okolností trpí pravidelný vývoj pyramid, v pásmu širších ploch prismatických bývá vyvinut jen tvar (112) a to nahoře i dole, kdežto v pásmu užších ploch přistupuje ještě pyramida základní. Na krystalech s jediným volně vyvinutým koncem činí rozdělení ploch dojem souměrnosti sfenoidické. Obr. 3. znázorňuje skutečný, obr. 4. idealisovaný vývoj.



Obr. 3.



Obr. 4.

Mimo uvedené tvary m (110), o (111), s (112) vyskytují se ještě a (100), b (010) jako velmi úzké plošky, x (101) a vzácně n (021).

		Vypočteno:	Měřeno:
$a : m$	100 : 110	—	*34° 12′
$: s$	: 112	63 $19^3/_4$	63 12
$b : x$	010 : 101	90 —	90 3
$: o$	: 111	63 $31^1/_2$	63 31
$m : x$	110 : 101	52 $50^1/_4$	52 56
$: n$	: 021	62 $25^1/_4$	62 29
$: o$	: 111	37 44	37 47
$: s$	: 112	—	*57 8
$: o'$	: $1\bar{1}1$	73 $4^1/_2$	73 12
$: s''$	: $1\bar{1}2$	78 $28^1/_2$	78 25
$s : s$	112 : $\bar{1}\bar{1}2$	53 $20^1/_3$	53 $15^1/_2$

Štěpnost nedokonalá dle b (010).

Pleochroism slabý, $\parallel c$ větší absorpce, zbarvení červené, $\parallel a$ absorpce menší, zbarvení oranžové; vertikála je směrem negativním.

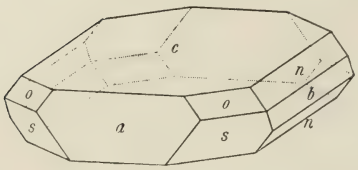
Hustota = 2,510.

---

[3]) Podle sdělení p. správce V. Staňka.

Bromhydrát betainu $C_5H_{11}NO_2 . HBr$.[4])

Monoklinicky prismatický,



Obr. 5.

$$a : b : c = 0{,}8224 : 1 : 1{,}2846$$
$$\beta = 81^0\ 46'.$$

Pozorovány tvary: *a* (100), *b* (010), *c* (001), *l* (230), *n* (011), *o* (111), *s* ($\bar{1}11$).

Bezbarvé, často kostrovité krystaly jsou dvojího typu: *a*) tlusté tabulky dle (001) s tvary (010), (011), (111), ($\bar{1}11$) (obr. 5.); *b*) orthodiagonální sloupečky, na nichž jsou (001) a (100) přibližně v rovnováze; mimo ně jsou vyvinuty tvary (230), (010), (111).

		Vypočteno:	Měřeno:
c : *a*	001 : 100	—	*81° 46′
: *l*	: 230	84° 47½′	85 20
: *n*	: 011	51 48¾	51 42
: *o*	: 111	58 33½	58 35
: *s*	: $\bar{1}11$	—	*68 48
a : *l*	100 : 230	50 40¾	51 23
: *n*	: 011	84 55¼	84 42
: *o*	: 111	43 22½	43 13
: *s*	$\bar{1}00$: $\bar{1}11$	—	*48 38
b : *o*	010 : 111	57 11	57 3
: *s*	: $\bar{1}11$	53 41¼	53 47
s : *s*	$\bar{1}11$: $\bar{1}\bar{1}1$	72 37¾	72 22

Na tabulkách dle (001) je orthodiagonála směrem negativním, klinodiagonála positivním.

Hustota = 1,592.

Obdobná sloučenina chlorová, *chlorhydrát betainu* $C_5H_{11}NO_2 . HCl$, byla již r. 1870 připravena v krystalech Scheiblerem a studována krystalograficky Grothem, téměř současně připravena Liebreichem a měřena Rammelsbergem.[5]) Jest taktéž monosymmetrická a při nejjednodušších symbolech nalezených tvarů:

a (100), *b* (010), *c* (001), *m* (110), *q* (011), *o* (111), ω (11$\bar{1}$), ξ (21$\bar{1}$) má poměr parametrů

$$a : b : c = 1{,}2690 : 1 : 0{,}8167,$$
$$\beta = 83^0\ 13'.$$

Srovnáme-li poměr tento s hořejším, shledáváme velmi přibližnou relaci klinodiagonály chlorhydrátu k bromhydrátu 3 : 2, vertikály 2 : 3, tak že při sblížených úhlech meziosních

chlorhydrát 001 : 100 = 83° 13′
bromhydrát 001 : 100 = 81° 46′

---

[4]) Viz pozn. [3]) na str. 3.

[5]) Viz Grothovu Chemische Kristallographie III. Bd. (1910) str. 101.

máme u skutečně pozorovaných tvarů úhly

chlorhydrát 100 : 110 = 51°33¾′
bromhydrát 100 : 230 = 50°40¾′

a supponujíce klinodoma u chlorhydrátu posud nenalezené

chlorhydrát 001 : 032 = 50°34¾′
bromhydrát 001 : 011 = 51°48¾′;

tudíž

chlorhydrát $\frac{2}{3}\,a : b : \frac{3}{2}\,c = 0{,}8460 : 1 : 1{,}2252,\ \beta = 83°13'$

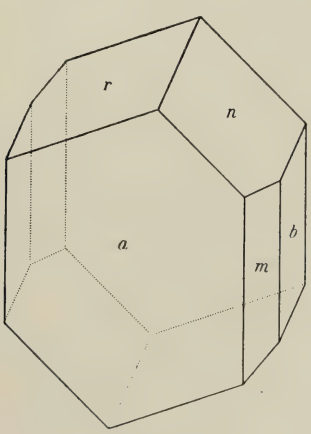
bromhydrát $a : b : c = 0{,}8224 : 1 : 1{,}2846,\ \beta = 81°46'$

Kdybychom posici danou chlorhydrátu Grothem adoptovali pro bromhydrát, obdržely by plochy obou konstantně se vyskytujících pyramid (111) a (11$\bar{1}$) složité symboly (964) a (96$\bar{4}$), naopak bylo by pro chlorhydrát ze tvarů výše jmenovaných $m = (230)$, $q = (203)$, $o = (469)$, $\omega = (46\bar{9})$, $\xi = (43\bar{3})$; vhodnější zajisté jest ponechati oběma sloučeninám posice, při nichž typické jich tvary mají indexy nejjednodušší, a označiti vztah mezi chlorhydrátem a bromhydrátem betainu jakožto vzdálenější relaci isomorfní, asi toho druhu, jako na př. mezi samsonitem $Ag_4MnSb_2S_6$ a pyrostilpnitem $Ag_6Sb_2S_6$ nebo mezi barytem $BaSO_4$ a anhydritem $CaSO_4$, datolithem $CaB(OH)SiO_4$ a euklasem $BeAl(OH)SiO_4$ a pod.

Jodhydrát betainu $C_5H_{11}NO_2 . HI$.[6])

Trojklonný pinakoidalní,

$$a : b : c = 1{,}2290 : 1 : 0{,}5492$$
$$\alpha = 78°\,1\tfrac{2}{3}',\quad \beta = 121°\,52',\quad \gamma = 108°\,22\tfrac{2}{3}'.$$



Obr. 6.

Průhledné, bezbarvé nebo slabě nažloutlé krystaly jsou tabulky dle a (100), na kterých užšími plochami jsou zastoupeny tvary b (010), m (120), n (011), r (0$\bar{1}$1) (obr. 6.), protiplocha k r, 0$\bar{1}\bar{1}$, však často schází.

[6]) Viz pozn. [3]) na str. 3.

		Vypočteno:	Měřeno:
$a : b$	100 : 010	—	*75° 40′
$: m$	: 120	—	*53 21
$: n$	: 011	55 26	55 26
$: r$	: $0\bar{1}1$	—	*70 38
$b : n$	010 : 011	—	*66 13
$: r$	$0\bar{1}0 : 0\bar{1}1$	—	*61 30
$m : n$	120 : 011	56 11	56 9

Štípe se dokonale dle (011).
Hustota = 1,620.

Mineralogický ústav
c. k. české university v Praze.

O imaginárné prostorové křivce kubické.

Podává

vládní rada prof. VINC. JAROLÍMEK.

S 5 obr. v textu.

(Předloženo dne 24. dubna 1914.)

1. Tuto křivku L_i^3 obdržíme na př. pronikem dvou imaginárných ploch kuželových 2. stupně $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$ druhu třetího[1]), jež mají reálné středy s_1, s_2 a společnou površku reálnou $\overline{s_1 s_2} \equiv A$. Kužel $\varkappa_1^2$ můžeme na př. stanoviti dalšími třemi reálnými površkami B_1, C_1, D_1 a to tak, aby čtyřhran $s_1 (A\, B_1\, C_1\, D_1)$ byl konvexní, a reálnou tečnou rovinou τ_1, která jednu površku odděluje od tří ostatních[2]); kužel pak $\varkappa_2^2$ reálnými površkami A, B_2, C_2, D_2 a reálnou tečnou rovinou τ_2 za týchž podmínek.

Zvolíme-li reálné površky kuželů tak, aby se navzájem protínaly, na př. $(B_1\, B_2) \equiv b$, $(C_1\, C_2) \equiv c$, $(D_1\, D_2) \equiv d$, bude křivka L_i^3 reálné body b, c, d obsahovati; ježto pak i středy s_1, s_2 jí náležejí, lze říci:

Imaginárná prostorová křivka kubická může míti (nejvýš) pět bodů reálných.

Duálně lze L_i^3 obdržeti vratnou křivkou imaginárné rozvinutelné obalové plochy třetí třídy λ^{III}, jejíž roviny dotýkají se dvou imaginárných kuželoseček K_1^2, K_2^2, jež ležíce v rovinách reálných σ_1, σ_2, společné jejich průsečnice $\overline{\sigma_1 \sigma_2} \equiv A$ se dotýkají. Společné tečné roviny kuželoseček, vyplňující svazek rovinový III. třídy ϱ^{III} a obalující plochu λ^{III}, jsou oskulačními rovinami křivky L_i^3. Imaginárnou kuželosečku K_1^2 můžeme na př. stanoviti dalšími třemi tečnami B_1, C_1, D_1 v rovině σ_1 a bodem t_1 vhodně zvoleným[3]), kuželosečku pak K_2^2 v rovině σ_2 reálnými tečnami A, B_2, C_2, D_2 a bodem t_2 v případné k nim poloze. Zvolíme-li tečny tyto tak, aby se navzájem protínaly (na přímce A), aby tedy ležely v rovinách $(B_1\, B_2) \equiv \beta$, $(C_1\, C_2) \equiv \gamma$, $(D_1\, D_2) \equiv \delta$, budou i reálné roviny β, γ, δ osku-

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy, III. pag. 101.

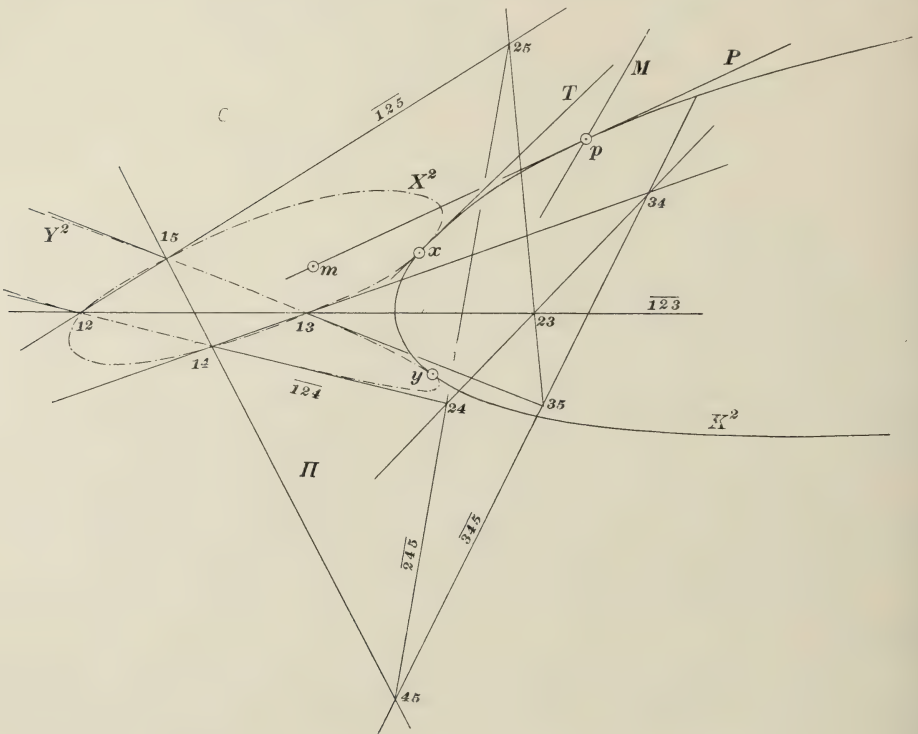
[2]) Ibid. pag. 86: Kužel $\varkappa_1^2$ je promítkou imag. ellipsy druhu 3. z bodu s_1 v prostoru.

[3]) Geometrie polohy III., pag. 88.

lačními vzhledem ke křivce L_i^3; ježto pak i roviny σ_1, σ_2 jsou tečnými ku λ^{III} a tudíž oskulačními ku L_i^3, lze říci:

Imaginárná prostorová křivka kubická může míti (nejvýš) pět oskulačních rovin reálných.

2. Pěti libovolnými reálnými body v prostoru *1, 2, 3, 4, 5*, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině, prochází ∞^2 reálných křivek 3. řádu, jež tudíž tvoří *dvojmocný svazek* prostorových kubik ΣL^3. Neboť přímkami $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$ prochází ∞^1 kuželových ploch 2. stupně, a tolikéž přímkami $\overline{21}$, $\overline{23}$, $\overline{24}$, $\overline{25}$; každý pak kužel svazku jednoho seče každý



Obr. 1.

kužel svazku druhého ve společné površce $\overline{12}$ a v křivce kubické, jež prochází danými pěti body. Body tyto jmenujeme *základními body* svazku ΣL^3, nebo také *vrcholy prostorového pětiúhelníka 12345*. Po dvou lze tyto vrcholy spojiti deseti přímkami a po třech deseti rovinami. Celý tento útvar nazveme úplným prostorovým pětiúhelníkem; spojnice $\overline{12}$, $\overline{13}$, ... $\overline{24}$, ... jsou jeho *hranami*, roviny (*123*), (*124*), ... (*245*), ... jeho *stěnami*. Každé hraně, na př. $\overline{23}$, odpovídá určitá stěna *protější* (*145*). Pronik Π úplného pětiúhelníka s libovolnou rovinou ϱ, která neprochází žádným jeho vrcholem, skládá se z deseti bodův a z deseti přímek (obr. 1.); průsečíky hran $\overline{12}$, $\overline{13}$, ... s rovinou ϱ označme prostě *12*, *13*, ..., prů-

sečnice stěn (*123*), (*124*), ... s rovinou ϱ značme $\overline{123}$, $\overline{124}$, ... Každým bodem procházejí tři přímky a naopak každá přímka obsahuje tři body. Tuto konfiguraci Π možno narýsovat v rovině ϱ přímo i bez pětiúhelníka *1 ... 5* takto: zvolíme dva perspektivné trojúhelníky (obr. 1.), na př. *13, 14, 15* — a *23, 24, 25* (centrum *12*); strany jejich, paprsky homologických vrcholů $\overline{123}$, $\overline{124}$, $\overline{125}$ a osa perspektivná $\overline{245}$ (spojnice průsečíků homologických stran) skládají pronik Π. Neboť $\triangle$ *345* pětiúhelníka v prostoru promítá se skutečně z vrcholů *1* a *2* na rovinu ϱ do dvou trojúhelníků perspektivných.

3. Rovina ϱ seče každou křivku svazku ΣL^3 ve třech bodech m, n, p (z nichž dva mohou býti pomyslné), jichž spojnice $\overline{mn} \equiv P$, $\overline{mp} \equiv N$, $\overline{np} \equiv M$ — bisekanty křivky — omezují trojúhelník $m\,n\,p$. Veškeré tyto trojúhelníky jsou polárné v témž polárném poli[1]), jehož direkční kuželosečka K^2 jest reálná nebo imaginárná[2]). Připadne-li bod p na křivku K^2 (obr. 1.), stane se pólára P tečnou křivky v pólu p, pólára pak M pólu m tečnou kubiky L^3 (kdežto $n \equiv p$, $N \equiv P$, a polárný $\triangle$ $m\,n\,p$ smršťuje se v úsečku $\overline{mp}$). Jest tedy kuželosečka K^2 geometrické místo dotyčných bodův oněch kubik, které procházejíce bodu *1 ... 5*, dotýkají se dané roviny ϱ; křivek takových jest tedy ∞^1. Každým bodem křivky K^2 a body *1 ... 5* jest jedna z nich určena, a lze ji ze šesti bodů přímo sestrojiti.

Jestliže však i bod $m \equiv p$, $M \equiv P$, jest rovina ϱ *oskulační* ke křivce L^3 v bodě p, v němž také křivky L^3 a K^2 se dotýkají (viz bod *x*). K zobrazení kuželosečky K^2 netřeba kubik svazku ΣL^3 strojiti. K tomu užijeme výhodně kubik degenerovaných. Kterákoli hrana základního pětiúhelníka, na př. $\overline{12}$, určuje zvrhlou kubiku spolu s kuželosečkou, která prochází vrcholy *3, 4, 5* a průsečíkem hrany $\overline{12}$ na rovině (*345*). Takových kuželoseček je svazek jednomocný, tedy kubik, zvrhlých v přímku a kuželosečku, ∞^1. Nejvýhodnější však budou kubiky, jež rozpadají se (každá) ve tři přímky. Dvě mimoběžné hrany pětiúhelníka, na př. $\overline{12}$, $\overline{45}$, a příčka jejich procházející vrcholem *3* [průsečnice rovin (*123*) a (*345*)] skládají kubiku zvrhlou ve tři přímky. Takových ve svazku ΣL^3 jest toliko patnáct [3]). Podle toho průsečík kterékoli hrany pětiúhelníka, na př. $\overline{12}$, s rovinou ϱ dá pól *12* (obr. 1.), a průsečnice protější stěny (*345*) s rovinou ϱ příslušnou poláru $\overline{345}$ kuželosečky K^2; pólu *13* přísluší pólára $\overline{245}$ atd. Ze tří pólův a příslušných polár lze pak kuželosečku K^2 snadno sestrojiti.

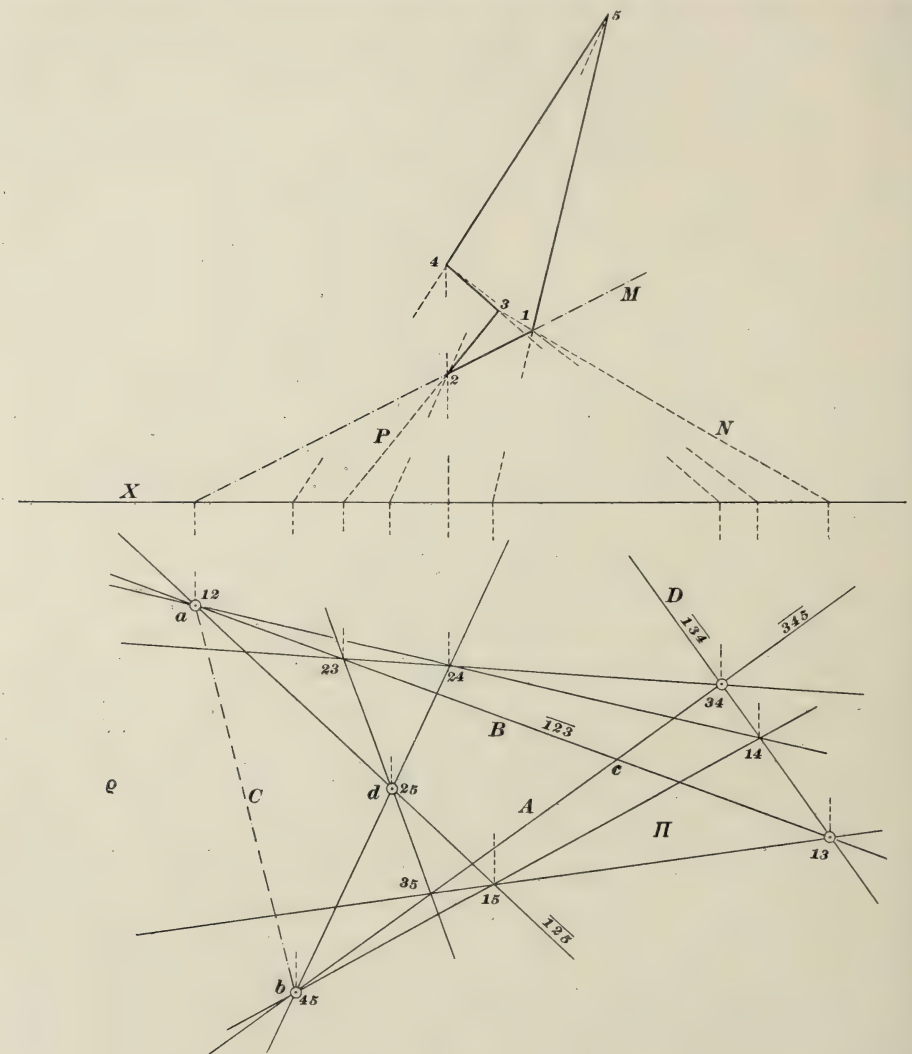
---

[1]) Reye, Geometrie der Lage, vyd. 4., díl II., pag. 205.

[2]) Svazek ΣL^3 dává na rovině ϱ ∞^2 polárných trojúhelníků; tyto nevyplňují tudíž polárné pole *celé*, jež obsahuje polárných trojúhelníků ∞^3, čili: není každý polárný trojúhelník kuželosečky K^2 pronikem roviny ϱ s určitou křivkou svazku ΣL^3.

[3]) Z deseti hran úplného pětiúhelníka lze totiž vybrati patnáct dvojin hran mimoběžných. Anebo: Každým vrcholem pětiúhelníka procházejí tři příčky, totiž ke třem dvojinám protějších hran, jež spojují ostatní čtyři vrcholy.

Je-li ϱ *oskulační* rovinou určité kubiky L^3 ve svazku Σ obsažené, promítá se křivka L^3 z každého bodu svého, na př. *1*, kuželovou plochou 2. stupně, jíž rovina ϱ seče v kuželosečce X^2 (obr. 1.) procházející body *12, 13, 14, 15* a dotýkající se (jak nahoře již ukázáno) kuželosečky K^2 v určitém bodě x. Druhá kuželosečka téže vlastnosti Y^2 dotýká se křivky K^2



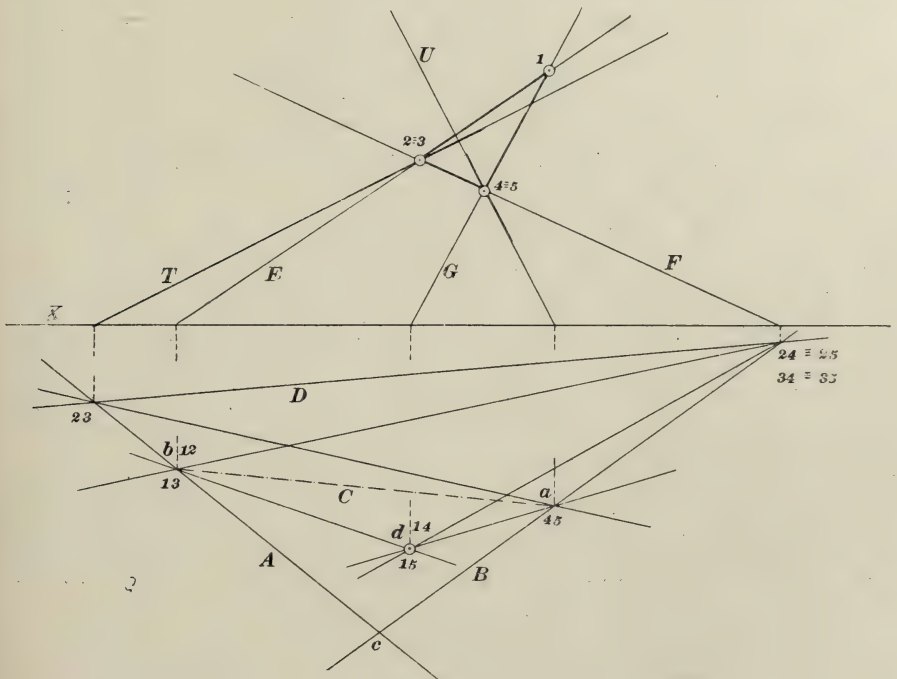
Obr. 2.

v bodě y [1]). Body *1, 2, 3, 4, 5, x* určena jest jedna, body *1, 2, 3, 4, 5, y* druhá kubika, která procházejíc vrcholy základního pětiúhelníka oskuluje danou rovinu ϱ. Tím zároveň jest řešena úloha: *sestrojiti křivku kubickou,*

[1]) Je samozřejmo, že každá kuželosečka v rovině ϱ, která prochází čtyřmi body, jichž značky v jedné cifře se shodují, tedy na př. *12, 23, 24, 25*, a dotýká se kuželosečky K^2, dává *týž* dotyčný bod x resp. y.

jež dána jest pěti body v prostoru a jednou rovinou oskulační; výsledky jsou dva.

4. V našem případě (obr. 1.) jest tato křivka reálná. Jde však nyní o to, jak pětiúhelník *1 . . . 5* upraviti, aby kubika L_i^3 o dané oskulační rovině ϱ byla *imaginárná*. Případ ten nastane, bude-li kuželosečka K^2 pomyslná. Polárné pole Π v rovině ϱ a direkční jeho křivka K^2 jsou s dostatek určeny polárným trojúhelníkem a mimo to jednou družinou (pólem a polárou). Zvolme tedy v rovině ϱ (obr. 2., kdež rovina ϱ učiněna půdorysnou) přímky $\overline{123} \equiv B$, $\overline{345} \equiv A$, na nich body resp. $12 \equiv a$, $45 \equiv b$, tak že $\triangle a\,b\,c$ (kdež $c \equiv A\,B$) je polárný. Aby pak kuželosečka K^2 byla



Obr. 3.

najisto imaginárná, vytkněme další pól $d \equiv 25$ *vnitř* $\triangle a\,b\,c$, poláru jeho $D \equiv \overline{134}$ *vně* (nebo také naopak); označme průsečíky $(A\,D) \equiv 34$, $(B\,D) = 13$. Tím jest *elliptické* polárné pole Π stanoveno; další bod, na př. *15*, můžeme vytknouti na spojnici $\overline{a\,d} \equiv \overline{125}$ kdekoli, načež spojnice $\overline{b, 15}$ protne D v bodě *14*, spojnice $\overline{a, 14}$; $\overline{b, 25}$ protnou se v bodě *24*, dále $\overline{24, 34}$ seče B v bodě *23*, posléze $\overline{d, 23}$ přímku A v bodě *35*, který i na spojnici $\overline{13, 15}$ připadnouti musí. Tím jest konfigurace Π v rovině ϱ sestrojena; z ní základní pětiúhelník *1 . . . 5* v prostoru odvodíme takto. Bodem *12* veďme mimo rovinu ϱ přímku M libovolným směrem[1]), vytkněme na ní body *1*, *2*, spojme bod *1* (v prostoru)

[1]) Tato konstrukce provedena v obr. 2. toliko v náryse.

s bodem *13* (na rovině ϱ) přímkou N, bod *2* s bodem *23* přímkou P; průsečík $(N\,P) \equiv 3$. Spojnice $\overline{1,\ 14}$; $\overline{2,\ 24}$ protnou se v bodě *4*, spojnice $\overline{1,\ 15}$; $\overline{2,\ 25}$ v bodě *5*[1]). Obě kubiky dané body *1* . . . *5* a oskulační rovinou ϱ jsou pomyslné. Z toho jde:

Imaginárná prostorová křivka kubická může míti pět reálných bodův a jednu reálnou rovinu oskulační.

Existuje tedy deset reálných rovin, z nichž každá seče tuto imaginárnou kubiku L_i^3 ve třech bodech reálných; jsou to stěny úplného pětiúhelníka *1* . . . *5*. Křivka L_i^3 má deset skutečných bisekant: $\overline{12}$, $\overline{13}$, . . . $\overline{23}$, . . . $\overline{45}$.

5. Z mnohých případů speciálních vyjímáme tuto jediný. Dejme splynouti vrcholům $2 \equiv 3$ na dané přímce T a vrcholům $4 \equiv 5$ na dané přímce U, mimoběžné k T; přímky tyto jsou tudíž tečnami kubiky L^3 v bodech *2* resp. *4*. Mimo to dán buď bod *1* a oskulační rovina ϱ. Pronik základního pětiúhelníka s rovinou ϱ redukuje se na tvar v obr. 3. zobrazený (kdež ϱ učiněna půdorysnou). Aby však křivka L_i^3 byla imaginárnou, zvolme místo řečených útvarů v rovině ϱ stopu A roviny $(1\,T) \equiv (123)$, na ní stopu $b \equiv 12 \equiv 13$ hrany $\overline{12}$, stopu B roviny $(2\ U) \equiv (245)$, a na ní stopu $a \equiv 4\,5$ tečny U. Dále vytkněme vnitř polárného $\triangle\ a\,b\,c$ bod $d \equiv 14 \equiv 15$ jakožto stopu hrany $\overline{14}$ a poláru jeho D vně $\triangle\ a\,b\,c$, načež průsečík $(A\ D) \equiv 23$ je stopou tečny T, $(B\ D) \equiv 24 \equiv 25 \equiv 34 \equiv 35$ stopou hrany $\overline{24}$. Z tohoto proniku Π, jenž určuje elliptické pole polárné a direkční kuželosečku K^2 pomyslnou, odvodíme data v prostoru takto: bodem *23* veďme přímku T (viz nárys v obr. 3.) mimo rovinu ϱ, vytkněme na ní bod $2 \equiv 3$, spojme bod *2* se stopou *12* přímkou E, a týž bod *2* se stopou *24* přímkou F, veďme bodem d příčku G k mimoběžkám E, F. Přímka G seče F v bodě $4 \equiv 5$ a přímku E v bodě *1*; posléze spojme $\overline{a\ 4} \equiv U$ (pětiúhelník *1* . . . *5* zobrazen toliko v náryse). Útvary *1* . . . *5*, ϱ určují imaginárnou kubiku L_i^3. Z toho vychází:

Imaginárná prostorová kubika může míti dvě tečny a oba dotyčné body reálné, mimo to ještě jeden bod reálný a jednu oskulační rovinu reálnou.

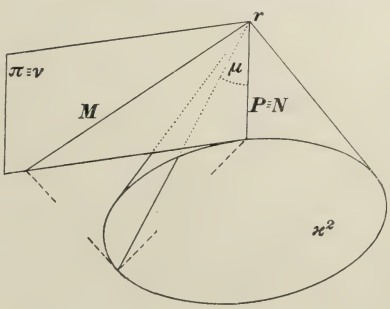
6. Duálně k odstavci 2. pěti libovolnými rovinami *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, z nichž žádné čtyři neprocházejí týmž bodem, určeno jest ∞^2 reálných svazků rovinových III. třídy, jež obalují *dvojmocnou osnovu* rozvinutelných ploch III. třídy $\mathfrak{Q}\ \lambda^{III}$; vratné pak křivky těchto ploch tvoří osnovu křivek kubických $\mathfrak{Q}\ L^3$, jež daných pět rovin oskuluje. Roviny tyto slovou *základními* v osnově a omezují pětistěn. Deset průsečnic základních rovin dává hrany, a po třech protínají se roviny v deseti vrcholech *úplného pětistěnu*. Každé hraně, na př. $\overline{II\ III}$ odpovídá určitý vrchol protější $(I\ IV\ V)$.

---

[1]) Ježto bod *15* zvolili jsme na přímce $\overline{a\ d}$ kdekoli, bodem *12* lze vésti v prostoru ∞^2 přímek M, a na každé vytknouti body *1* a *2* po libosti, je patrno, že táž kuželosečka K^2 v rovině ϱ přísluší ∞^5 různým pětiúhelníkům v prostoru. Béřeme-li však bod *15* za pevný, jímž určena jest konfigurace Π dokonale, shledáváme, že týž pronik Π v rovině ϱ náleží ∞^4 úplným pětiúhelníkům v prostoru.

Z libovolného bodu v prostoru r, který neleží v žádné stěně úplného pětistěnu, promítají se hrany a vrcholy jeho deseti rovinami a deseti paprsky. Označme tuto promítku Π.

Bodem r procházejí tři tečné roviny μ, ν, π (z nichž dvě mohou být pomyslné) ke každé ploše osnovy $\Omega\,\lambda^{III}$ [1]), které omezují trojhran. Hrany jeho $\overline{\mu\,\nu} \equiv P$, $\overline{\mu\,\pi} \equiv N$, $\overline{\nu\,\pi} \equiv M$ jsou bitangentami plochy λ^{III} čili biplanárami rovinového svazku III. třídy. Veškeré tyto trojhrany jsou polárné v témž polárném svazku prostorovém r, jehož direkční plocha kuželová $\varkappa^2$ jest reálná nebo imaginárná. Připadne-li výjimkou přímka P na kužel $\varkappa^2$ (obr. 4.), bude polárná rovina π tečnou kužele podél P, polárná pak rovina μ (pro poláru M) tečnou rovinou příslušné plochy λ^{III} (kdežto $\nu \equiv \pi$, $N \equiv P$ a polárný trojhran r $(\mu\,\nu\,\pi)$ smršťuje se v úhel $\widehat{\mu\,\pi}$), a površka její P prochází bodem r. Jest tedy kuželová plocha $\varkappa^2$ geometrickým místem površek oněch ploch III. třídy, které dotýkajíce se rovin $I \ldots V$ procházejí bodem r; ploch takových jest tedy ∞^1. Jestliže však i rovina $\mu \equiv \pi$, $M \equiv P$, jest bod r *oskulační* na ploše λ^{III} v rovině π (neboť jím procházejí tři soumezné površky $M \equiv N \equiv P$), t. j. leží na vratné křivce její L^3; šesti rovinami oskulačními $I \ldots V$, π je stanovena křivka kubická L^3, která prochází daným bodem r.



Obr. 4.

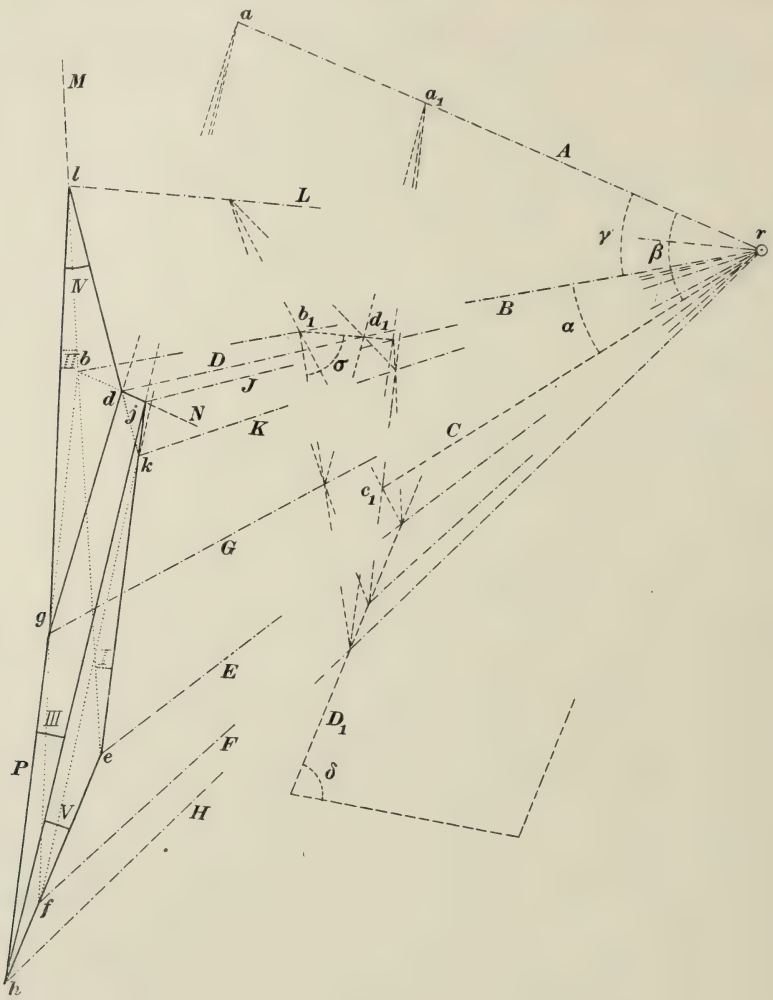
Kužel $\varkappa^2$, jehož je třeba k určení roviny π, sestrojíme nejvýhodněji zase pomocí ploch λ^{III} degenerovaných. Kterákoli hrana základního pětistěnu, na př. $\overline{I\,II}$, určuje zvrhlou plochu λ^{III} spolu s kuželem ϱ^2, který se dotýká roviny ϱ, položené hranou $\overline{I\,II}$ a průsečíkem $(III\,IV\,V)$, a rovin III, IV, V. Takových kuželů ϱ^2 je však svazek jednomocný, tedy i ploch λ^{III}, zvrhlých v přímku a kužel, jest ∞^1. Nejvýhodnější však budou plochy, z nichž každá rozpadá se ve tři přímky. Dvě mimoběžné hrany pětistěnu, na př. $\overline{I\,II}$, $\overline{IV\,V}$, a příčka jejich S ležící v rovině III (spojnice průsečíků hran $\overline{I\,II}$, $\overline{IV\,V}$ na rovině III) skládají plochu zvrhlou ve tři přímky [2]). Takových jest v osnově $\Omega\,\lambda^{III}$ patnáct (srovnej s odst. 3.). Podle toho dá rovina určená daným bodem r a kteroukoli hranou pětistěnu, na př. $\overline{I\,II}$ polárnou rovinu $(r, \overline{I\,II})$, a spojnice protějšího vrcholu $(III\,IV\,V)$ s bodem r příslušnou poláru kužele $\varkappa^2$. Polárné rovině $(r, \overline{I\,III})$ přísluší pól $(II\,IV\,V)$ atd. Ze tří družin polárného svazku Π lze pak direkční kužel $\varkappa^2$ sestrojiti snadno (pomocí proniku s libovolnou rovinou σ, která nejde vrcholem r).

---

[1]) čili: bodem r procházejí tři oskulační roviny ke každé kubické křivce osnovy $\Omega\,L^3$.

[2]) Svazek rovinový III. třídy, určený rovinami I, II, III, IV, V, $(S, \overline{I\,II})$ rozpadá se ve tři svazky rovinové I. třídy na osách $\overline{I\,II}$, $\overline{IV\,V}$, S.

Je-li r *oskulačním* bodem určité plochy λ^{III}, tedy bodem vratné její křivky L^3, seče plochu λ^{III} každá tečná její rovina, na př. I, v kuželosečce K^2. Tato křivka promítá se z bodu r kuželem ξ^2, který dotýká se rovin $(r, \overline{I\,II})$, $(r, \overline{I\,III})$, $(r, \overline{I\,IV})$, $(r, \overline{I\,V})$ a mimo to (jak svrchu dokázáno) i kužele $\varkappa^2$ podél určité površky X. Druhý kužel téže vlastnosti η^2



Obr. 5.

dotýká se kužele $\varkappa^2$ podle přímky Y. Rovinami oskulačními I, II, III, IV, V, ξ určena jest jedna, rovinami I, II, III, IV, V, η druhá kubika (konstrukce známá), která oskulujíc roviny základního pětistěnu, prochází daným bodem r [1]). Tím jest zároveň řešena úloha: *sestrojiti křivku kubickou, jež dána jest jedním bodem a pěti rovinami oskulačními*; výsledky jsou dva.

[1]) ξ, η jsou tečné roviny kužele $\varkappa^2$ podél X, Y.

7. Tato křivka L^3 je zároveň s kuželem $\varkappa^2$ reálná či imaginárná. Aby byla najisto pomyslná, zvolíme (místo rovin $I \ldots V$) polárný svazek Π tak, aby byl elliptický. Za tím účelem proložme daným bodem r (obr. 5.) dvě libovolné roviny α, β jakožto polárné, bodem r v rovině α přímku B jakožto poláru roviny β, a v rovině β přímku A jakožto poláru roviny α, tak že, označíme-li průsečnici $\alpha\,\overline{\beta} \equiv C$ a rovinu $(A\,B) \equiv \gamma$, jest $r\,(A\,B\,C)$ polárný trojhran ve svazku Π. Další pak družinou $(D\,\delta)$ bude již polárný svazek Π stanoven. Aby byl najisto elliptický, veďme poláru D vrcholem r *vnitř* trojhranu $(A\,B\,C)$, polárnou pak rovinu jeho δ bodem r libovolně, ale tak, aby byla celá *vně* téhož trojhranu[1]). Z těchto prvků lze již i prvky ostatní jakož i roviny základního pětistěnu $I \ldots V$ vyvoditi takto:

Přímka A ať promítá (z bodu r) průsečík rovin $(III\ IV\ V) \equiv a$, protější rovina α tedy hranu $\overline{I\ II}$; přímka B promítá průsečík $(I\ II\ III) \equiv b$, rovina β hranu $\overline{IV\ V}$, přímka D průsečík $(I\ III\ IV) \equiv d$, rovina δ hranu $\overline{II\ V}$. Rovina $(A\,D)$ promítá hranu $\overline{III\ IV}$, polára její $\alpha\,\overline{\delta} \equiv E$ bod $(I\ II\ V) \equiv e$, rovina $(B\,D)$ hranu $\overline{I\ III}$, polára její $(\beta\,\delta) \equiv F$ bod $(II\ IV\ V) \equiv f$. Zvolme dále v rovině $(A\,D)$ poláru $r\,G$, jež promítati bude průsečík rovin $(I\ II\ V) \equiv g$, načež ostatní prvky promítky Π obdržíme takto[2]): rovina $(B\,G)$ protne δ v poláře H promítající bod $(II\ III\ V) \equiv h$, roviny $(A\,H)$ a $(B\,D)$ protnou se v přímce J promítající bod $(I\ III\ V) \equiv j$, dále rovina $(J\,E)$ seče rovinu β v přímce K promítající bod $(I\ IV\ V) \equiv k$, rovina $(D\,K)$ rovinu α v přímce L promítající bod $(I\ II\ IV) \equiv l$, která i do roviny $(F\,G)$ zapadnouti musí.

Tím je promítka Π z bodu r sestrojena. Základní pětistěn $I \ldots V$ vyvodíme z ní tímto postupem: v rovině $\alpha \equiv (B\,E)$ zvolme kdekoli hranu $M \equiv \overline{I\ II} \equiv \overline{e\ l}$, proložme hranou M libovolně roviny I, II, stanovme průsečnici $N \equiv \overline{I\ III}$ roviny I s rovinou $(B\,D\,J)$, označme body $(B\,N) \equiv (I\ II\ III) \equiv b$, $(D\,N) \equiv (I\ III\ IV) \equiv d$, $(J\,N) \equiv (I\ III\ V) \equiv j$, dále stanovme průsečnici $P \equiv \overline{II\ III}$ roviny II s rovinou $(B\,G\,H)$, označme body $(G\,P) \equiv (II\ III\ IV) \equiv g$, $(H\,P) \equiv (II\ III\ V) \equiv h$; rovina $(N\,P) \equiv III$. Obdobně průsečnice roviny I s rovinou $(K\,L)$ a průsečnice roviny II s rovinou $(F\,L)$ stanoví rovinu IV, posléze průsečnice roviny I s rovinou $(E\,J)$ a průsečnice roviny II s rovinou $(E\,H) \equiv \delta$ určují rovinu V.

Rovinami $I \ldots V$ jako oskulačními a bodem r jest imaginárná kubika L_i^3 stanovena. Z toho vychází:

Imaginárná prostorová křivka kubická může míti jeden bod reálný a pět oskulačních rovin reálných.

Existuje tedy deset reálných bodů, z nichž každým procházejí tři reálné oskulační roviny imaginárné kubiky L_i^3; jsou to vrcholy pětistěnu $I \ldots V$.

---

[1]) Nebo D vně trojhranu $(A\,B\,C)$ a rovinu δ tak, aby pronikala nitrem téhož trojhranu.

[2]) Ku provedení všech těchto konstrukcí užijeme s výhodou proniku s libovolnou rovinou σ, jak v obr. 5. naznačeno; pronik ten vyvodí se z polárného trojúhelníka $a_1\,b_1\,c_1$ a družiny $d_1\,D_1$ právě tak, jako v odst. 4. na rovině ϱ (obr. 2.).

Souvislost úplného systému ∞^5 lineárních komplexů přímkových se všemi přímkovými plochami druhého stupně, které procházejí čtyřmi pevnými body nebo se dotýkají čtyř pevných rovin.

Napsal **Dr. Jos. Kloboučeк**,
professor reálky v Karlíně.

Předloženo dne 12. května 1914.

V následující práci podány jsou nejprve některé doplňující úvahy týkající se zobrazení ∞^4 přímkových ploch druhého stupně, jichž povrchové přímky jedné soustavy nacházejí se v daném komplexu tetraedrálním na přímkový prostor. A sice týkají se úvahy tyto systému ploch, které procházejí vrcholy základního tetraedru; úvahy vzhledem ke plochám dotýkajícím se stěn základního tetraedru jsou zcela obdobné a teprve ke konci práce učiněna o nich zmínka.

Přihlédnuto také zběžně ke plochám druhého stupně, jichž povrchové přímky různých soustav náležejí dvěma různým komplexům tetraedrálním a dáno jejich zobrazení na bodový prostor.

Dále odvozeny jsou zvláštní resp. obecné lineární komplexy, jichž paprsky zobrazují systémy ∞^3 ploch druhého stupně procházejících vrcholy tetraedru základního, jichž povrchové přímky jedné soustavy jsou obsaženy v daném komplexu tetraedrálním a které dále procházejí daným bodem resp. oddělují harmonický daný pár bodů. Současně poukázáno k ∞^1 párům bodovým, které současně s původním párem všecky tyto plochy harmonicky oddělují a vyvinut pak pro všecky bodové páry prostoru příslušný systém ∞^5 prostorových křivek stupně čtvrtého prvního druhu, na nichž jednotlivé bodové páry jsou rozloženy a určeny patřičné spojující soustavy přímek těchto párů. Potom jsou určeny systémy ∞^4 těchto ploch v různých tetraedrálních komplexech a stanovena v případě, že tyto plochy oddělují harmonicky všecky bodové páry téže křivky čtvrtého stupně, dislokace všech zobrazujících přímek vzhledem k jistému kvadratickému komplexu, jehož singulární plocha redukuje se opět na jistou plochu druhého stupně, která prochází jen třemi vrcholy základního

tetraedru a dotýká se jim protilehlých stěn. V těchto ∞^5 kvadratických komplexech přidružených ∞^5 křivkám čtvrtého stupně určeny jsou dále konsingulární systémy o ∞^2 komplexech.

Konečně uvedeny jsou některé poznámky týkající se ploch druhého stupně s pomyslnými přímkami povrchovými, vyznačeny páry přímek zobrazující tutéž plochu ve dvou různých komplexech tetraedrálních a vyšetřeny dva různé systémy redukovaných křivek čtvrtého stupně, každý o ∞^4 elementech.

* * *

Paprsky tetraedrálního komplexu dají se, jak známo, seskupit v ∞^4 ploch druhého stupně, které vesměs procházejí vrcholy základního tetraedru.

Je-li rovnice tohoto komplexu

$$A\,p_{12}\,p_{34} + B\,p_{13}\,p_{42} + C\,p_{14}\,p_{23} = 0,$$

lze rovnice povrchových přímek tohoto systému ∞^4 ploch psáti ve tvaru*)

$$p_{23} = \varrho\,p_{12} - \frac{B+\mu}{C+\mu}\sigma\,p_{13},$$

$$p_{34} = \tau\,p_{13} - \frac{C+\mu}{A+\mu}\varrho\,p_{14},$$

$$p_{42} = \sigma\,p_{14} - \frac{A+\mu}{B+\mu}\tau\,p_{12};$$

veličiny ϱ, σ, τ, μ jsou libovolné stálé, určující soustavu povrchových přímek jedné plochy, obsaženou v daném tetraedrálním komplexu.

Jest patrno, že hořejší tři rovnice jsou rovnicemi tří lineárních komplexů zvláštních a že soustava $(\varrho, \sigma, \tau, \mu)$ jest tvořena přímkami, které jsou těmto třem lineárním komplexům společné.

Osy těchto komplexů mají — jak snadno zjistíme — souřadnice Plückerovy q_{ik}', q_{ik}'' q_{ik}''' dány těmito hodnotami:

	12	13	14	23	42	34
q_{ik}'	0	0	-1	0	$-\frac{B+\mu}{C+\mu}\sigma$	ϱ
q_{ik}''	-1	0	0	$-\frac{C+\mu}{A+\mu}\varrho$	τ	0
q_{ik}'''	0	-1	0	σ	0	$-\frac{A+\mu}{B+\mu}\tau$

*) C. M. Jessop: A treatise on the line complex. Cambridge 1903 pag. 116.

a náleží současně druhé soustavě povrchových přímek plochy, na níž jest soustava $(\varrho, \sigma, \tau, \mu)$ položena; jmenujme a značme první soustavu krátce

$$[p_{ik}] .$$

druhou

$$[q_{ik}] .$$

Jest zajímavo určiti rovnice soustavy $[q_{ik}]$; jmenujeme-li

$$\alpha', \ \alpha'', \ \alpha'''$$

tři stálé, budou souřadnice q_{ik} tvaru

$$q_{ik} = \alpha' q_{ik}' + \alpha'' q_{ik}'' + \alpha''' q_{ik}''' ,$$

načež vložením hodnot z hořejšího schematu najdeme

$$q_{23} = -\sigma q_{13} + \frac{C+\mu}{A+\mu} \varrho q_{12} ,$$

$$q_{34} = -\varrho q_{14} + \frac{A+\mu}{B+\mu} \tau q_{13} ,$$

$$q_{42} = -\tau q_{12} + \frac{B+\mu}{C+\mu} \sigma q_{14} .$$

Eliminaci všech čtyř hodnot $\varrho, \sigma, \tau, \mu$ z těchto tří rovnic nelze však nyní provésti jako v případě hořejších tří rovnic pro soustavu $[p_{ik}]$, kdy nabýváme, jak známo, rovnice původního tetraedrálního komplexu, jest možno pouze eliminovati tři hodnoty ϱ, σ, τ a výsledek eliminační jest rovnice tvaru

$$\frac{q_{12} q_{34}}{A+\mu} + \frac{q_{13} q_{42}}{B+\mu} + \frac{q_{14} q_{23}}{C+\mu} = 0 ,$$

která určuje tetraedrální komplex obsahující soustavu $[q_{ik}]$.

Jak z formy rovnice vysvítá, má tento komplex s původním tentýž základní tetraedr společný. Je-li $\varkappa$ dvojpoměr komplexu původního to jest, je-li

$$\varkappa = \frac{C-B}{A-B} = -\frac{p_{12} p_{34}}{p_{14} p_{23}} ,$$

jest dvojpoměr $\varkappa'$ tohoto komplexu dán vzorcem

$$\varkappa' = \frac{A+\mu}{C+\mu} \varkappa ,$$

z čehož vyplývá, že veličina μ určuje dvojpoměr $\varkappa'$.

Z toho soudíme, že *veškeré plochy našeho systému dělí se na* ∞^1 *jiných systémů, z nichž každý obsahuje pouze* ∞^3 *ploch, jichž druhé soustavy náležejí jinému komplexu tetraedrálnímu.*

V případě, že $\varkappa' = \varkappa$, stotožňují se obě soustavy přímek povrchových a příslušné plochy přecházejí v komplexové plochy kuželové daného tetraedrálního komplexu, což odpovídá hodnotě

$$lim\ \mu = \infty.$$

Vyšetřme zobrazení našeho systému ploch na prostor bodový resp. rovinový a přímkový.

Rovnici obecné plochy tohoto systému můžeme určiti buď pomocí tří přímek p_{ik}', p_{ik}'', p_{ik}''' nebo q_{ik}', q_{ik}'', q_{ik}'''; při čemž prvé tři přímky jsou opět osy tří lineárních komplexů zvláštních určujících soustavu $[q_{ik}]$ a jich souřadnice Plückerovy jsou dány hodnotami:

	12	13	14	23	42	34
p_{ik}'	0	0	-1	0	$-\sigma$	$\frac{C+\mu}{A+\mu}\varrho$
p_{ik}''	-1	0	0	$-\varrho$	$\frac{A+\mu}{B+\mu}\tau$	0
p_{ik}'''	0	-1	0	$\frac{B+\mu}{C+\mu}\sigma$	0	$-\tau$

Položíme-li nyní na okamžik

$$\frac{B+\mu}{C+\mu} = a\,,\quad \frac{C+\mu}{A+\mu} = b\,,\quad \frac{A+\mu}{B+\mu} = c$$

a provedeme-li počet, nalezneme rovnici

$$x_2 x_3 (c-1)\tau + x_2 x_4 (b-1)\varrho + x_3 x_4 (a-1)\sigma +$$
$$+ x_1 x_4 (a b - 1)\varrho\sigma + x_1 x_3 (a c - 1)\sigma\tau + x_1 x_2 (b c - 1)\varrho\tau = 0.$$

Zaveďme nyní místo hodnot ϱ, σ, τ nové veličiny X_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tak že

$$\tau = \frac{X_4}{X_1}\,,\quad \varrho = \frac{X_3}{X_1}\,,\quad \sigma = \frac{X_2}{X_1}\,,$$

čím pro koefficienty poslední rovnice nalezneme hodnoty:

$$*a_{12} = -X_3 X_4 (B-C)(C+\mu)(A+\mu),\quad *a_{34} = X_1 X_2 (B-C)(B+\mu)(A+\mu),$$
$$*a_{13} = -X_2 X_4 (C-A)(A+\mu)(B+\mu),\quad *a_{42} = X_1 X_3 (C-A)(C+\mu)(B+\mu),$$
$$*a_{14} = -X_2 X_3 (A-B)(B+\mu)(C+\mu),\quad *a_{23} = X_1 X_4 (A-B)(A+\mu)(C+\mu).$$

Veličiny X_i můžeme pokládati za tetraedrické souřadnice bodu v prostoru, který jest při určité hodnotě μ přiřaděn jisté ploše systému; za základní tetraedr pro tento systém souřadnic můžeme voliti na př. tetraedr původního komplexu tetraedrálního.

Jest patrno, že tyto rovnice podávají nám způsob, kterým jest možno systém ∞^3 přímkových ploch druhého stupně jdoucích čtyřmi pevnými body, jichž obě soustavy povrchových přímek mají na tetraedru určeném těmito body dané dvojpoměry, zobraziti na bodový nebo záměnou hodnot X_i a ξ_i na rovinový prostor.

Dle toho vidíme, že plochy našeho systému degenerují ještě pro body X_i položené ve stranách základního tetraedru při kterémkoliv μ, nebo pro hodnoty $\mu = -A, -B, -C$, kterým odpovídají redukované tetraedrální komplexy o dvojpoměrech $\varkappa' = 0, 1, \infty$ při libovolném X_i.

Pro hodnotu $lim\ \mu = \infty$ obdržíme zobrazení všech komplexových kuželových ploch tetraedrálního komplexu na bodový prostor; srovnáním příslušných rovnic nalezli bychom, že zobrazující bod a vrchol příslušného kužele jsou dva korespondující body v involuci středové, jejímž středem jest vrchol A_1 tetraedru základního a rovinou involuční protější strana $A_2 A_3 A_4$.

Zobrazení naše jest také skutečně jednoznačné, neboť při daných hodnotách a_{ik} nalezneme:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = -1 : \frac{a_{14}}{a_{42}} \frac{C-A}{A-B} : \frac{a_{12}}{a_{23}} \frac{A-B}{B-C} : \frac{a_{13}}{a_{34}} \frac{B-C}{C-A},$$

$$\mu = -\frac{(C-A)^2 B\, a_{12}\, a_{34} - (B-C)^2 A\, a_{13}\, a_{42}}{(C-A)^2 a_{12}\, a_{34} - (B-C)^2 a_{13}\, a_{42}},$$

při čemž, aby zvolená plocha a_{ik} náležela systému ploch obsažených v původním tetraedrálním komplexu, musí platiti předně

$$a_{ii} = 0$$

a, jak snadno zjistíme, také

$$(A-B)(C-A)\, a_{12} a_{34} + (B-C)(A-B)\, a_{13} a_{42} + (C-A)(B-C)\, a_{14} a_{23} = 0.$$

Tento vztah dává nám zároveň zobrazení celého systému ploch na přímkový prostor.

Označíme-li Plückerovy souřadnice zobrazující přímky p_{ik}', můžeme zobrazující vzorce psáti na př. ve tvaru:

$$\begin{aligned} {}^*p_{12}' &= (A-B)\, a_{12}, & {}^*p_{34}' &= (C-A)\, a_{34}, \\ {}^*p_{13}' &= (B-C)\, a_{13} & {}^*p_{42}' &= (A-B)\, a_{42} \\ {}^*p_{14}' &= (C-A)\, a_{14}, & {}^*p_{23}' &= (B-C)\, a_{23}, \end{aligned}$$

čímž obdržíme současně známé zobrazení celého tetraedrálního komplexu na bodový resp. rovinový prostor.

Vidíme nejprve, že

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = -1 : \frac{p_{14}'}{p_{42}'} : \frac{p_{12}'}{p_{23}'} : \frac{p_{13}'}{p_{34}'},$$

a

$$\mu = \frac{B C\, p_{12}' p_{34}' + C A\, p_{13}' p_{42}' + A B\, p_{14}' p_{23}'}{A\, p_{12}' p_{34}' + B\, p_{13}' p_{42}' + C\, p_{14}' p_{23}'};$$

poslední rovnice praví, že zobrazující přímky systému ploch, který odpovídá pevné hodnotě μ, tvoří opět tetraedrální komplex.

Volíme-li na př. pro souřadnice p_{ik}' zase původní tetraedr, nalezneme, že při hodnotě $lim\ \mu = \infty$ zobrazující přímky tvoří původní tetraedrální komplex, což, jak známo, shoduje se s tím, že veškeré komplexové plochy kuželové tetraedrálního komplexu zobrazeny jsou všemi paprsky téhož komplexu.

Věta tato však platí všeobecně, neboť rovnice pro μ dá se přičtením $\mu^2 + \mu\,(A + B + C)$-násobné identity

$$p_{12}'\,p_{34}' + p_{13}'\,p_{42}' + p_{14}'\,p_{23}' = 0$$

přepsati na tvar

$$\frac{p_{12}'\,p_{34}'}{A+\mu} + \frac{p_{13}'\,p_{42}'}{B+\mu} + \frac{p_{14}'\,p_{23}'}{C+\mu} = 0,$$

z něhož hned vyplývá, že komplex přímek p_{ik}' jest totožný s tetraedrálním komplexem přímek q_{ik} a že tedy *všecky přímkové plochy druhého stupně obsažené v jistém tetraedrálním komplexu, jichž druhé soustavy povrchových přímek náležejí jinému tetraedrálnímu komplexu, zobrazeny jsou všemi přímkami tohoto druhého komplexu.*

Zobrazující přímky nejsou však položeny na zobrazených plochách, neboť rovnice soustav $[p_{ik}]$ resp. $[q_{ik}]$ lze vhodnou úpravou přepsati do tvarů:

$$p_{12}\,p_{12}' + p_{23}\,p_{23}' - \frac{1}{\varkappa - 1}\,p_{13}\,p_{13}' = 0,$$
$$p_{13}\,p_{13}' + p_{34}\,p_{34}' + \varkappa\,p_{14}\,p_{14}' = 0,$$
$$p_{14}\,p_{14}' + p_{42}\,p_{42}' + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,p_{12}\,p_{12}' = 0,$$

a

$$\varkappa\,q_{12}\,p_{12}' + \varkappa'\,q_{23}\,p_{23}' - \frac{\varkappa'}{\varkappa' - 1}\,q_{13}\,p_{13}' = 0,$$
$$\frac{\varkappa'\,(\varkappa - 1)}{\varkappa\,(\varkappa' - 1)}\,q_{13}\,p_{13}' + q_{34}\,p_{31}' + \varkappa'\,q_{14}\,p_{14}' = 0,$$
$$\frac{\varkappa'}{\varkappa - 1}\,q_{14}\,p_{14}' + \frac{\varkappa'}{\varkappa' - 1}\,q_{42}\,p_{42}' + q_{12}\,p_{12}' = 0,$$

při čemž vzat zřetel k tomu, že přímky p_{ik}' a q_{ik} témuž tetraedrálnímu komplexu o dvojpoměru $\varkappa'$ náleží; jest nyní patrno, že druhá skupina rovnic přechází na prvou, učiníme-li $\varkappa'$ rovné $\varkappa$ a píšeme-li p_{ik} místo q_{ik}; není však vyplněna, vložíme-li místo $p_{ik}' \ldots q_{ik}$.

Připomeňme, že rovnici plochy systému jest možno psáti:

$$x_2 x_3 X_1 X_4 \varkappa'\,(\varkappa - 1) + x_2 x_4 X_1 X_3 \varkappa\,(\varkappa - 1)\,(\varkappa' - 1) - x_3 x_4 X_1 X_2 \varkappa\varkappa'\,(\varkappa' - 1)$$
$$- x_1 x_4 X_2 X_3 \varkappa\,(\varkappa' - 1) - x_1 x_3 X_2 X_4 \varkappa'\,(\varkappa - 1)\,(\varkappa' - 1)$$
$$+ x_1 x_2 X_3 X_4 \varkappa\varkappa'\,(\varkappa - 1) = 0.$$

Zaveďme do rovnice této plochy souřadnice zobrazující přímky p_{ik}'; tím obdržíme pro dané hodnoty x_i rovnici zvláštního lineárního komplexu

$$\frac{x_1 x_2}{A-B} p_{12}' + \frac{x_1 x_3}{B-C} p_{13}' + \frac{x_1 x_4}{C-A} p_{14}' + \frac{x_2 x_3}{B-C} p_{23}' + \frac{x_2 x_4}{A-B} p_{42}' + \frac{x_3 x_4}{C-A} p_{34}' = 0,$$

jehož osa má souřadnice p_{ik}^* dané hodnotami

	12	13	14	23	42	34
p_{ik}^*	$\frac{x_3 x_4}{C-A}$	$\frac{x_2 x_4}{A-B}$	$\frac{x_2 x_3}{B-C}$	$\frac{x_1 x_4}{C-A}$	$\frac{x_1 x_3}{B-C}$	$\frac{x_1 x_2}{A-B}$

Tato osa p_{ik}^* náleží vždy původnímu komplexu tetraedrálnímu.

Dle toho, uvažujíce plochy systému procházející dalšími pevnými body mimo vrcholy základního tetraedru ležícími, můžeme říci, že třemi dalšími body obecně položenými procházejí celkem čtyři plochy, jichž povrchové přímky obou soustav mají dané dvojpoměry $\varkappa$, $\varkappa'$. Zobrazující přímky těchto ploch jsou přímky společné tří lineárních a jednoho tetraedrálního komplexu o dvojpoměru $\varkappa'$.

Zobrazující přímky ploch, které oddělují harmonicky dva body $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$, tvoří obecný lineární komplex o rovnici

$$\frac{x_1^{(h)} x_2^{(k)} + x_2^{(h)} x_1^{(k)}}{A-B} p_{12}' + \frac{x_1^{(h)} x_3^{(k)} + x_3^{(h)} x_1^{(k)}}{B-C} p_{13}' + \frac{x_1^{(h)} x_4^{(k)} + x_4^{(h)} x_1^{(k)}}{C-A} p_{14}' + \frac{x_2^{(h)} x_3^{(k)} + x_3^{(h)} x_2^{(k)}}{B-C} p_{23}' + \frac{x_2^{(h)} x_4^{(k)} + x_4^{(h)} x_2^{(k)}}{A-B} p_{42}' + \frac{x_3^{(h)} x_4^{(k)} + x_4^{(h)} x_3^{(k)}}{C-A} p_{34}' = 0$$

K Schubertově*) charakteristice $\mu^4 = 2$ našeho systému ploch můžeme tedy ještě připojiti, že lze vésti dvě plochy systému, které současně oddělují harmonicky čtyři obecně položené páry bodové, nebo lze vésti čtyři plochy oddělující tři páry bodové harmonicky a mající dané dvojpoměry na obou soustavách přímek povrchových. Podobně jest možno určiti čtyři tyto plochy mající společný pól a polární rovinu, resp. které mají společný střed.

Volíme-li dále body x_i, y_i, x_i', y_i' a dáme-li plochám původního systému oddělovati harmonicky páry $(x_i x_i')$, $(x_i y_i')$, $(y_i x_i')$, $(y_i y_i')$, jsou přímky spojující body x_i, y_i a x_i', y_i' konjugované poláry těchto ploch. Vidíme tedy na př., že obecně dvě plochy systému mají v dané přímce jednu svou osu.

*) Dr. R. Sturm: Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I., pag. 347.

Úvahy naše jest v zájmu celku doplniti rozborem předchozích rovnic v případě, že plochy systému procházejí danou přímkou.*)

Volme nejprve přímku p_{ik} daného tetraedrálního komplexu; jak známo, tvoří zobrazující přímky ploch, které tuto přímku obsahují, prostorový svazek, jehož vrchol x_i^* nalezneme jakožto průsečík os tří zvláštních lineárních komplexů daných první skupinou rovnic na str. 6., jejichž osy $p_{ik}^{(n)}$ mají souřadnice

	12	13	14	23	42	34
$p_{ik}^{(1)}$	0	0	p_{23}	0	$-\frac{1}{\varkappa - 1} p_{13}$	p_{12}
$p_{ik}^{(2)}$	p_{34}	0	0	$\varkappa p_{14}$	p_{13}	0
$p_{ik}^{(3)}$	0	p_{42}	0	p_{14}	0	$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} p_{12}$

Bod x_i^* dán jest poměrem koordinát

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* : x_4^* = 1 : \frac{p_{14}}{p_{42}} : \frac{p_{12}}{p_{23}} : \frac{p_{13}}{p_{34}} .$$

Lze nyní snadno ukázati, že osa p_{ik}^* zvláštního lineárního komplexu, jehož paprsky zobrazují plochy systému procházející bodem x_i^*, jest totožna s přímkou p_{ik}, která koresponduje bodu x_i^* dle schemata daného na str. 7.

Skutečně schema toto podává pro bod $\left(1, \frac{p_{14}}{p_{42}}, \frac{p_{12}}{p_{23}}, \frac{p_{13}}{p_{34}}\right)$ souřadnice osy takové, že vyplývá

$$^*p_{ik}^* = p_{ik} ,$$

použijeme-li při tom vztahů

$$^*(A - B) = p_{14} p_{23} , \quad ^*(B - C) = p_{12} p_{34} , \quad ^*(C - A) = p_{13} p_{42}$$

vyplývajících z rovnice daného tetraedrálního komplexu.

Vzhledem ku předchozím úvahám můžeme ∞^2 paprsků tohoto svazku prostorového o vrcholu x_i^* roztříditi v ∞^1 komplexových kuželových ploch druhého stupně téhož svazku, které příslušejí systému ∞^1 tetraedrálních komplexů o původním základním tetraedru, tak že každá tato kuželová plocha zobrazuje svými přímkami ∞^1 ploch, které procházejíce přímkou p_{ik}^* odpovídající bodu x_i^* v daném tetraedrálním komplexu mají povrchové přímky druhé soustavy obsažené v onom tetraedrálním komplexu, ve kterém jest obsažena i příslušná zobrazující kuželová plocha.

*) Ibid. Str. 369, po stránce synthetické.

Mají-li nyní plochy systému obsahovati přímku q_{ik}, která nenáleží původnímu komplexu tetraedrálnímu, jsou příslušné zobrazující přímky společnými přímkami tří zvláštních lineárních komplexů daných druhou skupinou rovnic na str. 6., v nichž dvojpoměr $\varkappa'$ vytknut jest již zvolenou přímkou q_{ik}. Poněvadž nyní simultanní invarianty těchto tří komplexů jsou různé od nuly, tvoří tyto zobrazující přímky soustavu $[p_{ik}']$ o dvojpoměru $\varkappa'$ jisté plochy našeho systému, která přímce q_{ik} dle našeho zobrazení jest přidružena.

Jsou-li $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$ dva body této přímky, jimž přiřaděny přímky $p_{ik}^{(h)}$, $p_{ik}^{(k)}$, jest bodu

$$x_i^{(h)} + \lambda\, x_i^{(k)}$$

přiřaděn paprsek komplexu o souřadnicích

$$^* p_{ik} = p_{ik}^{(h)} + \lambda\, l_{jh} + \lambda^2 p_{ik}^{(k)},$$

značí-li rovnice

$$\sum l_{jh}\, p_{jh}' = 0$$

rovnici obecného lineárního komplexu, jehož paprsky zobrazovaly plochy systému harmonicky oddělené body $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$.

Současně však platí, jak z původních vzorců snadno vyplývá,

$$\sum l_{jh}\, p_{jh}^{(h)} = 0, \quad \sum l_{jh}\, p_{jh}^{(k)} = 0,$$

tak že přímky $p_{ik}^{(h)}$, $p_{ik}^{(k)}$ komplexu l_{ik} náležejí, a označíme-li dále symbolem J_{ll} invariant tohoto komplexu, jest platný vztah

$$J_{ll} + \sum p_{ik}^{(h)}\, p_{jh}^{(k)} = 0.$$

Tyto rovnice jsou skutečně také nutny, má-li přímka p_{ik} náležeti téže soustavě $[p_{ik}]$ jako přímky $p_{ik}^{(h)}$, $p_{ik}^{(k)}$.*)

Komplex l_{ik} stává se zvláštním, jsou-li body $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$ položeny na paprsku p_{ik}^*, který náleží původnímu tetraedrálnímu komplexu. Osa jeho prochází průsečíkem x_i^* přímek $p_{ik}^{(h)}$, $p_{ik}^{(k)}$, který koresponduje současně přímce p_{ik}^*, avšak osa tato nenáleží tomuto tetraedrálnímu komplexu, jak jednoduchý rozbor příslušných rovnic snadno potvrdí.

Dle toho můžeme veškeré zobrazující *zvláštní* komplexy lineární, jichž osy procházejí pevným bodem, takto charakterisovati:

Komplexy, jichž osy jsou povrchovými přímkami komplexové plochy kuželové původního tetraedrálního komplexu, zobrazují svými paprsky plochy procházející jednotlivými body přímky, která v tomto tetraedrálním komplexu přísluší tomuto pevnému bodu; komplexy, jichž osami jsou všecky ostatní přímky tohoto prostorového svazku, zobrazují systémy ploch, jež oddělují harmonicky bodový pár položený na této přímce.

---

*) C. M. Jessop: A treatise on the line complex. Pag. 66.

Syntheticky vyplývá věc tato následující úvahou.

Mají-li plochy systému oddělovati harmonicky body $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$, jest třeba, aby na spojnici jejich q_{ik} vytínaly páry involuce bodové, jejíž dvojné body jsou tyto dva body; jednotlivým párům bodovým této involuce odpovídají však v tetraedrálním komplexu původním páry přímek, položených na ploše korespondující přímce q_{ik}, které tvoří involuci konjugovaných polár příslušného lineárního komplexu, jenž tedy takto jest Chaslesovým způsobem vytvořen.

Náleží-li nyní spojnice bodů $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$ našemu tetraedrálnímu komplexu, obdržíme involuci konjugovaných polár na komplexové ploše kuželové, která přísluší této spojnici a příslušný lineární komplex vytvořen Chasleovým způsobem dává nyní zvláštní lineární komplex, jehož osou jest osa involuce těchto sdružených polár. Tato osa prochází, jak patrno, vrcholem této kuželové plochy, jenž odpovídá spojnici obou zvolených bodů.

Učiníme-li dále body $x_i^{(h)}$, $x_i^{(k)}$ nekonečně blízké, ponechávajíce při tom přímku je spojující pevnou, jsou i dvojné elementy příslušné involuce konjugovaných polár nekonečně blízké, a tedy involuce sama jest parabolickou; příslušný lineární komplex jest vždy zvláštní; osou jeho jest paprsek tetraedrálního komplexu určující sjednocený dvojný element této parabolické involuce. Náleží-li spojnice těchto dvou nekonečně blízkých bodů tetraedrálnímu komplexu, zapadne osa tato na komplexový kužel příslušný této spojnici.

Procházejí-li plochy systému současně oběma nekonečně blízkými body, to jest, dotýkají-li se dané přímky v daném bodě, tvoří příslušné zobrazující přímky lineární kongruenci paprskovou o nekonečně blízkých základních osách, která jest společná dvěma nekonečně blízkým lineárním komplexům určeným oběma body. *Tato kongruence jest, jak patrno, tvořena tečnami plochy systému, která odpovídá společné tečně, v bodech povrchové přímky odpovídající dotyčnému bodu.*

Snadno lze dále poznati, že *všecky plochy druhého stupně obsažené — dle dosavadních pojmů — v daném tetraedrálním komplexu a dotýkající se dané přímky zobrazeny jsou paprsky zvláštního kvadratického komplexu, který jest tvořen všemi tečnami plochy systému korespondující společné tečně.*

Dle toho bylo by možno charakteristiku $\nu^4 = 32$ také tímto způsobem odvoditi; totéž číslo našli bychom také pro plochy, jichž povrchové přímky obou soustav mají dané dvojpoměry na tetraedru základním a které se dotýkají tří obecně daných přímek.

Obraťme se nyní k lineárnímu komplexu o souřadnicích l_{ik}.

Jest především patrno, že kterýkoli z ∞^5 lineárních komplexů prostoru lze tímto způsobem uplatniti, ježto hodnoty l_{ik} lze považovati za neodvisle proměnné; poněvadž však všecky body prostoru lze seskupiti v ∞^6 párů bodových, musí témuž lineárnímu komplexu příslušeti ∞^1 párů, a tedy každá z ∞^3 ploch systému, které jsou přímkami tohoto komplexu zobrazeny, musí současně harmonicky oddělovati ∞^1 párů bodových.

Za příčinou bližšího rozboru volme jakožto první bodový pár určující náš komplex body x_i, x_i' a pišme proměnné části koordinát l_{ik} vzhledem k pevnému komplexu tetraedrálnímu

$$* l_{ik}' = x_i x_k' + x_k x_i', \qquad i \gtrless k;$$

souřadnice spojnice těchto dvou bodů znamenejme p_{ik}; pak platí rovnice:

$$\begin{aligned} -p_{12} l_{34}' + p_{14} l_{23}' + p_{42} l_{13}' &= 0, \\ -p_{13} l_{42}' + p_{12} l_{34}' + p_{23} l_{14}' &= 0, \\ -p_{14} l_{23}' + p_{13} l_{42}' + p_{34} l_{12}' &= 0, \end{aligned}$$

stanovící tři zvláštní lineární komplexy, které obsahují spojnice párů bodových, jež podávají týž komplex l_{ik}. *Spojnice tyto tvoří tedy soustavu povrchových přímek jisté plochy druhého stupně procházející taktéž vrcholy základního tetraedru*; jmenujme soustavu tuto *spojující soustavou* komplexu l_{ik} a značme ji $[l_{ik}]$.

Jak patrno z těchto rovnic, jest tato soustava obsažena vždy v tetraedrálním komplexu o rovnici

$$\sum p_{ik} p_{jh} l_{ik}' l_{jh}' = 0 .$$

Naopak eliminací hodnot x_i' nalezneme rovnice

$$\begin{aligned} x_1 x_2 l_{34}' + x_3 x_4 l_{12}' - x_1 x_3 l_{42}' - x_2 x_4 l_{13}' &= 0, \\ x_1 x_2 l_{34}' + x_3 x_4 l_{12}' - x_1 x_4 l_{23}' - x_2 x_3 l_{14}' &= 0; \end{aligned}$$

tytéž rovnice však vzhledem k hodnotám x_i' by vyplývaly eliminací veličin x_i, z čehož jest patrno, že *jednotlivé páry bodové, které příslušejí témuž lineárnímu komplexu a které tedy současně harmonicky oddělují každou z ∞^3 ploch systému zobrazených paprsky tohoto komplexu, tvoří prostorovou křivku stupně čtvrtého jevící se jakožto průsek dvou ploch druhého stupně* daných posledními rovnicemi.

Rovnici plochy obsahující spojující soustavu $[l_{ik}]$ obdrželi bychom použitím os tří posledních lineárních komplexů; srovnáním s rovnicemi na str. 4. nalezli bychom rovnici, kterou lze odvoditi z rovnic posledních násobením faktory $l_{12}' l_{34}' - l_{14}' l_{23}'$ resp. $l_{13}' l_{42}' - l_{12}' l_{34}'$ a sečtením.*)

*) Prof. Dr. Corrado Segre, jemuž jsem výsledky práce před uveřejněním zběžně sdělil, upozornil mne, že v XXI. svazku Battaglini-ho časopisu „Giornale di matematiche" v úvaze nadepsané „Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro", str. 355, uvažoval systém ∞^5 rozvinutelných ploch 4. třídy o těchže souřadnicích $\varrho c_{ik} = a_i b_k + a_k b_i$, duální k systému ∞^5 křivek stupně 4. shora odvozených. Jak z uvedeného pojednání patrno, nese se použití našeho systému křivek k souvislosti úplného systému všech ∞^5 lineárních komplexů se všemi přímkovými plochami druhého stupně, které procházejí čtyřmi pevnými body, kdežto úvahy Segrovy týkají se ponejvíce theorie komplexu Battaglini-ho.

Bylo již ukázáno, že komplex l_{ik} stane se zvláštním, jakmile spojnice p_{ik} bodů x_i, x_i' náleží původně danému komplexu tetraedrálnímu; skutečně z rovnic předchozích vyplývá obecně, zavedeme-li současně tři konstanty α, β, γ

$$\alpha = l_{13}' l_{42}' - l_{12}' l_{34}' = p_{14} p_{23},$$
$$\beta = l_{14}' l_{23}' - l_{13}' l_{42}' = p_{12} p_{34},$$
$$\gamma = l_{12}' l_{34}' - l_{14}' l_{23}' = p_{13} p_{42},$$

a vzhledem na původní tetraedrální komplex najdeme dále

$$* l_{12}' l_{34}' = A + \mu, \quad * l_{13}' l_{42}' = B + \mu, \quad * l_{14}' l_{23}' = C + \mu,$$

z čehož vysvítá předně, že spojující soustava $[l_{ik}]$ náleží celá původnímu komplexu tetraedrálnímu, jak musí také vzhledem k poučkám na počátku odvozeným býti, a dále, že osa l_{ik} tohoto komplexu náleží tetraedrálnímu komplexu o dvojpoměru

$$\varkappa^* = \frac{A + \mu}{C + \mu} \varkappa,$$

v němž se také nachází druhá soustava povrchových přímek příslušná soustavě $[l_{ik}]$.

Dalším srovnáním příslušných souřadnic shledáme, že *osa tohoto zvláštního lineárního komplexu zobrazuje vzhledem k původnímu tetraedrálnímu komplexu plochu, na které se příslušná spojující soustava nachází.*

Ježto osa tato jevila se jakožto osa jisté involuce povrchových přímek na kuželové ploše odpovídající v původním tetraedrálním komplexu spojnici obou bodů a jest tedy vlastně polárou roviny obsahující oba dvojné paprsky této involuce, platí mezi těmito osami a zvoleným párem bodovým tento vztah:

Veškeré páry bodové položené na kterémkoliv paprsku původního tetraedrálního komplexu seskupeny jsou v ∞^1 involutorních korespondencí typu [2]; každá z těchto korespondencí dává svými jednotlivými páry vznik ∞^1 zvláštním lineárním komplexům, jichž osy tvoří komplexovou plochu kuželovou jiného tetraedrálního komplexu.

Přihlédněme nyní blíže k systému těchto křivek stupně čtvrtého:

Jest patrno, že každá tato křivka jest jedním párem bodovým úplně určena a všecky tvoří systém ∞^5 elementů jednoznačně korespondující vzhledem k danému tetraedrálnímu komplexu všem ∞^5 lineárním komplexům prostoru.

Vzhledem k plochám, které systém těchto křivek určují, vysvítá, že na každé ploše druhého stupně, která prochází dvěma protilehlými hranami základního tetraedru, nachází se ∞^2 těchto křivek; jest totiž každá z těchto ploch dána vytknutím dvou párů hodnot:

$$l_{12}', l_{34}'; \quad l_{13}', l_{42}'; \quad l_{14}', l_{23}'.$$

Je-li korespondující lineární komplex zvláštním, hovějí tyto souřadnice jisté homogenní rovnici druhého stupně a na každé této ploše nachází se pouze ∞^1 křivek.

Ježto všech ∞^5 křivek našeho systému prochází vrcholy základního tetraedru a všechny plochy druhého stupně jdoucí týmiž čtyřmi vrcholy tvoří systém téže mohutnosti, obsahuje každá obecná plocha tohoto systému ∞^1 našich křivek, ježto i každou křivkou prochází ∞^1 těchto ploch.

Jak příslušné vzorce ukazují, jest každá naše křivka spojena jednou plochou druhého stupně s každým párem protějších hran základního tetraedru a její čtvrté stopní body na rovinách tetraedru jsou body o souřadnicích:

$$(0,\ l_{12}',\ l_{13}',\ l_{14}');\ (l_{21}',\ 0,\ l_{23}',\ l_{24}');\ (l_{31}',\ l_{32}',\ 0,\ l_{34});\ (l_{41}',\ l_{42}',\ l_{43}',\ 0).$$

Celý tento systém ∞^5 křivek stupně čtvrtého jest však nejen jedinému tetraedrálnímu komplexu adjungován, nýbrž všem tetraedrálním komplexům o společném základním tetraedru.

Jak příslušné vzorce ukazují, dají se souřadnice l_{ik} lineárního komplexu příslušného bodům x_i, x_i' a tetraedrálnímu komplexu o dvojpoměru $\varkappa$ psáti:

$$* l_{12} = l_{12}',\ * l_{13} = -\frac{l_{13}'}{\varkappa},\ * l_{14} = \frac{l_{14}'}{\varkappa - 1},$$

$$* l_{34} = \frac{l_{34}'}{\varkappa - 1},\ * l_{42} = l_{42}',\ * l_{23} = -\frac{l_{23}'}{\varkappa}.$$

Souřadnice tyto, volíme-li body x_i, x_i' pevné, dávají pro proměnné $\varkappa$ systém ∞^1 *lineárních komplexů, které svými paprsky zobrazují v různých tetraedrálních komplexech o společném tetraedru systém* ∞^4 *přímkových ploch druhého stupně, tak že každá plocha tohoto systému odděluje harmonicky* ∞^1 *párů bodových téže prostorové křivky stupně čtvrtého.*

Tento systém ∞^1 lineárních komplexů jest také stupně druhého, neboť komplexové roviny těchto komplexů pro libovolný bod prostoru obalují kuželovou plochu stupně druhého a vrcholy komplexových svazků paprskových vytvořují v dané rovině jistou kuželosečku, jak snadno lze poznati napsáním rovnice příslušného nulsystému.

Značme literami **A**, **B**, **C** tři zvláštní lineární komplexy, tak že:

$$\mathbf{A} \equiv l_{12}'\, p_{12} + l_{42}'\, p_{42} = 0,$$
$$\mathbf{B} \equiv l_{13}'\, p_{13} + l_{23}'\, p_{23} = 0,$$
$$\mathbf{C} \equiv l_{14}'\, p_{14} + l_{34}'\, p_{34} = 0;$$

rovnice našeho systému lineárních komplexů jest dána pak ve tvaru

$$\mathbf{A}\,\varkappa\,(\varkappa - 1) - \mathbf{B}\,(\varkappa - 1) + \mathbf{C}\,\varkappa = 0.$$

Každá přímka prostoru jest komplexovým paprskem dvou komplexů našeho systému; vložíme-li souřadnice této přímky do poslední rovnice,

obdržíme dvě hodnoty pro dvojpoměr $\varkappa$ a tedy i dva tetraedrální komplexy určené základním tetraedrem a těmito hodnotami. V těchto dvou tetraedrálních komplexech nacházejí se plochy druhého stupně, které zvolená přímka vzhledem k nim zobrazuje; druhé soustavy povrchových přímek těchto dvou ploch nacházejí se dle předchozích úvah v tetraedrálním komplexu určeném zvolenou přímkou a základním tetraedrem.

Pozorujme nyní dva nekonečně blízké lineární komplexy tohoto systému, které odpovídají dvěma nekonečně blízkým hodnotám veličiny $\varkappa$.

Komplexové roviny jejich pro libovolný bod dávají, jak patrno, průsekem svým povrchovou přímku shora zmíněné kuželové plochy, a spojnice dvou soumezných vrcholů příslušných svazků komplexových paprsků v libovolné rovině jest tečnou řečené kuželosečky. Z toho soudíme, že *veškeré paprsky našeho kvadratického systému lineárních komplexů obsažené vždy ve dvou soumezných komplexech tvoří kvadratický komplex.*

Rovnice tohoto komplexu nalezneme, položíme-li diskriminant rovnice celého systému rovný nule a tvar její, jak snadno zjistíme, jest

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2 - 2\,\mathbf{A}\,\mathbf{B} - 2\,\mathbf{A}\,\mathbf{C} - 2\,\mathbf{B}\,\mathbf{C} = 0.$$

Z úvah těchto současně i plyne jednoznačná korespondence mezi povrchovými přímkami komplexových kuželů resp. body komplexových kuželoseček a systémem hodnot $\varkappa$.

Každému paprsku tohoto komplexu přísluší dvě splývající plochy a jak patrno, tvoří komplex tento rozhraní mezi všemi přímkami prostoru, jimž přísluší dvě reálné resp. pomyslné plochy obsažené v uvažovaném systému ∞^4 ploch.

Poukažme nejprve k charakteru tohoto komplexu.

V našem kvadratickém systému lineárních komplexů jsou obsaženy čtyři speciální komplexy; tři z nich odpovídají speciálním tetraedrálním komplexům o dvojpoměrech ∞, 0, 1, a to jsou již jmenované komplexy o rovnicích

$$\mathbf{A} = 0,\ \mathbf{B} = 0,\ \mathbf{C} = 0;$$

čtvrtý speciální lineární komplex odpovídá tetraedrálnímu komplexu o dvojpoměru

$$\varkappa_4 = \frac{l_{14}'\, l_{23}' - l_{13}'\, l_{42}'}{l_{12}'\, l_{34}' - l_{13}'\, l_{42}'}.$$

Tento tetraedrální komplex jest komplex o rovnici

$$\sum p_{ik}\, p_{jh}\, l_{ik}'\, l_{jh}' = 0,$$

a ten dle předchozích úvah obsahuje spojující soustavu harmonických párů bodových jediné křivky čtvrtého stupně příslušné celému tomuto kvadratickému systému lineárních komplexů.

Zavedeme-li dle dřívějších sjednání pro $\varkappa_4$ tvar $-\frac{\beta}{\alpha}$ a uvážíme-li, že platí vztah

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

lze rovnici čtvrtého zvláštního lineárního komplexu psáti ve tvaru

$$\frac{\mathbf{A}}{\alpha} + \frac{\mathbf{B}}{\beta} + \frac{\mathbf{C}}{\gamma} = 0.$$

Osa tohoto komplexu má souřadnice p_{ik}' dané hodnotami

	12	13	14	23	42	34
p_{ik}'	$\frac{l_{34}'}{\gamma}$	$\frac{l_{42}'}{\alpha}$	$\frac{l_{23}'}{\beta}$	$\frac{l_{14}'}{\gamma}$	$\frac{l_{13}'}{\beta}$	$\frac{l_{12}'}{\alpha}$

poněvadž však plocha zobrazená přímkou p_{ik}' v tomto tetraedrálním komplexu o dvojpoměru $\varkappa_4$ má obecně rovnici

$$\frac{1}{\alpha}(x_1 x_2 p_{12}' + x_4 x_2 p_{42}') + \frac{1}{\beta}(x_1 x_3 p_{13}' + x_2 x_3 p_{23}') + \frac{1}{\gamma}(x_1 x_4 p_{14}' + x_3 x_4 p_{34}') = 0,$$

obdržíme, vložíme li za p_{ik}' příslušné hodnoty z posledního schematu, rovnici

$$\beta(x_1 x_2 l_{34}' + x_3 x_4 l_{12}') + \gamma(x_1 x_3 l_{42}' + x_4 x_2 l_{13}') + \alpha(x_1 x_4 l_{23}' + x_2 x_3 l_{14}') = 0,$$

která, jak patrno z předešlého, jest rovnicí plochy obsahující spojující soustavu křivky čtvrtého stupně příslušné našemu systému lineárních komplexů.

Dle toho nabývá věta vyslovená na str. 12. všeobecné platnosti, a lze tudíž říci:

Plocha obsahující spojující soustavu křivky čtvrtého stupně příslušné danému bodovému páru jest zobrazena vždy osou zvláštního lineárního komplexu vzhledem k onomu tetraedrálnímu komplexu, který obsahuje paprsek spojující daný bodový pár a sice tak, že paprsky tohoto lineárního komplexu zobrazují vzhledem k tomuto tetraedrálnímu komplexu plochy systému oddělující harmonicky daný bodový pár a současně i všechny ostatní bodové páry určené spojující soustavou na příslušné křivce čtvrtého stupně čtvrtého.

Každý z těchto čtyř zvláštních lineárních komplexů má s uvažovaným kvadratickým komplexem dvojnásob počítanou lineární kongruenci společnou, a sice:

$$\mathbf{A} = 0,\ \mathbf{B} - \mathbf{C} = 0;$$
$$\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{C} - \mathbf{A} = 0;$$
$$\mathbf{C} = 0,\ \mathbf{A} - \mathbf{B} = 0;$$

$$\frac{\mathbf{A}}{\alpha} + \frac{\mathbf{B}}{\beta} + \frac{\mathbf{C}}{\gamma} = 0, \quad \frac{\mathbf{A}}{\alpha^2} - \frac{\mathbf{B}}{\beta^2} = 0.$$

Z toho však lze souditi, že všecky komplexové kuželosečky našeho komplexu kvadratického protínají osy těchto čtyř zvláštních komplexů a dotýkají se v těchto bodech příslušných paprsků těchto čtyř kongruencí. Podobně i veškeré komplexové plochy kuželové dotýkají se těchto čtyř os v bodech, ve kterých paprsky těchto kongruencí vedené vrcholem komplexového kužele osy tyto protínají.

Druhé základní přímky těchto čtyř kongruencí jsou osy dalších čtyř zvláštních lineárních komplexů o rovnicích:

$$\frac{l_{14}' l_{23}'}{\alpha}\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = 0,$$
$$\frac{l_{12}' l_{34}'}{\beta}\mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{A} = 0.$$
$$\frac{l_{13}' l_{42}'}{\gamma}\mathbf{C} + \mathbf{A} - \mathbf{B} = 0,$$
$$\frac{l_{14}' l_{23}'}{\alpha}\mathbf{A} + \frac{l_{12}' l_{34}'}{\beta}\mathbf{B} + \frac{l_{13}' l_{42}'}{\gamma}\mathbf{C} = 0.$$

Osy prvých čtyř lineárních komplexů jsou stationární přímky našeho kvadratického komplexu, a singulární plochou jeho jest dvojnásob počítaná plocha druhého stupně společná komplexům

$$\mathbf{A} = 0, \ \mathbf{B} = 0, \ \mathbf{C} = 0.$$

Dle obecné theorie komplexů tohoto druhu*) seznáváme, že tento kvadratický komplex obsahuje ∞^1 lineárních kongruencí, jejichž základní přímky tvoří na této singulární ploše páry involutorní korespondence typu [2], tak že na př. komplexová kuželosečka v libovolné rovině položená jest řídící křivkou involutorní korespondence bodové na kuželosečce, která jest průsekem této roviny se singulární plochou.

Jedná-li se o případ, že veškeré přímkové plochy druhého stupně procházející čtyřmi vrcholy základního tetraedru obsahují ještě další pevný bod x_i, jsou tyto plochy tvořící systém ∞^3 ploch rozděleny do ∞^1 tetraedrálních komplexů po systémech čítajících ∞^3 elementů. Osy ∞^1 zvláštních lineárních komplexů, které svými paprsky tyto jednotlivé plochy zobrazují, nacházejí se ve třech zvláštních lineárních komplexech o rovnicích:

$$p_{42} x_2 - p_{14} x_1 = 0,$$
$$p_{34} x_4 - p_{13} x_1 = 0,$$
$$p_{23} x_3 - p_{12} x_1 = 0,$$

tak že předchozí kvadratický komplex přechází na komplex tečen plochy druhého stupně určené těmito třemi lineárními komplexy, to jest na komplex tečen příslušné singulární plochy bodu x_i.

*) Dr. R. Sturm: Die Gebilde etc. III. Str. 449 a násl.

Ježto každá tato singulární plocha obsahuje v obecném případě přímky

	12	13	14	23	42	34
p^{ik}_{A}	0	l_{42}'	0	0	0	l_{12}'
p^{ik}_{B}	0	0	l_{23}'	0	l_{13}'	0
p^{ik}_{C}	l_{34}'	0	0	l_{14}'	0	0

jakožto osy prvých tří základních komplexů lineárních, jest patrno, že všecky tyto singulární plochy tvoří systém ∞^3 ploch druhého stupně procházejících vrcholy A_3, A_4, A_2 tetraedru základního a dotýkajících se stěn protilehlých těmto vrcholům.

Avšak pro všecky páry bodové v prostoru, které seskupeny jsou v ∞^5 křivek čtvrtého stupně zde uvažovaných, obdržíme systém ∞^5 *kvadratických komplexů* typu právě popsaného, který svými komplexovými kuželi a kuželosečkami vyplňuje celý kuželový a kuželosečkový prostor. Dle toho jest tedy patrno, že *z těchto* ∞^5 *komplexů jest jich vždy* ∞^2 *konsingulárních.*

Skutečně, volíme-li jistý systém hodnot l_{ik}', jest tím dána i určitá singulární plocha kvadratického komplexu vytknutá komplexy $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$, avšak tato plocha i tyto tři komplexy se nezmění, nahradíme-li hodnoty l_{ik}' hodnotami:

$$\lambda_A l_{12}', \quad \lambda_A l_{42}', \quad \lambda_B l_{13}', \quad \lambda_B l_{23}', \quad \lambda_C l_{14}', \quad \lambda_C l_{34}',$$

při čemž λ_A, λ_B, λ_C značí tři libovolné faktory. Kvadratické komplexy příslušné libovolným hodnotám těchto parametrů dávají tedy systém ∞^2 komplexů konsingulárních o třech pevných stationárních přímkách p_A, p_B, p_C.

Čtvrtý zvláštní lineární komplex, jehož osa stanoví čtvrtou stationární přímku těchto kvadratických komplexů, jest dán rovnicí

$$\frac{\mathbf{A}}{\lambda_B c - \lambda_C b} + \frac{\mathbf{B}}{\lambda_C a - \lambda_A c} + \frac{\mathbf{C}}{\lambda_A b - \lambda_B a} = 0,$$

kde klademe současně

$$a = l_{14}' i_{23}' \quad b = l_{12}' l_{34}', \quad c = l_{13}' l_{42}'.$$

Rovnice tato dává však ∞^1 různých lineárních komplexů zvláštních, neboť invariant tohoto komplexu vymizí pro kterékoliv hodnoty parametrů dávaje identitu

$$a(\lambda_B c - \lambda_C b) + b(\lambda_C a - \lambda_A c) + c(\lambda_A b - \lambda_B a) \equiv 0,$$

a osa jeho nachází se na pevné singulární ploše a náleží k soustavě přímek p_A, p_B, p_C a může zaujmouti zde pouze ∞^1 poloh.

Má li poslední rovnice stanoviti týž lineární komplex pro dvě různá terna parametrů λ_A, λ_B, λ_C, musí platiti rovnice

$$\begin{aligned} \lambda_B c - \lambda_C b &= \varrho (\lambda_B' c - \lambda_C' b), \\ \lambda_C a - \lambda_A c &= \varrho (\lambda_C' a - \lambda_A' c), \\ \lambda_A b - \lambda_B a &= \varrho (\lambda_A' b - \lambda_B' a), \end{aligned}$$

z nichž eliminací faktoru ϱ plyne vztah

$$\begin{vmatrix} \lambda_A & \lambda_B & \lambda_C \\ \lambda_A' & \lambda_B' & \lambda_C' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

který tedy váže parametry komplexů, jež mají *všecky čtyři stationární přímky pevné.*

Ježto tato čtvrtá stationární přímka zobrazovala vzhledem k tetraedrálnímu komplexu, který obsahoval spojnice párů bodových daných hodnotami l_{ik}', plochu obsahující spojující soustavu křivky čtvrtého stupně příslušné těmto hodnotám l_{ik}', jsou tímto způsobem nalezeny též veškeré spojující soustavy resp. křivky čtvrtého stupně zobrazené pevnou přímkou vzhledem k tetraedrálním komplexům o dvojpoměru

$$\varkappa_1 = -\frac{\lambda_B (\lambda_C a - \lambda_A c)}{\lambda_A (\lambda_B c - \lambda_C b)},$$

kde nutno ovšem nové hodnoty λ_A', λ_B', λ_C' vzhledem k λ_A, λ_B, λ_C tak volit, aby hověly poslední relaci.

Dvojpoměr $\varkappa$ určený čtvrtou stationární přímkou jakožto přímkou zobrazující na tetraedru základním jest pro tyto hodnoty parametrů invariantní, jak z hořejších rovnic plyne, neboť

$$\varkappa = -\frac{b (\lambda_C a - \lambda_A c)}{a (\lambda_B c - \lambda_C b)}.$$

Předposledním vzorcem dány jsou také příslušné tetraedrální komplexy o společném tetraedru základním, v nichž daná pevná přímka zobrazuje spojující soustavy párů bodových seskupených v ∞^1 křivek stupně čtvrtého vytknutého typu tak, že celý zvláštní lineární komplex, jehož osou jest tato přímka, zobrazuje svými paprsky vzhledem k těmto tetraedrálním komplexům systém ∞^4 přímkových ploch druhého stupně, které procházejí vrcholy základního tetraedru a z nichž vždy ∞^3 ploch odděluje harmonicky všecky příslušné páry bodové položené na jedné z těchto křivek.

Vytkneme-li totiž čtvrtou stationární přímku, určí tato jednoznačně i svou singulární plochu a tím i prvé tři zvláštní lineární komplexy základní atím také základní systém hodnot l_{ik}' a poměr prvého terna $\lambda_A : \lambda_B : \lambda_C$,

jak snadno plyne z posledních úvah a z polohy singulární plochy k tetraedru základnímu.

Jest také patrno, že mezi ∞^2 konsingulárními komplexy našeho druhu nachází se jeden speciální tečnový komplex společné singulární plochy. Porovnáme-li skupiny rovnic příslušných lineárních komplexů, seznáme, že osy těchto komplexů stanoví povrchové přímky různých soustav jedné a téže plochy, platí-li pro souřadnice bodu x_i, který tento tečnový komplex uručje, vztah

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \frac{l_{23}'}{l_{13}'} : \frac{l_{34}'}{l_{14}'} : \frac{l_{42}'}{l_{12}'},$$

jak srovnáním promítacích rovin těchto přímek snadno zjistíme.

V systému ∞^4 ploch druhého stupně, jenž každý zvláštní lineární komplex shora uvedeným způsobem zobrazuje, nachází se vždy systém ∞^3 ploch, které tímto bodem x_i procházejí, a sice jsou to plochy zobrazené paprsky tohoto lineárního komplexu vzhledem k onomu tetraedrálnímu komplexu, který obsahuje osu tohoto zvláštního lineárního komplexu.

V tomto případě musí tedy $\varkappa_4 = \varkappa$, což ale nutně vyžaduje, aby nové terno parametrů dáno bylo poměrem

$$\lambda_A' : \lambda_B' : \lambda_C' = a : b : c,$$

neboť dvojpoměr $\varkappa_4$ lze pro dvě příslušná terna parametrů psáti ve tvaru

$$\varkappa_4 = -\frac{\lambda_B' (\lambda_C a - \lambda_A c)}{\lambda_A' (\lambda_B c - \lambda_C b)}.$$

Nové hodnoty l_{ik}', dané nyní výrazy

$$a l_{12}',\ a l_{42}',\ b l_{13}',\ b l_{23}',\ c l_{14}',\ c l_{34}',$$

podávají vložením do příslušných vzorců na str. 11. křivku čtvrtého stupně která se rozpadává na spojnice zmíněného bodu x_i s vrcholy základního tetraedru, tak že příslušné plochy druhého stupně tento bod obsahují.

Jako každý zvláštní lineární komplex, tak i *každý obecný lineární komplex zobrazuje svými paprsky vzhledem ke všem tetraedrálním komplexům o společném tetraedru základním jistý systém ∞^4 ploch stupně druhého, v němž ovšem nenachází se systém ∞^3 ploch jdoucích týmž dalším bodem x_i*, mimo vrcholy tetraedru ležícím.

Systém tento najdeme, volíme-li dle vzorců na str. 13. při pevných koordinatách l_{ik} dvojpoměr $\varkappa$ tetraedrálních komplexů, k nimž zobrazujeme, jako parametr. Hodnoty l_{ik}' takto stanovené vytknou systém ∞^1 křivek čtvrtého stupně příslušných tomuto systému.

Předešlé výsledky nutno doplniti ještě následujícími úvahami:

Libovolná plocha druhého stupně procházející vrcholy základního tetraedru vytknuta jest souřadnicemi a_{ik}, $i \gtrless k$ a nachází se, jak již dříve bylo řečeno, ve dvou tetraedrálních komplexech, které obsahují příslušné

2*

soustavy povrchových přímek. Dvojpoměry $\varkappa$, $\varkappa'$ těchto tetraedrálních komplexů podává rovnice

$$(\varkappa - 1)\, a_{12}\, a_{34} - \varkappa\, a_{13}\, a_{42} - \varkappa\, (\varkappa - 1)\, a_{14}\, a_{23} = 0\,,$$

která vznikla přepsáním rovnice na str. 5. uvedené. Diskriminant této rovnice dá se psáti ve formě determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

a shoduje se, jak patrno, s diskriminantem plochy a_{ik}.

Dvojpoměry $\varkappa$, $\varkappa'$ jsou reálné, je-li $D \geqq 0$, což odpovídá skutečným přímkovým plochám; pro $D < 0$ nemá plocha a_{ik} reálných povrchových přímek,*) a také i hořejší rovnice podává pro dvojpoměry $\varkappa$, $\varkappa'$ komplexní konjungované hodnoty.

Vezmeme-li v úvahu také imaginární přímky v prostoru, máme vzhledem k reálnému tetraedru základnímu výsledek, že *veškeré reálné nepřímkové plochy druhého stupně procházející vrcholy základního tetraedru zobrazeny jsou imaginárními přímkami o souřadnicích tvaru* (str. 5.).

$$\begin{aligned} &* p_{12}^{(k)} = a_{12}\,, && * p_{34}^{(k)} = (\varkappa - 1)\, a_{34}\,, \\ &* p_{13}^{(k)} = -\varkappa\, a_{13}\,, && * p_{42}^{(k)} = a_{42}\,, \\ &* p_{14}^{(k)} = (\varkappa - 1)\, a_{14}\,, && * p_{23}^{(k)} = -\varkappa\, a_{23}\,. \end{aligned}$$

vzhledem k imaginárnímu tetraedrálnímu komplexu o dvojpoměru $\varkappa = a + i\,b$ a o stejném tetraedru základním, při čemž dvojpoměr $\varkappa$ jest jedním z konjugovaných komplexních kořenů rovnice hořejší. Tato zobrazující přímka určuje na základním tetraedru dvojpoměr $\varkappa' = a - i\,b$, a jednotlivé povrchové imaginární přímky plochy a_{ik} jsou opět přímky společné třem speciálním lineárním komplexům první nebo druhé skupiny, známým z úvah předchozích, v nichž za souřadnice zobrazující přímky vloženy jsou hořejší hodnoty.

Nechtějíce se od cíle vytknutého této práci novými úvahami týkajícími se těchto pomyslných přímek příliš vzdalovati, poznamenáváme pouze, že příslušné rovnice podaly by pro každou plochu stupně druhého našeho systému systém ∞^2 pomyslných přímek povrchových rozdělených ve dvě různé soustavy, jak také úvahy jinými autory provedené dokazují.**)

Obraťme pozornost opět ke skutečným přímkovým plochám druhého stupně. Lze nejprve snadno ukázati, že *každá tato plocha v našem systému ploch obsažená obsahuje dvě křivky stupně čtvrtého uvažovaného typu, a při-*

*) Enrico d'Ovidio: Geometria analitica. Torino 1903, pag. 409.

**) Na př. Dr. Konrad Zindler: Liniengeometrie mit Anwendungen. I. Lipsko, 1902, pag. 272.

slušné spojující soustavy jednotlivých párů bodových těchto křivek jsou soustavy povrchových přímek vytknuté plochy; každá z nich přísluší jen jedné křivce.

Jsou-li totiž hodnoty a_{ik} dány, hovějí hodnoty l_{ik}' určující tyto křivky resp. jejich spojující soustavy podmínkám

$$* l_{34}' \,.\, \beta = a_{12},\quad * l_{42}' \,.\, \gamma = a_{13},\quad * l_{23}' \,.\, \alpha = a_{14},$$
$$* l_{12}' \,.\, \beta = a_{34},\quad * l_{13}' \,.\, \gamma = a_{42},\quad * l_{14}' \,.\, \alpha = a_{23},$$

jak z rovnice plochy obsahující spojující soustavu křivky l_{ik}' vyplývá (str. 15.).

Řešení těchto rovnic vzhledem k hodnotám l_{ik}' vyžaduje vlastně stanovení hodnot výrazů α, β, γ; avšak výrazy tyto, jak patrno, hovějí relacím

$$a_{12}\, a_{34}\, \alpha \,.\, \gamma + a_{13}\, a_{42}\, \alpha \,.\, \beta + a_{14}\, a_{23}\, \beta \,.\, \gamma = 0$$

a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Eliminujeme-li nyní na př. γ, obdržíme pro poměr $\frac{\beta}{\alpha}$ tutéž rovnici, která vázala dvojpoměry $\varkappa$, $\varkappa'$ povrchových přímek plochy a_{ik}, tak že hodnoty l_{ik}' určující naše křivky jsou dány výrazy

$$* l_{12}' = -\frac{a_{34}}{\varkappa},\quad * l_{13}' = \frac{a_{42}}{\varkappa - 1},\quad * l_{14}' = a_{23},$$
$$* l_{34}' = -\frac{a_{12}}{\varkappa},\quad * l_{42}' = \frac{a_{13}}{\varkappa - 1},\quad * l_{23}' = a_{14}.$$

pro obě hodnoty dvojpoměru $\varkappa$ příslušné ploše a_{ik}.*)

Odtud hned také vyplývá, že *na každé kuželové ploše druhého stupně procházející vrcholy základního tetraedru nachází se jen jedna z těchto křivek, jejíž spojující soustava tvořena jest povrchovými přímkami této plochy.*

V souvislosti s těmito výsledky jest také poukázati k tomu, *že každá plocha našeho systému zobrazena jest obecně dvěma přímkami* $p_{ik}^{(k)}$ resp. $p_{ik}^{(k')}$, *k tetraedrálním komplexům stanoveným opačnou přímkou* $p_{ik}^{(k')}$ *resp.* $p_{ik}^{(k)}$ *na tetraedru základním.*

Souřadnice těchto přímek dány jsou opět hodnotami na str. 20. vyznačenými pro obě hodnoty $\varkappa$, $\varkappa'$ určené plochou zobrazenou, a jak patrno, stanoví přímky tyto na tetraedru základním dvojpoměry, pro přímku $p_{ik}^{(k)} \ldots \varkappa'$ pro $p_{ik}^{(k')} \ldots \varkappa$.

Přímky tyto jsou mimoběžné; jich simultanní invariant $J_{p^{(k)}\, p^{(k')}}$ jest dán rovnicí

$$J_{p^{(k)}\, p^{(k')}} = \frac{D}{2\, a_{14}\, a_{23}}.$$

---

*) Podobně platí i pro rozvinutelnou plochu 4. třídy, duální k této křivce 4. stupně, jak prof. Dr. Corrado Segre také i ve jmenované již práci uvádí.

V případě, že zobrazená plocha jest plochou kuželovou, splývají obě přímky v jedinou. Dle toho jsou veškeré kuželové plochy druhého stupně našeho systému zobrazeny jednoznačně všemi přímkami prostoru; rozdělení těchto ploch a zobrazujících přímek v ∞^1 tetraedrálních komplexu dáno bylo na str. 8.

Napíšeme-li skutečně souřadnice přímek $p_{ik}^{(k)}$, $p_{ik}^{(k')}$, nalezneme, že vždy mezi nimi platí vztahy:

$$\begin{aligned} p_{12}^{(k)}\, p_{42}^{(k')} - p_{42}^{(k)}\, p_{12}^{(k')} &= 0, \\ p_{13}^{(k)}\, p_{23}^{(k')} - p_{23}^{(k)}\, p_{13}^{(k')} &= 0, \\ p_{14}^{(k)}\, p_{34}^{(k')} - p_{34}^{(k)}\, p_{14}^{(k')} &= 0; \end{aligned}$$

vytkneme-li tedy jednu zobrazující přímku, na př. $p_{ik}^{(k')}$ jest tím vytknut také jen jeden dvojpoměr $\varkappa$, který tato přímka určuje na tetraedru základním, kdežto druhý $\varkappa'$, jenž určuje tetraedrální komplex, k němuž zobrazujeme, zůstává volný. Tyto druhé přímky $p_{ik}^{(k)}$ příslušné dané přímce $p_{ik}^{(k')}$ hovějí posledně psaným rovnicím, které jsou téhož tvaru jako rovnice stanovící tři základní komplexy $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$ a určují soustavu $[p_{ik}^{(k)}]$ povrchových přímek jisté plochy druhého stupně náležející do systému ∞^3 singulárních ploch uvažovaných na str. 17. K této soustavě náleží, jak ihned patrno, také daná přímka $p_{ik}^{(k')}$, určující jednoznačně celou tuto soustavu a žádné dvě její přímky nenáležejí témuž tetraedrálnímu komplexu, neboť v opačném případě by bylo možno těmito dvěma přímkami a vrcholy A_2, A_3, A_4 tetraedru základního proložiti jedinou plochu stupně druhého, která by dle úvah na str. 8. uvedených nutně procházela také vrcholem A_1 a nenáležela by tedy obecně v systém singulárních ploch. Současně také pozorujeme, že, vytkneme-li místo původní přímky $p_{ik}^{(k')}$ jinou přímku soustavy $[p_{ik}^{(k)}]$ jakožto přímku základní, jsou její přidružené přímky opět přímky této soustavy $[p_{ik}^{(k)}]$.

Dle toho tedy tvoří páry přímek jednotlivými zobrazenými plochami sobě vzájemně přidružených ∞^4 parabolických involucí rozložených na ∞^3 singulárních plochách druhého stupně dříve popsaných.

Ke konci chceme poukázati k některým zvláštním případům křivek čtvrtého stupně zde uvažovaným.

Pišme diskriminant svazku ploch které každou tuto křivku určují, ve tvaru

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta';$$

kde hodnoty invariantů Δ, Δ', Θ, Θ', Φ dány jsou výrazy

$$\begin{aligned} \Delta &= (l_{12}'\, l_{34}' - l_{13}'\, l_{42}')^2 \\ \Delta' &= (l_{12}'\, l_{34}' - l_{14}'\, l_{23}')^2, \\ \Theta &= 4\, l_{12}'\, l_{34}'\, (l_{12}'\, l_{34}' - l_{13}'\, l_{42}'), \\ \Theta' &= 4\, l_{12}'\, l_{34}'\, (l_{12}'\, l_{34}' - l_{14}'\, l_{23}'), \\ \Phi &= 2\, (3\, l_{12}'^2\, l_{34}'^2 - l_{12}'\, l_{34}'\, l_{13}'\, l_{42}' - l_{12}'\, l_{34}'\, l_{14}'\, l_{23}' - l_{13}'\, l_{42}'\, l_{14}'\, l_{23}'). \end{aligned}$$

Naše křivka čtvrtého stupně rozpadá se na křivku prostorovou třetího stupně a jednu její dvojnásobnou sečnu, jestliže rovnice čtvrtého stupně vzhledem k λ, kterou obdržíme, položíme-li hořejší diskriminant na roveň nule, redukuje se na čtverec jisté rovnice druhého stupně, což vyžaduje podmínky

$$\Theta^2 \Delta' - \Theta'^2 \Delta = 0,$$
$$\Theta^3 + 8 \Delta^2 \Theta' - 4 \Delta \Theta \Phi = 0$$

a příslušná rovnice druhého stupně jest pak tvaru

$$2 \Delta \Theta' \lambda^2 + \Theta \Theta' \lambda + 2 \Delta' \Theta = 0.$$

První ze dvou hořejších podmínek jest identicky vyplněna pro kteroukoliv naši křivku čtvrtého stupně; druhá redukuje se po vložení příslušných hodnot invariantů na podmínky dvojího druhu: buď kterákoliv jedna z hodnot $l_{ik}' = 0$, nebo má platnost rovnice $l_{12}' l_{34}' - l_{13}' l_{42}' = 0$.

První případ vede obecně k *šesti systémům prostorových křivek třetího stupně, které procházejí jen dvěma vrcholy základního tetraedru a protější hranu tetraedru dvakrát protínají* tvoříce s ní dohromady naši křivku stupně čtvrtého.

Druhý případ $l_{12}' l_{34}' - l_{13}' l_{42}' = 0$ má ještě dva další obdobné a sice $l_{12}' l_{34}' - l_{14}' l_{23}' = 0$, jenž plyne z podmínky

$$\Theta'^3 + 8 \Delta'^2 \Theta - 4 \Delta' \Theta' \Phi = 0,$$

která vyplývá z obou původních, a případ $l_{13}' l_{42}' - l_{14}' l_{23}' = 0$, který obdržíme stejným způsobem jako oba předcházející, vezmeme-li v úvahu třetí plochu druhého stupně, která spojuje danou křivkou čtvrtého stupně s třetím párem protilehlých hran tetraedru základního; rovnici této plochy obdržíme vzájemným odečtením rovnic prvých dvou ploch uvedených na str. 11. Tyto druhé podmínky vedou ke *třem systémům křivek čtvrtého stupně, které se rozpadají ve dvě kuželosečky.*

Abychom první systém degenerovaných křivek obdrželi, musí, volíme-li bod x_j' libovolně, druhý x_j býti v rovině

$$x_i x_k' + x_k x_i' = 0,$$

která s rovinou

$$x_i x_k' - x_k x_i' = 0,$$

jež obsahuje bod x_j', odděluje harmonicky stěny základního tetraedru

$$x_i = 0, \; x_k = 0.$$

Dle toho *obdržíme na každé hraně základního tetraedru involuci rovin, jejíž jednotlivé páry obsahují páry bodové — obecně jedna rovina jeden bod —, které jednotlivé křivky tohoto systému určují.*

Jeden pár přidružených rovin v involuci, jejíž osou jest hrana $A_i A_k$, určuje ∞^4 párů bodových, a tedy také právě tolik křivek tohoto systému.

Všecky tyto křivky rozpadají se na hranu $A_j A_k$ a na křivky třetího stupně, které vesměs procházejí vrcholy A_i, A_k základního tetraedru a hranu $A_j A_k$ dvakráte protínají. Každý další pár přidružených rovin v involuci rovin na hraně $A_j A_k$ vytíná z každé této zbývající křivky třetího stupně bodový pár určující jednu přímku spojující soustavy příslušné této křivce. Jest patrno, že mezi tyto spojující přímky náleží také hrana $A_j A_k$ a že průsečíky této hrany s každou zbývající křivkou třetího stupně tohoto systému jsou harmonicky odděleny vrcholy A_j, A_k. Tečny křivek vedené v těchto průsečných bodech zapadají do dvou konjugovaných rovin příslušné involuce.

Každý další pár involuce rovin na hraně $A_j A_k$ stanoví harmonická pole bodová určující tentýž systém degenerovaných křivek stupně čtvrtého, neboť každou tuto křivku lze určiti kterýmkoliv z ∞^1 příslušných párů bodových.

Poznamenejme ještě obecně, že *tečny těchto křivek vedené ve vrcholích základního tetraedru náležejí vždy mezi přímky spojující soustavy této křivky.* Věta tato plyne následující jednoduchou úvahou: Jsou-li souřadnice l_{ik}' určující tuto křivku dány a volíme-li za jeden bod určujícího páru jeden vrchol tetraedru základního, musí druhý určující bod tohoto páru býti tomuto vrcholu nekonečně blízký, mají-li oba body harmonicky oddělovati plochu, která současně tímto vrcholem prochází; spojnice těchto dvou soumezných bodů náleží pak také příslušné spojující soustavě.

V hořejším případě máme skutečné tečny křivky ve vrcholích A_i, A_k, kdežto tečny ve vrcholích A_j, A_k přecházejí ve hranu tetraedru je spojující.

Obraťme se k druhému případu křivek redukovaných ve dvě kuželosečky.

Platí-li skutečně podmínka na př.

$$l_{12}' l_{34}' - l_{13}' l_{42}' = 0,$$

rozpadá se jedna z ploch křivku určujících na roviny

$$x_1 l_{42}' - x_4 l_{12}' = 0, \quad x_2 l_{13}' - x_3 l_{12}' = 0$$

a křivka sama redukuje se na dvě se protínající kuželosečky položené v těchto rovinách a z nichž každá obsahuje po dvou vrcholech protějších hran základního tetraedru. Spojující soustava příslušná této křivce rozpadá se v tomto případě na dva svazky paprskové položené v rovinách těchto dvou kuželoseček a jejich vrcholy jsou póly těchto protějších hran vzhledem k těmto kuželosečkám. Tyto póly leží také na průsečnici rovin obou kuželoseček. To plyne jednak z poslední věty o tečnách našich křivek vedených ve vrcholích tetraedru, jednak také rovnice příslušné výsledek potvrzují. Na př. tetraedrální komplex, v němž se spojující soustava nachází, redukuje se v tomto případě na dva lineární komplexy

$$p_{14} = 0, \quad p_{23} = 0.$$

Tento systém redukovaných křivek obdržíme vždy, volíme-li určující pár bodový tak, aby příslušná spojnice protínala některou hranu tetraedru základního. Dostáváme v tomto případě tři systémy takto přidružených kuželoseček, na každém páru protilehlých hran tetraedru jeden, a každý z nich obsahuje opět ∞^4 elementů. —

Veškeré dosavadní naše úvahy týkaly se systému ∞^5 přímkových ploch druhého stupně obsažených po systémech o ∞^4 elementech v ∞^1 tetraedrálních komplexech o společném tetraedru základním. *Zcela obdobné úvahy mohli bychom však také vésti o ∞^5 přímkových plochách druhého stupně resp. třídy dotýkajících se stěn tohoto tetraedru* a které jsou také po systémech o ∞^4 elementech obsaženy v předchozích tetraedrálních komplexech.*) V příslušných formulích bylo by třeba zaměniti souřadnice p_{ik} za duální souřadnice π_{ik} téže přímky a souřadnice bodů za souřadnice rovin. Místo našeho systému ∞^5 křivek čtvrtého stupně obdrželi bychom systém ∞^5 rozvinutelných ploch čtvrté třídy, jichž C. Segre ve své práci použil.**) Tím byla by dána i souvislost úplného systému ∞^5 lineárních komplexů se systémem těchto ploch.

*) C. M. Jessop: A treatise on the line complex. Cambridge 1903, pag. 117.
**) C. Segre: Giornale di matematiche. Vol. XXI, pag. 355.

Příspěvky k seznání vodulí fauny kavkazské dle sbírky p. Jul. Komárka.

Podává

Dr. Sig Thor.

(S 11 obr. v textu.)

Předloženo dne 8. května 1914

I. První sbírka stenothermních forem z chladných vod.

A. Úvod.

Na zoologické exkursi podniknuté v létě 1913 na Kavkaz a ruskoperskou hranici podařilo se p. J. Komárkovi z Prahy nasbírati v různých horských potocích a pramenech mezi jiným také jistou část zástupců skupiny vodulí, jež mi ku zpracování zaslal, začež mu zde vyslovuji svůj dík.

Ačkoliv jest sbírka Hydrachen mně zaslaná zcela malá, zasluhuje přece zvláštní pozornosti, nebo kraje kavkazské byly po hydrachnologické stránce úplně neznámé.

Ve sbírce nalezl jsem některé *norvéžské* a více *švýcarských* stenothermních vodních forem, spolu s dvěma, s jmenovanými příbuzné druhy, které pokud vím nebyly dosud popsány; proto zde podávám jejich popisy jako dvou *nových druhů*. Dvě jiné formy odlišují se jako *variety* (snad lokální formy) známých druhů. O charakteru této fauny promluvím na konci této práce.

Nejprve podám popis a seznam druhů a jejich nalezišť.

B. Seznam nalezišť.

1. Malý horský potok nedaleko městečka *Ordubatu* na rusko-perské hranici (rod *Megapus*).

2. Horský potok u vesnice *Migri* na rusko-perské hranici (rod *Sperchon*).

3. Horský potok nedaleko obce *Cageri* u řeky *Cchenes-Cchali* v *Mingrelii* (*Lečchumský* újezd), *Kutaiská* gubernie (rody *Sperchon* a *Megapus*).

4. Horský potok u vesnice *Mestia* v horním údolí *Inguru* = *Svanetie* (*Lečchumský* ujezd) *Kutaiská* gubernie (rod *Lebertia*).

5. Lesní pramen u *Mestie, Svanetie, Kutaiská* gubernie (rody *Sperchon Lebertia, Rivobates* a *Feltria*).

C. Rody a druhy z horských pramenů kavkazských.

Počet nalezených druhů jest 9, jež náleží 5 rodům, totiž *Megapus* Koch, *Rivobates* Sig Thor, *Sperchon* Kramer, *Lebertia* Neuman (podrod *Pseudolebertia* Sig Thor) a *Feltria* Koenike. Každý druh zastoupen jest několika málo exempláry (1, 2 neb 3, v jednom případě 7).

I. Čeleď: ***Sperchonidae*** Sig Thor 1900.

a) Rod: **Sperchon** Kramer 1877.

α) Podrod: **Hispidosperchon** Sig Thor 1901.

1. *Sperchon* (*Hispidosperchon*) *plumifer* Sig Thor 1902.

Naleziště: 2 exempláry nalezeny 7. července 1913 v horském potoce u osady *Migri* na rusko-perské hranici; 7 exempl. (zřejmě Nymphy) 25. července 1913 v horském potoce u obce *Cageri* v *Mingrelii*.

β) Podrod: **Squamosperchon** Sig Thor 1901.

2. *Sperchon* (*Squamosperchon*) *glandulosus* Koenike 1886.

Naleziště: 1 Nympha nalezená 5. srpna 1913 v lesním pramenu u *Mestie, Svanetie, Kutaiská gubernie.*

II. Čeleď: ***Hygrobatidae s.*** str. (Koch 1842) Sig Thor 1900.

b) Rod: **Megapus** Neuman 1880.

3. *Megapus nodipalpis* Sig Thor 1899. var. *Kaukasiensis* var. nov.

Epimery více srostlé. Area genitalis daleko vzadu. Velký trn 4tého makadlového článku upevněn daleko na zadu.

Nalezistě: 1 ♂ a 1 Nympha nalezeny 25. července 1913 v horském potoce pobliž Cageri v Mingrelii.

4. *Megapus arcuatus* Sig Thor, nov. spec. Obr. 1—9.

S druhem *Megapus nodipalpis* Sig Thor nejblíže příbuzný, odlišuje se však od tohoto druhu jak tvarem makadel tak tvarem epimeru; area genitalis charakteristicky odlišná.

Samec ek.

Velikost. Délka těla 590 ; šířka 430 μ. Kůže jest měkká (nepanceřovaná), hustě pokrytá zvlášť jemnými pruhy.

Vzdálenost očí 100 μ.

Ústní orgán 112 μ dlouhý, 72 μ široký, směrem k distalnímu konci slabě zaškrcen.

Makadla (obr. 1) jsou asi 230 μ dlouhá. Délky jednotlivých článků[1]) jsou následující:

I. Článek 30 μ; II. čl. 54 μ; III. čl. 60 μ; IV. čl. 80 μ; V. čl. 30 μ.

Tvar makadla ukazuje vcelku obvyklý typus rodu *Megapus*. Druhý článek má skoro stejnou tloušťku (výšku) jako délku: 50 μ. Na ventralní straně není vlastního výběžku, nýbrž jen kulovitá vyvýšenina, jež dodává článku zaokrouhlený tvar.

Obr. 1. *Megapus arcuatus* Sig Thor ♂. 4 články levého makadla z vnitřní strany.

Na dorsalní straně stojí 4—5 štětin, z nichž 2 distalné jsou poněkud delší.

Třetí článek pokryt, kromě 4—5 silnějších dorsalních štětin, větším počtem jemných chloupku, z nichž 3—5 jsou umístěny na vnitřní straně.

[1]) Zde jako vždy měříme článek v největším jeho rozsahu. Ta část tedy, která vězí v jiném článku, jest také zaměřena.

Čtvrtý článek jest tlustý (rozšření na ventrální straně) s hustým pokryvem zahnutých chloupku (zvláště na dorsalní straně) a 2 ventralními chloupky. Silný trn vnitřní strany tohoto článku jest upevněn více distálně než u příbuzného druhu, asi před středem tohoto článku. Poslední článek jest štíhlý, jinak obligátní stavby.

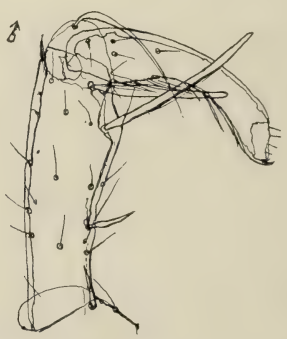
Obr. 2. *Meg. arcuatus* Sig Thor ♂. Obrys článků epimerálních a pravé makadlo. (Zadní část (4 epimérit) pravé strany rozbita.)

Epimeralní články (Obr. 2.) relativně velké tvoří souvislý štít, asi 300 μ dlouhý a 360 μ široký. Zadní okraj 4tého epimeralního páru skoro rovný jen na vnitřním rohu trochu zaokrouhlen. Zadní okraje prvního páru sahají daleko na zad a vysílají do zadu postranní rohy pod a vedle 3tího páru. Zvláště třeba připomenouti, že desky 2ho a 3ho páru na každé straně docela srůstají, takže vzadu i vrubu neb rozhraničení postrádají.

Nohy neukazují nic nápadného. Poslední článek 1ho páru (Obr. 3.) jest silně zahnut a podobá se onomu u *M. nodipalpis*, jest ale slabší, což možno nejlépe seznati porovnáním. Obr. 3. a 4.

Area genitalis (Obr. 5.) leží daleko vzadu a jest pro tento druh charakteristická; předně jest daleko menší než u *M. nodipalpis*. (Obr. 6.)

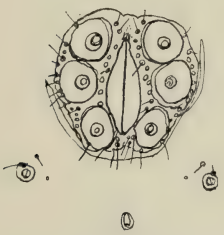
Obr. 3. *Meg. arcuatus* Sig Thor ♂. 2 poslední články nohy prvního páru („srpovitý článek").



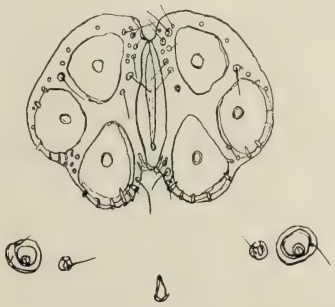
Obr. 4. *Meg. nodipalpis* Sig Thor ♂ 2 poslední články nohy prvního páru („srpovitý článek").

Tři skoro okrouhlá „stigmata" každé strany jsou stejně veliká a leží vedle sebe ve volném oblouku (proto název „*arcuatus*"). Na vnitřní straně těchto vedle otvoru genitalního leží 9—12 jemných, chloupky opatřených poru (do oblouku seřazených); podobné póry, ale ve větším počtu (asi 16) leží u vnějšího okraje desky genitalní, vzadu pak ještě 3—4 páry. Elliptická

(vzadu užší) genitalní deska nemá vzadu ono zřetelné vykrojení jako příbuzný druh (Obr. 6). Genitalní deska jest 100 μ dlouhá i široká. Délka stigmatu jest průměrně 30 x, šířka 25 x. Jak z obrázku 6. vidno, jest tvar a uložení stigmat u *M. nodipalpis* úplně odlišné; zvláště střední stigma



Obr. 5. *Meg. arcuatus* Sig Thor ♂. Area genitalis, pory žlaz, ústí exkrečn. orgánu.



Obr. 6. *Meg. nodipalpis* Sig Thor ♂. Area genitalis, póry žlaz, ústí exkrečn. orgánu.

posunuto jest ke straně (lateralně). Chitinový orgán podpurný (sloužící za oporu pro penis), jež na praeparatu zřetelně prosvitá, má obyčejnou podobu.

Ve vzdálenosti 30 x od area genitalis, přibližně 40 μ vzdálen od zadního tělesného kraje, leží tak zv. *„análni otvor“* (ústí exkrečního orgánu) slabě zchitinisován a provázen obvyklými póry žlaz a chloupku.

Samička.

Velikost. Délka těla 755 μ, šířka 515 μ. Povaha kuže a ústního orgánu jako u ♂.

Makadla liší se (Obr. 7.) od makadel samečka, což u tohoto rodu je pravidlem, větší délkou, štíhlostí a nepřítomností hrbolkovité rozšířeniny. Délka jejich obnáší asi 300 x. Délky jednotlivých článků jsou následující: I. článek 30 μ; II. čl. 70 μ; III. čl. 90 μ, IV. čl. 100 μ; V. čl. 34 μ.

Obr. 7. *Meg. arcuatus* Sig Thor ♀. Levé makadlo z vnitřní strany, ale s prosvítajícím trnem 4. článku.

Druhý článek není na ventralním okraji úplně hladký a může býti označen jako jemně zoubkovaný. Pokryv štětinový a chloupkový ostatních článku shoduje se úplně s oním u samečka. Dlouhý trn 4tého článku upevněn ještě více distálně.

Epimeralní články nesouvisí tak přesně dohromady jako u ♂; mezi 2 a 3tím párem je jemná skulina. První epimeralní pár jest krátký; tím povstává za tímto a mezi ostatními 3mi

páry velký tříhranný prostor. Zadní okraj 4tého článku jest trochu více zahnut.

Nohy jsou tenké, bez zvlášť charakteristických znaků. „Srpovitý" článek (poslední) 1ho páru noh jest pokryt stejnými štětinami a chloupky jako u příbuzného druhu; naproti tomu jest článek předposlední směrem k distalnímu konci méně rozšířen a zadní ze 2 velkých trnu upevněn jest poněkud více do zadu (proximalně). — Poloha *orgánu genitalního* jest asi táž jako u samečka.

Area genitalis (Obr. 8.) jest 155 *μ* dlouhá a stejně široká. Nesrostlé desky stigmatové jsou krátké (113 *μ*), obloukovité a jen málo širší *stigmat*,

Obr. 8. *Meg. arcuatus* Sig Thor ♀. Area genitalis, póry žlaz, ústí exkrečního orgánu.

Obr. 9. *Meg. nodipalpis* Sig Thor ♀. Area genitalis.

jež leží (jako u ♂) v pravidelném *oblouku*. Přední 2 stigmata jsou elliptická (37 *μ* dlouhá, 23 *μ* široká), zadní stigma jest skoro kruhovité (průměr 28 *μ*). Na předním konci každé desky leží 4 malé chloupkové póry, jinak jen docela malý počet jich je na vnějším okraji desek. Pro srovnání poukazuji na genitalní orgán *M. nodipalpis* ♀ (Obr. 9.).

Nalezistě: 1 ♂ nalezen 10. července a 1 ♀ 17. července 1913 v horském potoce nedaleko městečka *Ordubat* na rusko-perské hranici.

c) Rod **Rivobates** Sig Thor 1897 [2])

5. *Rivobates norvegicus* [2]) Sig Thor 1897.

Naleziště: 1 × uloven 5. srpna 1913 v lesní studánce u osady *Mestia, Svanetie, Kutaiská gubernie.*

---

[2]) Dr. R. Piersig popsal r. 1898 (Zoolog. Anz. v. 21 p. 524) tentýž druh jako nový pod druhovým jménem *polyporus*. ani jeden znak není odlišný. Písemná neb tisková chyba v Piersig-ově díle (Tierreich 13 Lief. p. 191) zmenšuje velikost

III. Čeleď: **Lebertiidae** Sig Thor 1900.

d) Rod **Lebertia** Neuman 1880.

α) Podrod **Pseudolebertia** Sig. Thor 1897.

6. *Lebertia* (*Pseudolebertia*) *lineata* Sig. Thor 1906

Nalezistě: 1 ♀ nalezena 7. srpna 1913 v horském potoce u *Mestie*, v horním údolí řeky *Inguru, Svanetia, Lečchumský újezd.*

7. *Lebertia* (*Pseudolebertia*) *Komáreki* Sig. Thor, sp. nov. Obr. 10. až 11.

Nejblíže příbuzná s *Pseudolebertia glabra* Sig. Thor 1897, a patří tedy do skupiny „*glabra*" rodu *Pseudolebertia.*

Kůže jest totiž pruhována jako u *Ps. glabra lineata*, t. j. pokrytá delšími, jemně vyvýšenými chitinovými trámečky. Tyto jsou u *Ps. Komáreki* delší, četnější a hustěji u sebe položeny než u *Ps. glabra.* Proužky probíhají na dorsalní straně v podélném směru (od předu na zad), na malé, volné břišní části (za epimeralní a genitalní partií) příčně neb parallelně s okraji. Pórovitost jest stejně málo zřetelná jako u *Ps. glabra.* Skoro celá neutrální část jest pokryta silně zchitinisovaným pancířem se zřetelně rozvětvenými póry. (Obr. 11.)

Velikost: Délka těla (s výběžky epimeralními) 760 *μ*; šířka 660 *μ*; tvar těla při pohledu se shora jest (vyjímaje epimeralní výběžky) skoro kruhovitý.

Barvu nelze dle konservovaného exempláru spolehlivě udati, ale zdá se, že byla hnědožlutá se slabě vynikajícími tmavohnědými hřbetními skvrnami, jako u příbuzného druhu.

---

u *R. norvegicus* na 260 *μ*, místo 1100—1300*μ* délky a na 340 *μ* místo 1000 *μ* šířky etc. Sig Thor, Norges Hydr. I, „Arch. f. Math. und Naturwis." *v.* 19, no. 6, p. 39—41). Udává-li Piersig počet stigmat u *H. polyporus* 20—24, kdežto u *R. norvegicus* se jich čítá 19—25 (u ♂ kavkazské formy 15—17), nespočívá v tom žádný rozdíl, jak již Dr. C. Walter („Hydracarinen der Schweiz" Rev. Suisse Zool. 1907 *v.* 15 p. 530) ukázal. Dr. R. Piersig chtěl dále spojiti rod *Rivobates* s rodem *Hygrobates* Koch. Ježto jej v tom i jiní následovali, ku př. Dr. F. Koenike a Dr. Wolcott, musím vytknouti, že považuji rod *Rivobates* za oprávněný *velkým počtem stigmat genitalního orgánu* právě tak jako mnohé jiné nové rody ku př. *Georgella, Gnaphiscus, Neobrachypoda, Panisus, Dadaya, Sporadoporus* atd., jež byly Koenikem a Wolcott-em zavedeny. Důkladné odůvodnění musí býti uveřejněno na jiném místě.

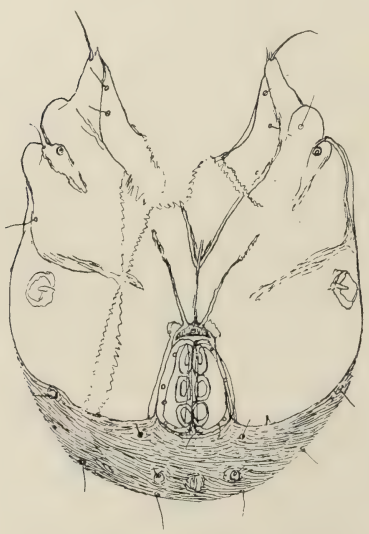
Ústní orgán jest normálně vytvořen; má přibližně tytéž rozměry jako u *Ps. glabra*; délka 208 μ. Výška asi 135 μ.

Makadla (Obr. 10.) měří v zahnuté poloze 180—238 μ. Délky jednotlivých článků jsou asi tyto: I. článek 36 μ; II. čl. 105 μ; III. čl. 87 μ, IV. čl. 120 μ; V. čl. 38 μ.

Tvar a štětiny prvních dvou článků nevykazují nic odchylného. Štětina na ohybové straně 2ho článku jest 50—60 μ dlouhá a chloupky ji pokrývající jsou skoro neznatelné. Dvě zadní z 5ti *dlouhých makadlových štětin* 3tího článku jsou vzdáleny od sebe více než u příbuzné formy, 2 *dorsalní* štětiny naopak se více k sobě přibližují. Z *chloupků na straně opačné* (oproti straně ohybové) na 4tém článku posunuly se 2 do zadu. Dvě jamky (póry) na straně ohybové a distalní chitinový výběžek takový jako u *Ps. glabra*. Pátý článek je velmi štíhlý.

Obr. 10. *Lebertia* (*Pseudolebertia*) *Komáreki* Sig Thor.
Levé makadlo z vnitřní strany.

Epimeralní pancíř (Obr. 11.) poskytuje dobré rozpoznávací znaky. Velikost jeho je ihned patrna nebo ponechává jen malou část břišní strany volnou. Délka jeho obnáší 620 μ, šířka 650 μ. Postranní výběžky (křídla), zvláště trny velké, jsou silně vyvinuty. Oproti *Ps. glabra* jsou chitinové okraje u *Ps. Komáreki* velmi slabě chitinisovány. Ba zadní okraj 4tého epimeralního páru zdá se postrádati ztlustlého okraje a zdá se jednoduše přecházeti v obyčejnou pokožku. Čtvrtý pár epimerů jest velmi široký, skoro čtyřhranný, neboť přední lištna srůstajících epimerů jest skoro parallelní se zadním okrajem. Rozloha její je velmi mocná. Zadní konec 2ho epimeralního páru jest úzký.



Obr. 11. *Lebertia* (*Pseudolebertia*) *Komáreki* Sig Thor.
Epimerální články, genitální orgán, zadní konec těla. Klikaté čáry označují ony části pancíře (na pravé straně těla), jež byly při praeparaci roztrženy.

Záhyb, v němž leží ústní orgán jest 160 μ dlouhý. Stejně dlouhý je záhyb genitálního pole, jenž má největší šířku 145 μ. Vzdálenost obou těchto zá řezů činí asi 125 μ.

Na stavbě *noh* neshledal jsem žádné zvláštní odchylky. První článek 4tého páru noh opatřen jest obvyklými 5 trny na rovné straně.

Plovací štětiny scházejí úplně. Nepatrný chloupek na jednotlivých konečcích článků nemůže býti vykládán jako plovací štětina; podobné chloupky nacházejí se zvláště na prvním páru noh. Drápky konečné nejsou redukovány.

Délky noh jsou asi tyto: I. noha 650 μ; II. n. 810 μ; III. n. 640 μ; IV. B. 1140 μ.

Area genitalis (Obr. 11.) vyniká ze záhybu pancíře ven. Přední tříhranné podpurné tělísko jest silně, zadní slabě vyvinuto. Délka *genitalních desek* obnáší 163 μ; šířka každé desky 75 μ. Počet párů medianního okraje desek jest malý (asi 12).

Délky *stigmat* jsou: I. (přední) pár 50 μ; II. pár 45 μ; III. (zadní) pár 38 μ.

Charakteristickým pro tento druh, což se dá velikostí epimeralního štítu lehko vysvětliti, jest poloha ústí exkrečního orgánu („análního otvoru") a provázejících jej otvorů žlaz, skoro docela na zadním okraji těla.

Naleziště: 2 exempláry (pravděpodobně ♂♂) ukořistěny společně s podobnou nymphou 5. srpna 1913 v lesní studánce u *Mestie, Svanetie, Kutaiská* gubernie.

8. *Lebertia* (*Pseudolebertia*) *schechtelii* Sig. Thor. 1913 *var. globifera var. nor.*

Varieta odlišuje se od typu zvláště tlustší kůží, jež je pokryta ještě hustěji *kulovitými* (vlastně *polokulovitými*) *kožními papillami*; vyvýšené proužky chitinové, na nichž se papilly pozvedají, jsou ještě nezřetelnější a často (zvláště na dorsalní straně) úplně mizí. Mezi papillami lze pozorovati *velmi malinké tečky*, jež pravděpodobně se dají vysvětliti pórovitostí kůže.

Tlustší *chitinové části* (Epimeralní pancíř, area genitalis, ústní orgán a makadla) mají temnější barvu, což snad pochází od fixace neb konservace (v glycerinu).

Naleziště: S předešlým druhem pohromadě nalezen 1 ♂ 5. srpna 1913 v lesním pramenu u *Mestie, Svanetie, Kutaiská* gubernie.

IV. Čeleď: Aturidae Sig Thor 1900.

e) Rod **Feltria** Koenike 1892.

9. *Feltria muscicola* Fiersig 1898.

Naleziště: 2 ♀♀ nalezeny 5. srpna 1913 v lesní studánce u *Mestie, Svanetie, Kutaiská* gubernie.

D. Povšechná část.

Velikou předností výzkumů J. Komárka je, že vztahují se zvláště na zvířenu tekoucích vod (horských potoku). Téměř všechny dřívější sbírky z Asie pocházejí z jezer a rybníku neb klidně tekoucích hlubších vod, jejichž Fauna v tomto směru má stejný ráz jako fauna jezerní.

Vidíme proto velký rozdíl mezi touto sbírkou Komárkovou a dřívějšími sbírkami ze západní Asie a přilehlých kraju. Hlavní díl dřívějších sbírek (ku př. D. Pedašenko'vy z *Turkestanu*, Dr. A. Behningovy z *Turkestanu* a *úvodí Volgy* atd.), jsou rody *Eylais*, *Hydrachna*, *Hydryphantes*, *Limnesia*, *Arrenurus*, *Atax* a *Piona*, zřejmě eurythermní teplomilovné formy kosmopolitického charakteru.

Docela jinak má se to se zde zpracovanou sbírkou Komárkovou z *Kavkazu*. Formy zde přicházející mají vysloveně stenothermní charakter zvířat studených vod. Takové druhy rodu *Sperchon*, *Megapus*, *Rivobates*, *Feltria* a *Lebertia* (zvláště *Pseudolebertia*) jež byly na *Kavkaze* sbírány, obývají hojně potoky, řeky, chladné prameny atd. ve *Švýcařích*, *Sasku*, *Haliči*, *Norsku* a jinde. Žijí hlavně v rychle tekoucích, kyslíkem bohatých lesních a horských potocích, v nichž se udržuje relativně nízká temperatura a zařazujeme je proto mezi stenothermní, studené vody milující formy.

Vznik této fauny má asi svůj původ v glacialním prakmenu. Na základě sbírky Komárkovy nalézám dále úzkou souvislost mezi faunou vodulí *kavkazských* a *severo-* neb *středoevropských*. Přirozeně bylo by ukvapené činiti z toho dalekosáhlé závěry.

Při zpracování materialu bylo mi nápadno, že nenacházím žádný druh rodů *Hygrobates* Koch, *Atractides* Koch, *Aturus* Kramer a jiných podrodu rodu *Lebertia* (*Pilolebertia*, *Hexalebertia*, *Neolebertia*), nebo tyto bývají vždy průvodci forem výše citovaných. Ovšem je také možno, že potoky a prameny *Kavkazské* mají snad jiné složení fauny než potoky evropské. Prozatím je lépe se domnívati, že výzkum byl příliš krátký a neúplný.

Doufám, že p. Julius Komárek bude v započatém výzkumu pokračovati, k čemuž zdařilý počátek tolik povzbuzuje.

Drammen 14. dubna 1914.

Příspěvky k zoogeografii Kavkazu a rusko-perského pomezí.

Napsal

JULIUS KOMÁREK v Praze.

(S 8 obrázky v textu.)

Předloženo dne 8. května 1914.

V letě minulého roku podniknul jsem společně s Dr. Jindřichem Veselým, za podpory slavné II. třídy České Akademie studijní cestu na Kavkaz a do jižní Armenie.

Vědecký výsledek cesty naší jest velmi bohatý. Nalezeno nejen hojně pro vědu nových forem, ale získána i četná zajímavá data pro poznání končiny v zoogeografickém směru po některých stránkách buď velmi málo známé neb vůbec neprozkoumané.

Material získaný zpracovávám nyní jednak sám, jednak svěřen byl různým odborníkům. Na tomto místě chci podati stručný popis cesty, jakož i zoogeografických a faunistických výsledků zatím zjištěných.

Práce tato jest jaksi úvodem ku serii článků, jež postupně budou o materialu nasbíraném uveřejněny a má zejména i obrazovými doklady znázorniti ráz krajinný, hlavně ovšem biologický charakter důležitějších typických nalezišt.

Cesta nastoupena v polovině června 1913 a vedla přes Oděssu, Černým mořem na Batum a do Tiflisu. Delší zastávky lodi v Novorosijsku použito ku sbírání na pobřeží. V malém potoce ústícím u přístaviště do moře nalezen kromě jiného (hlavně *Coleoptera* a *Plecoptera*) také náš *Gammarus pulex* a *Planaria gonocephala*.

V Tiflise, kde nám bylo třeba čekati na vydání nezbytných místodržitelských pasů, podnikli jsme několik exkursí do okolí města a sice na sever od Tiflisu k solným jezírkům ležícím nedaleko stanice Avčali a do předhor Kavkazských na východ od Mzchetu a gruzinské silnice. Solná jezírka jsou tři v řadě za sebou; okolí jejich je pusté a v této roční

době bylo již vše sluncem sežehnuto. V malé, na štěstí ještě nevyschlé tůňce, nalezl jsem korýše (*Diaptomus*). Jinak sestávala kořist naše jen z Coleopter. V předhorách nalezl jsem v horském potoku u osady Galdapy opět *Pl. gonocephala*.

1. července opustili jsme Tiflis jižní zakavkazskou drahou, jež měla nás dovézti na poslední stanici této trati, do osady Džulfa, ležící na rusko-perské hranici. Dvanáctihodinová zastávka v Alexandropoli, umožnila nám výlet pod sopku Alagös. Okolí města je vysoká planina obklopená holými hřbety, bez vegetace ačkoliv z okolních hor stékají četné prameny a bystřiny. Proto byla zde naše kořist, co se quantity týče, nejchudší ze všech našich pozdějších lokalit. Zmínky zasluhuje jen nový druh rodu *Planaria* nalezený v předhorách Alagösu.

Ploštěnka ta podobá se zevním habitem při zběžném pohledu velmi značně *Pl. alpina*, takže jsem byl sám, naleznuv ji, velmi překvapen a pokládal jsem ji v prvních okamžicích za Pl. alpinu. Ovšem přihledl-li jsem pak blíže, uviděl jsem, že se jedná o docela jiný druh. Již délka je menší než u zaměňované formy; měříť 8—12 *mm* při šířce 2—3 *mm*. Barva těla je černá neb černozelená, na spodu bledá a okraje těla tvoří dva světlé pruhy. Tělo skoro všude stejně široké ukončuje v ostrou špici. Hlava je poměrně k tělu dosti velká a vybíhá v postraní laloky, široké a na konci hladce zaokrouhlené. Čelní okraj vybíhá ku předu v slabou, mírně vyčnívající vychlípeninu, jež představuje třetí lalok a nese na spodu úzkou, dosti dlouhou přísavnou skulinu. Oči jsou umístěny na nejužším místě hlavy velmi blízko u sebe, takže jejich vzájemná vzdálenost se rovná délce oka. Vzdálenost zadního konce očí, kde leží pigmentová skvrna, od čelního okraje je asi rovna šířce těla v partii oční. Pharynx leží na začátku poslední třetiny těla. Rozdělíme-li zbývající třetinu na tři díly, leží otvor genitalní na začátku druhé třetiny. — Nejprve nalezena v malé studánce, z níž pramenil potok. Vyskytala se ve velkém množství lezouc po písčitém dně a po kamenných stěnách. V potoce nebyla tak hojná, ačkoliv i tam se vyskytovala. I ve dvou sousedních potocích stékajících z těchto hřbetů jsem ji nalezl. Ráz všech těchto bystřin je týž. Vznikají na horách obklopujících alexandropolskou pláň, voda jejich je celý rok velmi studená, některé vysýchají v horkou letní dobu a ostatní po krátkém toku dostihnou pláně a rázem se změní v obyčejný luční potok s prohřatou vodou. Můžeme předpokládati, že tato ploštěnka má jistě větší rozšíření a jsouc formou stenothermní obývá horní toky všech potoků pramenících na sopce Alagös a na okolních horách.

3./VIII. dorazili jsme do Džulfy a téhož dne k večeru do městečka Ordubatu, jejž zvolili jsme za východisko svých sběratelských exkursí na rusko-perských pohraničních horách. Ráz fauny zdejší je dosti zvláštní, což souvisí s tvářností a polohou kraje. Celé okolí Ordubatu jsou hory, holé, skalnaté, jež obklopují malou úplně vyprahlou rovinu prostírající

se po levé straně řeky Araxu. Jedině zde na břehu řeky jest trochu zeleně a sem také koncentruje se většina fauny. Holé a sežehnuté skály a hory jsou mnohem chudší ale i ty mají své zvláštní druhy; konečně jsou horské bystřiny, jež mají faunu horskou, upomínající celkem na naše poměry. Nejzajímavější je údolí řeky Araxu, jež má mnoho endemitů, ale také řadu forem kaspické oblasti, takže patří pobřeží toto k nejzajímavějším částím Ordubatského okolí a co se některých skupin týče, k nejbohatším nalezištím vůbec. Druhá lokalita naše byla osada Migri, vzdálená půl dne cesty koňmo na východ od Ordubatu. V Migri protéká mohutný horský potok, celé okolí je vlhčí, vegetací pokryté a v horách nalezneme

Obr. 1. Osada *Migri*; v popředí mezi stromovím protéká bystřina, v níž nalezena Blepharocera armeniaca Komár. a vodule Dr. Sig. Thorem popisované.

lesy. Fauna zdejší liší se trochu, vyjímaje vodní formy, od fauny Ordubatské, což je zaviněno právě lesy a celkovou vlhkostí.

Zde jakož i na celé nastávající cestě chtěli jsme se věnovati hlavně studiu fauny sladkovodní, hmyzu a i jiných suchozemských skupin bezobratlovců. O obratlovcích zmiňuji se jen k vůli úplnosti. Z větších ssavců vyskytá se v okolí Ordubatu nejhojněji koza bezoarová (*Capra aegagrus*) a zajíc. V údolí řeky Araxu žije dosti hojně, jak dle množství stop bylo patrno, vydra; občas objevuje se v horách, hlavně na perské straně levhart. Tygr zastřelen zde naposledy před 7 lety. Ornis těchto krajů je daleko bohatší. Sám pozoroval jsem zde tyto druhy: *Monticola saxatilis*, *Sita Neymayeri*, *Coracias garrula* přehojně v hlinitých březích a stráních v samém Ordubatě, *Picus rustica*, *Pyrhocorax graculus*, *Columba*

1*

liria (?). Bělořita, strnada, volavku, orebici a různé dravce viděl jsem z povzdálí nemoha je blíže určiti.

Nejobsáhlejší částí obratlovčí fauny tamější jsou plazi; ježto jsme se ale setkali s německým sběratelem Kultzer-em, který odvážel právě odtud kompletní sbírku plazů pro jistého mnichovského herpetologa, nebrali jsme k této skupině zřetel.

Jako všude i zde tvoří hmyz převážnou většinu fauny a jsou to bez odporu *Coleoptera*, jež jsou nejtypičtější a nejzajímavější částí zdejšího tvorstva. Všichni brouci Ordubatští jsou koncentrováni na vegetaci prosté pláni a pobřeží ruského břehu řeky Araxu. Nejvíce typických a ende-

Obr. 2. Řeka Arax a pohled na perský břeh. Na levé straně obrázku viděti skály, pod nimiž leží studánka, v níž nalezen nový *Dikerogammarus* a *Pl. gonocephala*.

mických forem má skupina Krasců a jsou to druhy *Julodis variolaris* s. sp. *Faldermanni*, *Julodis onopordi* s. sp. *sulcata*, charakteristický endemit *Julodela globithorax*, jež se zde vyskytají, zvlášť poslední druh, v ohromném počtu; dále rod *Sphenoptera*, jehož příslušníci vyskytají se hlavně v pobřežní zoně. K známým zdejším druhům: *Sphenoptera Scovitzi*, *Sph. mesopotamica*, *Sph. hispidula*, *Sph. Beckeri*, *Sph. sancta*, *Sph. ignifrons* přistupují 3 nové druhy nalezené Dr. Jind. Veselým a popsané p. J. Obenbergerem z Prahy jako specie *Sph. araxana* Obg. n. sp. *Sph. Veselyi* Obg. n. sp. a *Sph. angelica* Obg. n. sp. Naváté pískové duny oživovány jsou charakteristickými druhy *Tenebrionidů* a konečně celá řada nosatců doplňuje faunu této části ordubatského okolí. O rodu *Malosia* (vzácné skupiny *Cerambycidů*) třeba připomenouti, že se vyskytá

vysoko v horských lesích severně od Ordubatu a ne jak Reitter falešně udává v údolí řeky Araxu.

I co do množství i co do počtu druhů uvésti lze na druhém místě hmyz rovnokřídlý (*Orthoptera*), z něhož pořízena hlavně Dr. Veselým skoro úplná kollekce. *Orthoptera* tvoří opět největší část fauny holých skalních strání a hřbetů.

Z hmyzu dvojkřídlého podařilo se mi nalézti zde nový druh velmi vzácné čeledi *Blepharoceridae*. Jest to skupina obývající výhradně kraje horské a velehorské; vývoj prodělávají všechny druhy v horských bystřinách a zmíníme se o biologii těchto forem šíře při popisování fauny kav-

Obr. 3. Pohled na horu *Džangu-tau* a *Tetnuld*. Na konci údolí na úpatí ledovců pramení potok, v němž nalezeny nové druhy *Blepharocerid.*

kazské. Larvy mají housenkovitý tvar a přidržují se pomocí 6 přísavek na kamenech v nejprudších místech bystřin. Kukla je sploštělá a je břišní stranou pevně přilepena na kamenech pod hladinou vody. Dospělý hmyz je velikosti asi komára, nohy jsou dlouhé a poměr jejich k tělu je asi takový jako u rodu *Tipula*. Dosud známo bylo 20 druhů o 9 rodech z nichž většina náleží Americe severní i jižní ostatní Evropě. Z Asie, vyjímaje Ceylon, nebyl dosud znám ani jediný zástupce této čeledi, ačkoliv možno říci, že náleží snad k nejhojnějším a nejcharakterističtějším formám velehorské vodní fauny. Jak jsem se zmínil nalezl jsem v Ordubatě a v bystřinách okolí Migri nový druh *Blepharocera armeniaca* Komár.,[1]) blížící se

[1]) „Neue Blepharoariden aus dem Kaukasus und Armenien" von Jul. Komárek. Sitzungsb. d. königl. böh. Gesell. d. Wissensch. Prag. 1914.

jihoevropské formě *Bleph. fasciata* Wstd. tvarem očí, ale naprosto odlišné apparátem ústním. Tato specie vyskytá se na zmíněných lokalitách v larvalním stavu ve velikém množství a domnívám se právem dle charakteru krajiny (jež nemá s Kavkazem nic společného), že jest rozšíření této diptery daleko větší a že zabírá jistě celé údolí Araxu a severní Persii.

Jinou skupinou, v níž neznali jsme dosud žádného zástupce těchto končin, jsou *vodule*. Podařilo se mi lapit v Migri a později v Ordubatě v malých horských potocích několik vodulí, v nichž v právě dohotovené práci rozpoznal Dr. Sig Thor nový druh — *Megapus arcuatus* Sig

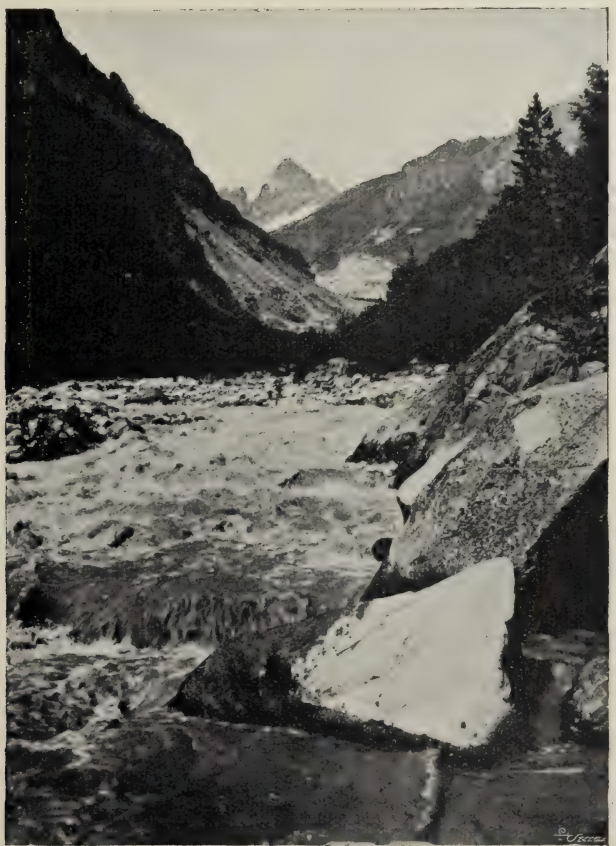
Obr. 4. Pohled na *Tetnuld* z větší blízkosti. V popředí vlastní lokalita Blepharocerid.

Thor. nov. sp. Přikládám zde obrázek, jenž ukazuje jednu z lokalit Migerských.

Korýši sbíráni byli jen ve studánce ležící těsně u břehu Araxu na prudké zatáčce řeky nedaleko perské celnice a konečně i v řece samé. V těchto studených pramenech, jež souvisí toliko horem s řekou, vyskytá se hojně jeden druh *Amphipodů*. Prof. Dr. K. Schäferna, jenž se laskavě ujal celé mé sbírky blešivců, určil jej jako typický, tedy nový druh rodu *Dikerogammarus*, odchylný od příbuzné formy obývající Kaspické moře. Kromě této lokality pozoroval jsem téhož blešivce v jiné studánce,

avšak opět na břehu Araxu; v horách, ač jsem je hledal, jsem Amphipody nenašel. Velmi hojným jest zde sladkovodní krab *Telfusa fluviatilis*.

Z měkkýšů sladkovodních našel jsem v řece Araxu pouze 2 druhy a sice rod *Limnea* a *Neretina*. Také zde (t. j. v okolí Ordubatu v potocích a studánkách) vyskytá se na všech příhodných místech *Planaria gonocephala*, s níž jsem se již sešel v předhorách Kavkazských. Domnívám se, že jest rozšířena i po celé severní Persii a Kurdistaně. *Planaria aborensis*, jež byla popsána Whitehouse-m z krajiny Abor v Himalajích,



Obr. 5. Údolí vedoucí k *průsmyku mestijskému* a na severní svah Kavkazu. Po straně na obrázku leží skrytý pramen, v němž nalezeny některé z vodulí Dr. Sig. Thor-em popisovaných.

nezdá se býti ničím jiným než *Pl. gonocephala* a snad jest na základě mého nálezu oprávněna domněnka, že tento druh obývá celou hornatou palaearktickou Asii a Evropu. — V malé studánce u osady Legvas poblíž Migri nalezena byla forma asi totožná s *Planaria vitta*. Nález této formy zde jest velmi zajímavý, neboť byla dosud sbírána jen ve střední Evropě.

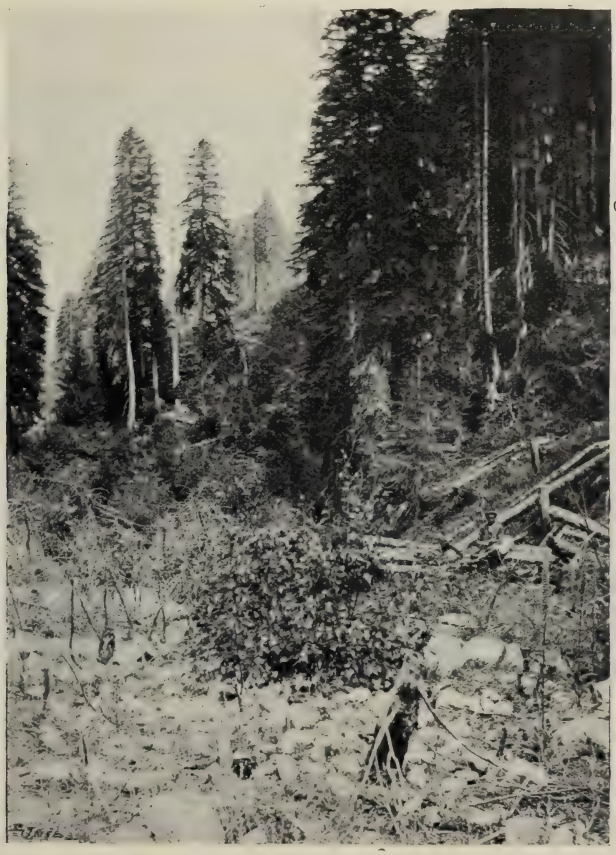
20. července opustili jsme Ordubat a vrátili se zpět zamýšlejíce procestovati nejméně známý kraj kavkazský t. zv. Svanetii, ležící na horním toku řeky Inguru v Lečchumském újezdě Kutaiské gubernie. Po dvoudenní cestě na sever od Kutaisu dorazili jsme do údolí řeky Cchenes-cchali a do osady Cageri. Zde sbíráno v horském potoce a listnatých pralesích nedaleko Cageri. *Mollusca, Apterygogenea, Coleoptera, Diplopoda, Crustacea* (*Gammarus pulex*), *Hydracarina* (nová varieta *Megapus nodipalpis* Sig. Thor var. *Kaukasica*) *Lumbricidae* a opět *Pl. gonocephala* byly naší kořistí. Fauna má ještě ráz předhor jak z nepřítomnosti *Blepharocerid* patrno.

Po Cageri naší příští zastávkou byla obec Čvelieri ležící pod průsmykem Lat-pari. Nic zvláště zajímavého nebylo nalezeno až na to, že se zde již objevují Blepharoceridy a sice nalezl jsem v řece Cchenescchali larvu dosud nepopsaného druhu, jež se ode všech Kavkazských forem nápadně odlišuje dlouze trnitými štítky umístěnými na hřbetní straně každého článku. Také zde jest *Gammarus pulex*. Na průsmyku Lat-pari, jenž vede do Svanetie, vyskytuje se přehojně *Plectes biebersteini* a nalezeno několik exemplářů *Vipera Renardi* ve výši více než 2000. Osada Kali pod průsmykem Lat-pari byla naší první zastávkou ve Svanetii.

Na exkursi údolím vedoucím k ledovci Džangu-tau a Tetnuld (viz obr. 3.) severně od Kali nalezeny dvě nové Blepharoceridy. Údolím protéká ledovcová říčka a poblíž jejich pramenů vyvěrají na levé straně údolí železité kyselky; v bezprostřední blízkosti jich teče malý potok (viz obr. 4.) v němž byly oba nové druhy nalezeny. Jsou to: *Liponeura* (*Blepharocera*) *platyfrons* Komárek nov. spec., imago ♀ s neobyčejně širokým čelem, širším než u kteréhokoli druhu příbuzného. Labrum-epipharynx a hypopharynx velmi zkráceny. Larva má krátká, dvoučlánková tykadla a každý článek tělní nese na hřbetě malý bodlinatý štítek. Nalezena ve společnosti formy druhé; sameček neznám. *Liponeura* (*Blepharocera*) *brevirostris* var. *Kaukasica* Komár. nov. var. Imago ♀ podobá se velmi typu; larva je odlišná, tykadla jsou sice nečlánkovaná ale krátká, kromě toho nese několik menších odchylných znaků.

Tyto dvě specie jsou velmi zajímavé po stránce systematické. V starší systematice veden byl rod *Liponeura* jako odlišný rodu *Blepharocera*, což spočívalo v tom, že byly známy pouze dva zástupci rodu *Liponeura*, lišící se velmi, zvláště larvami, od rodu *Blepharocera*. Kellogg, ktery popsal řadu forem rodu *Blepharocera*, ukázal, že charakteristické znaky, jež měly oba rody oddělovati, nejsou správné a sloučil proto obě skupinky v jeden rod *Blepharocera* a sice dle stejné struktury křídel. Bezzi podržel staré rozdělení, přidav toliko správné, skutečně existující rozdíly, postačující pro dosud známé formy. Při zpracování nových forem byl jsem na rozpacích čeho se mám přidržeti, a ježto opět celá řada znaků starší systematiky i Bezzi-ho se naprosto nehodila, zvláště co se týče larev, přidržel

jsem se prozatím názorů K e l l o g g-o v ý c h. Teprve později po bedlivějším srovnávání přesvědčil jsem se, že rod *Liponeura* a *Blepharocera* nutno podržeti, přes to, že starší názor užíval znaků skutečně nesprávných, a rozdělení Kellogg-ovo nutno zavrhnouti, ačkoliv systematické jeho důvody byly v podstatě dobré. Nebudu zde tuto věc blíže rozváděti, neboť se jedná o nové charakteristiky, které vyplynuly z poznání většího počtu zástupců a za druhé protože jsem chtěl toliko vysvětliti, proč užívám jiné nomenklatury než v práci původní.



Obr. 6. Část lesa z okolí Mestie. V popředí obrázku leží skrytá tůňka (na fotografii je zakryta keřem), jež byla naším nejbohatším nalezištěm vodní fauny.

Co se týče rozšíření těchto zvířat na Kavkaze, třeba uznati, že snad žádná vodní forma nevystupuje v takovém počtu exemplářů. Často jsou jedinými a to úžasně četnými obyvateli ledovcových řek, v nichž se pro strašnou dravost, ledovou vodu a nečistotu, jež činí vodu skoro kašovitě hustou, skoro žádný život neudrží. Obyčejně pokrývají v koloniích vyčnívající a pevné balvany na straně proti proudu obrácené. Menším lesním bystřinám se vyhýbají, alespoň jsem je tam nikdy nenalezl. Zajímavo je,

že jsem skoro na každé lokalitě sbíral jiný druh, bohužel byly to jen larvy, často ještě nedospělé, takže právě popisované druhy jsou jediným případem, kdy nalezl jsem imaga. Zdá se, že zde hraje velkou úlohu lokální isolace podmíněná nedostupnými hřbety, jež údolí od sebe oddělují; proto se vyskytuje ve Svanetii, na místě poměrně malém, tolik různých forem. Při bedlivějším studiu nalezne se na Kavkaze ještě více nových druhů jak tomu bylo i v Americe.

Z Kali vydali jsme se do obce M e s t i a, největší osady ve Svanetii, ležící na řece M u l a c h. Okolí Mestie je otevřenější, ledovce nejsou tak blízko a proto i klima je mírnější. Jak již jsem se zmínil, není v hlavních

Obr. 7 Pohled z Mestie na východ na luka a pastviny, jimiž protékal čistý, pstruhový potok, kde chyceni zvláště Harpacticidi.

řekách, kromě Blepharocerid a Plecopter žádná fauna. Ráz takových dravých vod a ledovcových údolí ukazuje obr. 5. kde nalezeny v postraním praménku některé vodule.

Veškera skoro vodní fauna koncentruje se proto v postraních čistých bystřinách, lesních a lučních pramenech neb tůňkách. Hlavními nalezišti byla zde malá lesní tůňka poblíž Mestie za řekou Mulach a pstruhový potok přitékající do Mestie po lukách z východní strany.

Zmíněná tůňka byla stálou vodní nádržkou a proto zde byl takový bohatý život. Chyceny zde byly různé druhy forem i u nás na podobných místech obvyklých, *Cladocera, Copepoda, Ostracoda, Hydrometridae, Notonectidae, Lumbriculidae* ale zároveň zvířata čistě vysokohorská, jako jsou vodule určené Dr. Sig. Thorem. Kromě toho chycena nová *Dalyella* (*Vortex*)

jež připomíná trochu na formu chycenou Plotnikovem v jezeře Sevanga (Gogča).

Lokalita druhá nebyla tak bohatá ale i zde chyceny některé věci, zvláště Harpacticidi. Obyčejně získán drobný material tím způsobem, že byl přinešen nálev neb různé vodní mechy a rostliny rostoucí na dně potoka a doma teprve byly drobné formy vybrány. Také v pralesích okolí mestijského bylo sbíráno, ale s malým výsledkem. Byly to hlavně *Coleoptera*, z nichž zde chycen nový druh *Stenus Veselyi Ramb.*, *Collembola*, *Formicidae*, *Mollusca*.

Po Mestii byla naší příští stanicí osada Bečo, ležící den cesty na

Obr. 8. Pohled s průsmyku *Chida* na jihozápad do Mingrelie. Četné strouhy v popředí jsou koryta bystřin, v nichž nalezeno nové *Dendrocoelum*.

západ od Mestie pod ledovcem Užba. Předchozí lokalita a tato byly z našich nejbohatších nalezišť. V lesním potoce uloveni Harpacticidi a chycena zvláštní *Mermis*. V hlavní řece vytékající z ledovce Užba nalezena nová Blepharocera, bohužel jen v larvalním stadiu. Odlišuje se od ostatních forem hlavně šířkou a silou těla a dlouhými, hustě sestavenými tělními chloupky. Podle charakteru příssavek přesvědčil jsem se, že náleží rodu *Liponeura*.

Odtud nastoupena cesta k moři a sice po horské stezce vedoucí po jižním svahu Elbruské skupiny do Abchazie a na Suchum. Z Bečo dorazili jsme prvý den do aulu Taurar; druhý den jsme překročili průsmyk Utwir. Třetího dne jsme vystoupili na průsmyk Chida a přenocovali. Zde byla chycena následujícího dne nová plostěnka z rodu *Dendrocoelum*.

Zevnější formou podobá se *Dend. Mrázeki*, až na to, že není slepá. Maximalní délka činí asi 20—25 *mm*, šířka 3—4 *mm*. Tvar těla velmi štíhlý. Barva je mléčně bílá s prosvitajícím růžově zbarveným střevem. Hlava je malá, súžuje se do zadu velmi silně v štíhlou a dlouhou „krční" část. Okraje hlavy tvoří dva hladce zaokrouhlené laloky. Čelní okraj je buď rovně uťat neb vchlípen do vnitř. V zataženém stavu, vybíhají kolmo do předu dva úzké, ostré laloky. Vzdálenost očí činí třetinu příslušné tělní šířky; vzdálenost od čelního okraje obnáší skoro dvojnásobnou délku rozstupu očí. Zadní střevní větve se nespojují a mají po 14—16 lalocích. Otvor pharyngealní leží skoro na konci třetí čtvrtiny těla. Otvor pohlavní vyúsťuje před koncem horní poloviny poslední čtvrtiny.

Průsmyk Chida tvoří dlouhé sedlo přetínající napříč mohutné pohoří a je na jižní straně rozerván přečetnými koryty sněhových bystřin, jak na přiloženém obrázku lze viděti. V těchto bystřinách žije naše *Dendrocoelum* a sice ne pod kameny, ale v husté spleti rostlinných kořenů a mechů a to v ohromném množství. Jest to forma přísně stenothermní, jež nesnese nejmenší kolísaní temperatury, jak jsem se při pokusu o transport sám přesvědčil. Právě pro tuto vlastnost nebude mít asi většího rozšíření. Na prvním průsmyku Utwir jsem ji nenalezl. Snad se jedná o čistě místní formu, nač by hlavně charakter krajiny ukazoval. — To byl náš poslední nález. Po několikadenní namahavé cestě a přenocování v lesích dospěli jsme do abchazské osady Čchalta a nastoupili jsme cestu k domovu.

O měření hvězdných azimutů v digressi.

(Pozorování na velikém Repsoldově altazimutu hvězdárny Strassburgské.)

Napsal *Vladimír Václav Heinrich* v Praze.

(Předloženo dne 30. ledna 1914.

K fixování azimutu užívá se odedávna s výhodou pozorování hvězdy polární (α Ursae minoris) v digressi. Jak známo opisují tu hvězdy oblouk, jehož konkávní strana leží směrem severním, ježto pak je pohyb v azimutu neobyčejně malý, lze zcela pohodlně sledovati hvězdu azimutálním šroubem mikrometrickým až k momentu extremního azimutu, který odpovídá vrcholu oblouku shora dolů neb naopak proběhnutého.

Taková azimutální měření za účelem určení šířky prováděti navrhl poprvé někdejší ředitel Pražské hvězdárny Josef Jiří Böhm.[1])

Avšak myšlenka nebyla ani v praxi ve větším rozsahu zkoumána ani theoreticky diskutována a dále rozvinuta. Mezeru tuto vyplniti hodlají především následující řádky.

Pro srovnání uvádíme nejužívanější methody měření šířkových.

1. V meridiánu Horrebow-Talcott. Prostředky jsou citlivé niveau a mikrometr.

2. V prvním vertikálu, Bessel-Struve, niveau a dobré hodiny.

3. Výšky circummeridianní. Methoda tato užívá jemně děleného kruhu vertikálního a rtuťového nadiru.

K tomu připojujeme:

4. Měření azimutů v digressi, mikrometr, niveau a jemně dělený kruh azimutálný (srovnej ad a). Měření tato jsou prosta vad chodu hodin ad 2. anomalií refrakčních a zejména ohybu dalekohledu následkem tíže ad 3.

Za svého půlletého pobytu na hvězdárně Strassburgské (květen až září 1908) prováděl jsem na popud zvěčnělého ředitele E. Beckera azimutální měření v digressi na velikém Repsoldově altazimutu (objektiv 5 palců).

*) J. G. Böhm: Methode, geographische Breite und Azimut zugleich aus blossen Azimutbeobachtungen der Circumpolarsterne ohne Kenntnis und Hilfe der Zeit auf das genaueste zu finden. Abhandlungen der böhm. Gesell. d. Wiss. in Prag 1855.

Během té doby získal jsem asi v 60 dnech a nocích 117 digressních azimutů, v celku na 2000 vláknových pointací. Kromě toho 10 azimutů polárky a mír a na 66 meridianních průchodů hvězd časových a polárných za účelem určení různých instrumentálných konstant.

Tato pozorování jakož i pozdější theoretické diskusse vedly k následujícím výsledkům:

a) Měření azimutů v digressi poskytují velmi krásnou, systematických chyb (refrakce, ohybu dalekohledu a hodin) prostou cestu k určení výšky pólu.

Hlavní přednost určení tkví po mém soudu v tom, že lze získati šířku při vhodném arranžování pozorované řady, omezující se na polární hvězdy zenitu blízké — *beze vlivu chyb děleného kruhu azimutálního, které resp. deset- a vícekrát zmenšeny do výsledku vcházejí.* Nicméně je obor příslušných polárných hvězd relativně velmi úzký obnášeje asi 2^0 od zenitu, takže již hvězdy, pro něž asi $\delta - \varphi > 15^0$ nehodí se k měřením šířkovým, nýbrž jenom k fixování azimutu.

b) Vliv chyb instrumentálných se zkoumá. Výsledek zní: Při vhodném svrchu zmíněném arrangement jsou zdrojem chyb v praxi nikdy idealně nesplněné postuláty.

1. Konstance azimutu (ostatně během doby libovolně krátké, volí-li se dvojice hvězdná).

2. Bezvadné niveau osy horizontální (z té příčiny radno stroj velmi dobře vynivellovati a resp. užiti dvou niveau vedle sebe).

3. Dokonalý mikrometrický šroub.

c) Když získána differenciální rovnice pro vliv místa hvězdného na pozorování šířková, ukáže její diskusse, jakož i příslušné tabulky coefficientů:

Měření azimutů v digressi hodí se daleko spíše než k určení výšky pólu ku vlastním fundamentálním měřením deklinačním.

Výsledek ad *a*) uvedený platí ve zvětšené míře i o těchto.

Avšak obor měření deklinačních je daleko širší a zahrnuje všecky tak zvané hvězdy polární a to tak, že ve středních šířkách je vliv chyb dělení kruhu, i vystoupí-li se z oboru $\delta - \varphi > 2^0$, zmenšen nejméně na $^1/_3$ v případě extremním.

Tento způsob určení deklinace polárních hvězd, sám v sobě poněkud bizarrní, ukazuje — tuším — pohodlnou cestu k určení konstant aberračních.

Měření sama ve svém provedení upomínají velice na methodu Horrebow-Talcott, podstatou i zdrojem chyb jsou takřka identická s měřením v prvním vertikálu. Co tam jsou hodiny, je zde kruh azimutálný, při čemž chyby obou silně stlumeny. Rozhodně však neobstojí srovnání s methodou výšek cirkummeridianních.

d) Diskusse získaných azimutů skýtá výšku pólu pro Strassburg se střední chybou výsledku $\pm 0{\cdot}09''$.

* * *

Práce ve své praktické části vznikla na popud zvěčnělého prof. E. Beckera, který mi také zmíněný stroj dal k disposici.

Původně doufal jsem, měření na základě získaných zkušeností opakovati a směrem ad *c*) naznačeným arranžovati. Okolnost tato, jakož i zaneprázdnění zcela jinými studiemi v posledních létech, nesou vinu, že jsem po pět let nenalezl příležitosti všecky početní redukce dopodrobna provésti. Teprve, když v letošních prázdninách podniknuto vyměření všech chronografických záznamů, měl jsem práci usnadněnu.

Úkolu tohoto podjala se se vší nevšední a obětavou pečlivostí k tomu potřebnou moje matka, paní Karla Heinrichová, kteréž na tomto místě netoliko za tuto, ale i mnohou jinou podporu během dlouholetých studií nejsrdečnější díky vyslovuji.

Vedle toho vděčností zavázán jsem svému příteli panu Dr. Juliu Liebmannovi, astronomu hvězdárny Strassburgské, za ochotné sdělení definitivních korrekcí hodin, které mi velice usnadnilo redukční počty, zejména určení momentů digresse.

Skizza ku theorii měření hvězdných azimutů v digressi. O vlivu chyb instrumentálných. Differenciální rovnice zlepšení výšky pólu a místa hvězdného. § 1.

Nechť značí — jakož zvykem a, z, α, t, δ, q resp. azimut čítaný od severu, zenitovou distancí, rektascensi, hodinový úhel, deklinaci a úhel parallaktický.

Fundamentálný trojúhelník hvězda, zenit, pól dává

$$\sin t \cot a = \sin \varphi \cos t - tg\, \delta \cos \varphi \qquad (1)$$

Derivací a užitím

$$\begin{cases} \sin z \cos q = \sin \varphi \cos \delta - \sin \delta \cos \varphi \cos t \\ \sin z \sin a = -\sin t \cos \delta. \end{cases}$$

neb též pomocí

$$-\cos q = \cos t \cos a + \sin a \sin t \sin \varphi$$

zjednáme

$$\frac{d\,a}{d\,t} = \frac{\sin a}{\sin t} \cos q\,.$$

Pro digressi platí ex definitione $q = 90^0$, $\frac{d\,a}{d\,t} = 0$

Trojúhelník je tedy pravoúhlý, což dává známé obecně formule základní

$$\left.\begin{aligned} \cos t &= \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta}, & \sin a &= \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, & \cos z &= \frac{\sin\varphi}{\sin\delta} \\ \sin t &= \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\cos\varphi\sin\delta}, & \cos a &= \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\cos\varphi} \\ & & \sin z &= \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\sin\delta}, \\ tg\,t &= \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\sin\varphi\cos\delta}, & tg\,a &= \frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}} \\ & & tg\,z &= \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

přechodem na poloviční úhel získáme ještě vzorec výhodný pro počet

$$tg\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\delta-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)}}.$$

Vzorce (2) jsou možné jenom při podmínce $\delta > \varphi$, kteráž ukazuje, které hvězdy mohou vůbec do digresse přijíti, zoveme je polárnými, kterýž název se obecně nekryje s pojmem hvězd cirkumpolárných a mnohdy neprávem zaměňuje.

Vzorce (2) slouží ku výpočtu malých ephemerid pro namíření dalekohledu. Doporučuje se jednou pro vždy sestrojiti pro dotyčnou hvězdárnu tabulky.

Tu jest φ konstantou a jediným argumentem jest δ.

Vzorce (2) pro ephemeridu nahraditi lze též následujícími, které zavádějí pomocný úhel (Böhm l. c.)

$$\left.\begin{aligned} \cos t &= \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta} & \cos z &= \frac{\sin\delta\sin(\varphi+x)}{\cos x} \\ tg\,x &= \cos t\cot\delta & \sin a &= \frac{\cos\delta}{\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Hvězdný čas digresse dán

$$\tau = {}_{1}{}^{1}{}_{5}\,t + \alpha \text{ na západě}$$
$$\tau = -\,{}_{1}{}^{1}{}_{5}\,t + \alpha \text{ na východě.}$$

Všimnouti si jest, že nic nevisí ve vzorcích (2) (3) od rektascense, nýbrž jenom od deklinace. To je také pochopitelno se stanoviska geometrického názoru.

Hvězda v digressi je v azimutu stationární, veškeren denní pohyb děje se od shora dolů neb naopak v digressi resp. západní, východní.

Je to pravý opak poměrů průchodů meridianních, zde úhly horizontální měří hodinový úhel, v digressi deklinaci, úhly vertikální deklinaci v digressi hodinový úhel.

Poslední rovnice ad 3. ukazuje, že změření úhlu azimutálního v digressi dává přímo výšku pólu při známé deklinaci beze znalosti času (Böhm).

Měření takové lze s přesností velmi velikou provésti, jak známo př. z pozorování hvězdy polární v digressi za účelem fixování azimutu, které je všeobecně obvyklé.

Hvězdu lze totiž ustavičně sledovati azimatálním šroubem mikrometrickým až se stane stationární a pak chod svůj v azimutu obrátí.

Ve skutečnosti pozoruje se tak, že na hvězdu v okolí digresse staví se ustavičně pohyblivé vlákno šroubu a pokaždé se odečte čas i mikrometr, pomocí intervalu časového mezi jednotlivým postavením vlákna a momentem digresse lze měření převésti na digressi a tím způsobem pointace hvězdy jakoby multiplikovati.

Ku změření mezidoby není třeba hodin přesných, stačí zcela obyčejné kapesní hodinky. V případě mých pozorování Strassburgských byl čas k vůli pohodlí registrován. Zmíněnou redukci na digressi lze ostatně provésti též měřením rozdílů výškových. Bychom příslušné redukce odvodili, získáme pomocí rovnice (1) diferenciální quotienty

$$\begin{aligned}
\frac{d\,a}{a\,t} &= \frac{\sin^2 a}{\sin^2 t}\,(-\operatorname{tg}\delta\cos\varphi\cos t + \sin\varphi) = 0\\
\frac{d^2 a}{d\,t^2} &= \frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t}\\
\frac{d^3 a}{d\,t^3} &= -\frac{3\cos\delta\sin\delta\cot t}{\cos\varphi\sin t}
\end{aligned} \tag{4}$$

a z rovnice $\sin\delta = \sin\varphi\cos z + \cos\varphi\sin z\cos a$

$$\begin{aligned}
\frac{d\,a}{d\,z} &= 0\\
\frac{d^2 a}{d\,z^2} &= -\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin z} = -\frac{\sin^2\delta}{\cos\delta\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}} = -\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin t\cos\varphi}\\
\frac{d^3 a}{d\,z^3} &= \frac{3\operatorname{tg}\delta\cos z}{\sin^2 z} = \frac{3\sin^2\delta}{\cos\delta}\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)} = \frac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2 t\cos\delta}
\end{aligned} \tag{4'}$$

Zní tedy příslušné rozvoje

$$\begin{aligned}
\Delta a &= \frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t}\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta t}{\sin 1''} \mp \frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t}\cot t\,\frac{4\sin^3\frac{1}{2}\Delta t}{\sin 1''} + \ldots\\
\Delta a &= \frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t}\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta t}{\sin 1''} \mp \frac{15^3}{2}\sin^2 1''\,\frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t}\cot t\,(\Delta t)^3
\end{aligned} \tag{5}$$

Při tom je $\frac{15^3}{2}\sin^2 1'' = (2{\cdot}59839 - 10)$, kde pravá strana dává *log*.

Hodnoty numerického faktoru prvního termu udávají př. tabulky Albrechtovy.[1]) Ostatně lze tytéž dostati také pomocí $(6{\cdot}73672 - 10)\ \Delta t^2$ (Coef. je *log*; Δt všude v časových sec.). — Dále obdržíme·

$$\Delta a = -\frac{tg\,\delta}{\cos\varphi \sin t}\frac{\sin 1''}{2}(\Delta t)^2 \mp \frac{\sin\varphi}{\cos\delta \sin^2 t \cos^2\varphi}\frac{\sin^2 1''}{2}(\Delta t)^3$$
$$= -(4{\cdot}38454 - 10)\frac{tg\,\delta\,(\Delta t)^2}{\cos\varphi \sin t} \mp (9{\cdot}07012 - 20)\frac{\sin\varphi}{\cos\delta \cos^2\varphi \sin^2 t}(\Delta t)^3 \quad (5')$$

O volbě znamení lze snadno rozhodnouti.

Př. jednej se o redukci určitého vláknového měření na digressi, dělení postupuj na kruhu ve směru astronomicky čítaných azimutů (od jihu přes západ, jako u altazimutu Strassburgského): pak vezmeme na východě horní znaménka po digressi, dolní znamení před digressí, na západě před digressí znamení horní, ale součet obou termů substrahujeme, po digressi znamení dolní, a algebraický součet obou termů odečteme atd.

Obraťme se k následující jednoduché otázce:

„Z měřených digressních azimutů *dvou* hvězd nalézti přímo výšku pólovou". Budiž jedna digresse na východě, druhá na západě. Azimut čítán od severu. Pak platí dle (2)

$$\begin{cases} \cos\delta_1 = \cos\varphi \sin a_1 \\ \cos\delta_2 = \cos\varphi \sin a_2. \end{cases}$$

Kombinací obou rovnic najdeme, klademe-li $a_1 + a_2 = D$ (veličina daná pozorováním)

$$\frac{2\cos\delta_1 \cos\delta_2}{\cos^2\varphi} = \cos(a_2 - a_1) - \cos D$$

odtud po snadné úpravě (eliminací a_1, a_2):

$$\cos\delta_1 \cos\delta_2 = -\cos D \cos^2\varphi + \sqrt{(\cos^2\varphi - \cos^2\delta_1)(\cos^2\varphi - \cos^2\delta_2)}$$

z této rovnice určíme

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\cos^2\delta_1 + \cos^2\delta_2 + 2\cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos D}}{\sin D} \quad (6)$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\sin^2 D - (\cos^2\delta_1 + \cos^2\delta_2 + 2\cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos D)}}{\sin D}$$

$$tg^2\varphi = \frac{\sin^2 D}{K} - 1$$

kdež kladeno:

$$K = \cos^2\delta_1 + \cos^2\delta_2 + 2\cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos D.$$

---

*) Albrecht, Formeln und Tafeln für geografische Ortsbestimmungen. Leipzig 1908 IV. Auflage sub XXVI. p. 208 et seq.

Pro $\delta_1 = \delta_2$, $a_1 = a_2$ t. j. tutéž hvězdu pozorovanou v digressi východní a západní degeneruje formule (6) na

$$\cos \varphi = \frac{\cos \delta}{\sin \frac{D}{2}} = \frac{\cos \delta}{\sin a},$$

což ad 2. již udáno.

Differencujme nyní rovnici (6) považujíce za proměnlivé všechny v ní obsažené veličiny

$$\sin^2 D \cos^2 \varphi = \cos^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_2 + 2 \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos D$$

bude tu

$$(\cos D \cos^2 \varphi + \cos \delta_1 \cos \delta_2)\, d D =$$

$$= \cos \varphi \sin \varphi \sin D\, d \varphi - \frac{\cos \delta_1 \sin \delta_1 + \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos D}{\sin D}\, d \delta_1$$

$$- \frac{\cos \delta_2 \sin \delta_2 + \sin \delta_2 \cos \delta_1 \cos D}{\sin D}\, d \delta_2$$

aneb po snadné úpravě

$$d D = tg \varphi\, (tg a_1 + tg a_2)\, d \varphi - \frac{\sin \delta_1}{\cos a_1 \cos \varphi}\, d \delta_1 - \frac{\sin \delta_2}{\cos a_2 \cos \varphi}\, d \delta_2 \qquad (7)$$

což je fundamentální rovnice differenciální pro zlepšení výšky pólu resp. pro zlepšení deklinace (místa hvězdy).

I. Nechť jedná se o měření šířková. Pak je v (7) $d \varphi$ odvisle proměnnou.

Všimněme si především významu $d D$. Předpokládáme-li, že šířka známa přibližně, a že vypočteme s touto přibližnou hodnotou konstanty rovnice, pak udává $d D$ rozdíl mezi měřeným rozdílem digressních azimutů D a mezi rozdílem týchž $(a_1 + a_2)$ jak plyne ze supponovaného φ.

Každé měření azimutální dáno — jak z theorie altazimutu resp. theodolitu známo

$$A_1 = L_1 \mp i_1 \cot g z \mp c \operatorname{cosec} z \mp s_1 \operatorname{cosec} z$$

kdež značí L_1 čtení horizontálního kruhu, i sklon horizontální osy, c kollimaci dalekohledu, s rozdíl šroubový mezi vláknem pohyblivým a pevným, pro nějž kollimace platí.

Pokud se týká znamení, visí toto od příslušných poměrů. V případě Strassburgského altazimutu pokračovalo čtení azimutů ve smyslu astronomickém od jihu přes západ, sever a východ dokola, míněné veličiny vztaženy byly na konec osy, na němž umístěn byl dalekohled, znamení hořejší platila pro dalekohled v pravo (FR), což značíme v dalším poloze I na rozdíl od polohy II (FL) dalekohled v levo.

Je tedy $d D$ dáno

$$d D = A_1 - A_2 - (a_1 + a_2).$$

Bychom vyšetřili vliv chyb instrumentálných na měření šířkové, předpokládejme pro jednoduchost, že se jedná o touž hvězdu ve východní a západní digressi. Pak platí

$$2\,tg\,\varphi\,tg\,a\,d\,\varphi = L_1 - L_2 \mp (i_1 - i_2)\,cot\,z \mp (c_1 - c_2)\,cosec\,z \mp \\ \mp (s_1 - s_2)\,cosec\,z + \frac{2\,sin\,\delta}{cos\,a\,cos\,\varphi}\,d\,\delta \qquad (8)$$

1. Vliv sklonu horizontální osy dán v extrémním případě

$$\frac{d\,\varphi}{d\,i} = \frac{cos\,\varphi}{cos\,\delta}.$$

To nahlédneme z rovnice (8) pomocí fundamentálních vzorců (2) pro $tg\,a$, $cot\,z$. Ježto obecně je $\delta > \varphi$, přechází sklon *celou svou hodnotou do měření*, pro hvězdy pólu blízké dokonce zvětšen. Není proto s výhodou ku měřením šířkovým hvězd pólu blízkých užívati.

Z těchto důvodů nivellaci pokud možno často korrigujeme a užíváme libell co nejjemnějších (nejlépe dvou vedle sebe).

$$d\,\varphi = \frac{cos\,\varphi}{cos\,\delta}\,d\,i \text{ tabulováno pro } d\,i = 1{\cdot}00''$$

$\delta - \varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
1°	1·01	1·01	1·02	1·02	1·02	1·03	1·03	1·04	1·05	1·07	1·11	1·25
2°	1·02	1·03	1·03	1·04	1·04	1·05	1·07	1·08	1·11	1·15	1·25	1·67
3°	1·03	1·04	1·05	1·06	1·07	1·08	1·10	1·13	1·17	1·24	1·42	2·50
4°	1·04	1·05	1·07	1·08	1·09	1·11	1·14	1·18	1·24	1·36	1·66	4·99
5°	1·06	1·07	1·08	1·10	1·12	1·15	1·18	1·24	1·32	1·49	1·99	
6°	1·07	1·09	1·10	1·12	1·15	1·18	1·23	1·30	1·41	1·65	2·48	
7°	1·08	1·10	1·12	1·15	1·18	1·22	1·28	1·37	1·52	1·86	3·32	
8°	1·10	1·12	1·15	1·18	1·21	1·26	1·33	1·45	1·65	2·12	4·98	
9°	1·11	1·14	1·17	1·20	1·25	1·31	1·39	1·53	1·79	2·48	9·95	
10°	1·13	1·16	1·19	1·20	1·29	1·36	1·46	1·63	1·97	2·97		

2. Vliv šroubu a kollimace je dán, jak z (8) vysvítá

$$d\,\varphi = tg\,\delta\,cot\,\varphi\,d\,c.$$

Rovnice ukazuje, že délka mikrometrem měřená přejde do výsledku měření šířkového celou svou vahou.

Jedná-li se o hvězdy blízké zenitu, *není zvětšena*, což je důležito podotknouti. Jak známo násobí se údaj šroubový při azimutálním měření $cosec\,z$, to dává blíže zenitu hodnoty velmi veliké. Pozorovatel vidí tu při redukčním počtu svoje chyby jakoby abnormálně zvětšeny, karrikovány. Z té příčiny neužívá se zenitových hvězd k fixování azimutů. Ale v případě měření výšky pólu, netřeba si těchto chyb všímati, zde naopak

jsou tyto zdánlivě disharmonující pointace žádoucí, na výšku pólu vlivu nemají, poněvadž přistupuje k nim v dalším počtu zmenšovací faktor.

Pokud se týká kollimace, jest její vliv dán týmž vzorcem, ale na měření šířková téměř nepůsobí. Je to veličina zpravidla konstantní, aspoň pro dobu mezi oběma digressemi, i bude v rovnici (8) $c_1 = c_2 = c$ a člen odpadá, jedná-li se o digresse téže hvězdy. V případě dvou hvězd různých je sice $cot\, z_1 \gtrless cot\, z_2$, avšak vhodnou volbou hvězd lze docíliti, že jich zenitové distance pro digressi jsou téměř stejné. Takto zmenšený vliv kollimační lze pak eliminovati ještě řadou pozorování uspořádaných v obou polohách stroje.

Při velmi stabilních strojích je ostatně s výhodou přeložiti během digresse po vzoru měření Struveho v prvním vertikálu.

Proti této manipulaci mluví poněkud delší počet redukční (ježto pointace jsou pak částečně dále od digresse, nutno vzíti v rozvojích termy vyššího řádu) a u strojů méně solidně postavených obava o změnu azimutu.

Tak v případě altazimutu Strassburgského manipulace ta, ač samočinným strojovým překladačem velmi ulehčená, se neosvědčila pro výšku věže lépe než způsob první.

Vliv šroubu a kollimace illustruje následující tabulka:

$\delta - \varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
1°	1·04	1·04	1·04	1·04	1·04	1·04	1·04	1·05	1·06	1·07	1·11	1·25
2°	1·08	1·07	1·07	1·07	1·07	1·08	1·09	1·10	1·12	1·16	1·25	1·67
3°	1·12	1·12	1·11	1·11	1·11	1·12	1·13	1·15	1·19	1·26	1·44	2·51
4°	1·17	1·16	1·15	1·15	1·15	1·17	1·18	1·21	1·27	1·38	1·68	5·01
5°	1·21	1·20	1·19	1·19	1·20	1·21	1·24	1·28	1·36	1·52	2·02	
6°	1·26	1·24	1·23	1·23	1·24	1·26	1·30	1·35	1·46	1·69	2·52	
7°	1·29	1·29	1·28	1·28	1·29	1·32	1·36	1·44	1·58	1·91	3·36	
8°	1·35	1·33	1·32	1·33	1·34	1·37	1·43	1·53	1·71	2·18	5·05	
9°	1·40	1·38	1·37	1·38	1·40	1·44	1·50	1·63	1·87	2·55	10·10	
10°	1·45	1·43	1·42	1·43	1·45	1·50	1·59	1·74	2·06	3·06		
11°	1·51	1·48	1·47	1·48	1·52							
12°	1·56	1·53	1·53	1·54								

3. Vliv fundamentální posice hvězdné. Tento je dán poměrem dle (8)

$$d\,\varphi = tg\,\delta\, cot\,\varphi\, d\,\delta$$

a platí o něm táž tabulka jako ad 2. Vzorec ukazuje zřetelně, že hvězdy pólu blízké, již asi $\delta > \varphi + 15^0$ nehodí se k měřením šířkovým, neboť pak chyba v deklinaci přechází do měření šířkového dokonce zvětšena.

Stran eliminace místa hvězdného zmiňujeme: Volí-li se k měření hvězdy dvě, jedna zenitu, druhá pólu blízká, obdržíme určení šířky, pozorujeme-li zenitovou v jedné a pólu blízkou v obou digressích, prosté

vlivu $d\,\delta$, třeba neznámé hvězdy poslednější, ale nikoli hvězdy zenitové. (Užije se rovnice (7) (7′).

4. Vliv chyb děleného kruhu a proměnlivosti azimutu dán, jak ukazuje rovnice (8), poměrem

$$d\,\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{cot\,\varphi}{cos\,\delta}\sqrt{sin\,(\varphi+\delta)\,sin\,(\delta-\varphi)}\;d\,L.$$

V této rovnici tkví veliká cena methody.

V tabulce, která následuje, udány jsou měny azimutu digresse pro měnu šířky o 1″, tak vidíme, že pro šířku 50° a deklinaci $< 51^0$ hlásí se měna ve φ posuvem v azimutu as 10krát větším. Příkladně kolísání pólu obnáší průměrem $0{\cdot}5'' = d\,\varphi$, toto kolísání ohlásí se v azimutu pošinutím 10kráte větším 5″, které lze již spolehlivě měřiti třeba kruhem, který dává čtení jenom na 1″.

Zároveň je patrno, každý koefficient tabulky, násoben dvěma (pro touž hvězdu) nebo součet dvou koefficientů příslušných dvěma různým δ (téže kolumny) udává kolikráte zmenší se chyby děleného kruhu při měření šířkovém.

Vliv těchto chyb je enormně malý, pokud omezíme se na hvězdy $\varphi + 2^0 > \delta > \varphi$, zvětší se při překročení této meze, nicméně je ještě asi 10^0 od zenitu příznivý, redukuje se as na $^1/_3$. Teprve tam, kde klesne tabulovaný koefficient pod $^1/_2$, nelze více měření $d\,\varphi$ prováděti s prospěchem.

$$d\,a = \frac{cos\,\delta\;tg\,\varphi}{\sqrt{sin\,(\delta+\varphi)\,sin\,(\delta-\varphi)}}\;d\,\varphi \quad \text{pro } d\,\varphi = 1{\cdot}00''$$

$\delta-\varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
0° 20′	7·01	7·72	8·45	9·22	10·06	11·00	12·11	13·52	15·18	14·25	21·51	29·74
0° 40′	4·93	5·43	5·94	6·48	7·06	7·72	8·47	9·41	10·61	12·24	14·81	19·88
1°	4·01	4·40	4·81	5·26	5·73	6·27	6·87	7·61	8·51	9·82	11·76	15·26
2°	2·80	3·08	3·35	3·96	3·96	4·32	4·72	5·21	5·79	6·56	7·60	8·58
3°	2·25	2·54	2·69	3·18	3·18	3·45	3·75	4·11	4·52	5·03	5·59	5·00
4°	1·91	2·09	2·29	2·69	2·69	2·91	3·16	3·43	3·74	4·07	4·27	2·34
5°	1·69	1·85	2·01	2·36	2·36	2·54	2·74	2·96	3·18	3·38	3·29	
6°	1·51	1·66	1·81	2·10	2·10	2·26	2·42	2·59	2·75	2·83	2·49	
7°	1·39	1·50	1·64	1·90	1·90	2·04	2·17	2·30	2·40	2·38	1·79	
8°	1·27	1·39	1·51	1·73	1·73	1·85	1·96	2·06	2·10	1·99	1·16	
9°	1·18	1·28	1·39	1·60	1·60	1·69	1·78	1·85	1·85	1·65	0·57	
10°	1·10	1·20	1·29	1·48	1·48	1·56	1·62	1·66	1·62	1·34		

Pokud se tkne proměnlivosti azimutu, lze tuto zcela zanedbati při stabilně stavěných strojích, zejména, je-li mezidoba obou digressí pokud možno malá (po vzoru methody Horrebow-Tallcott). Proto je výhodnější

užívati vždy hvězd dvou, které nejdéle asi ve čtvrt hodině přijdou jedna do digresse východní, druhá západní.

Poněvač měření je pro ohroženou konstanci azimutu tím přesnější, čím méně pohybů (i jen ve vertikální rovině) v mezidobě učiněno, je zajisté radno voliti obě digresse asi v stejné výši nad horizontem.

Ideální arrangement měření bylo by dle toho následující:

A) Analogon metody Horrebow-Talcott.

Dvojice hvězd přibližně stejné deklinace, $\delta \leqq \varphi + 2^0$, *mezidoba několik minut.*

Namíření dalekohledu a odečtení azimutálního kruhu i niveau osy horizontální.

Jakmile se objeví první hvězda v zorném poli dalekohledu, několik pointací vláknem vertikalním.

Namíření dalekohledu na druhou hvězdu v korresponduj ící digressi na opačné straně meridiánu.

Pointace vertikálním vláknem.

Odečtení kruhu azimutálního a niveau.

Pozorování den ode dne v různých polohách stroje.

Kde jedná se o stroje větší stabilnosti, lze udati ještě arrangement dle vzoru metody Struve v prvním vertikálu.

B) Dvojice hvězd jako ad *A*).

Namíření dalekohledu, odečtení kruhu i niveau.

Několik pointací — přeložení stroje — další pointace v druhé opačné poloze.

V poslednější poloze namíření na druhou digressi.

Pointace — přeložení — další pointace.

Odečtení kruhu a niveau.

Tyto ideální vzory lze ostatně při stabilnějších strojích modifikovati takto:

ad *A*) Serie digressí na jedné straně meridiánu, serie digressí na straně opačné, obě v téže poloze stroje.

ad *B*) Serie digressí na jedné straně meridiánu, přeložení stroje a serie digressí na téže straně meridiánu v opačné poloze.

Serie digressí na druhé straně meridiánu v poslednější poloze, přeložení a zas serie digressí.

Zbývá několik slov o případu dvou digressí na téže straně meridiánu, kterýž případ při odvození rovnice differenciální (7) (8) nebyl uvažován. Příslušná rovnice analogická (7) zní pak jak laskavý čtenář bezprostředně nahlédne

$$d\,D = tg\,\varphi\,(tg\,a_1 - tg\,a_2)\,d\,\varphi - \frac{sin\,\delta_1}{cos\,a_1\,cos\,\varphi}\,d\,\delta_1 + \frac{sin\,\delta_2}{cos\,a_2\,cos\,\varphi}\,d\,\delta_2. \quad (7')$$

Diskusse zcela analogická soudům hořejším ukazuje, že rovnice výhodná není. Zejména vliv kollimace je velký i tenkrát, volí-li se, což radno vzhledem k chybě sklonu horizontální osy, jedna hvězda zenitová, druhá pólu blízká.

II. Jedná se nyní o měření deklinační, pak ve fundamentální rovnici (7) bude $d\,\delta$ odvisle proměnnou. Supponujme pro jednoduchost touž hvězdu i bude platiti

$$-\frac{2\,\sin\delta}{\cos a\,\cos\varphi}\,d\,\delta = L_1 - L_2 \mp (i_1 - i_2)\,\cot z \mp (s_1 - s_2)\,\operatorname{cosec} z \mp$$
$$\mp (c_1 - c_2)\,\operatorname{cosec} z - 2\,tg\,\varphi\,tg\,a\,d\,\varphi \qquad (9)$$

1. Vliv sklonu horizontální osy na měření udává vztah:

$$\frac{d\,\delta}{d\,i} = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\,.$$

O jeho průběhu poučuje názorně tabulka:

$$d\,\delta = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\,d\,i \quad \text{pro } d\,i = 1{\cdot}00''$$

$\delta - \varphi$ \ φ	40^0	50^0	60^0	70^0
	''	''	''	''
$0^0\ 30'$	0·99	0·99	1·00	1·00
1^0	0·98	0·99	0·99	0·99
2^0	0·96	0·97	0·98	0·99
3^0	0·94	0·96	0·97	0·98
4^0	0·93	0·95	0·96	0·98
5^0	0·91	0·94	0·96	0·97
10^0	0·84	0·89	0·92	0·95
15^0	0·79	0·85	0·90	0·94
20^0	0·74	0·82	0·88	
25^0	0·71	0·79	0·87	
30^0	0·68	0·78		
35^0	0·65	0·77		
40^0	0·65			
45^0	0·65			

2. Vliv šroubu a kollimace dán relací

$$\frac{d\,\delta}{d\,c} = 1$$

to jest chyba vchází svojí celou hodnotou algebraicky nezměněnou do výsledku měření. Také zde bude v azimutech určených jednotlivými pointacemi karrikovaná disharmonie, kteráž však netýká se měření deklinačního, zmenšíc se v dalším počtu redukčním přistupujícím faktorem.

3. Vliv chyby neznámé pólové výšky udává vztah

$$d\,\delta = tg\,\varphi\,cot\,\delta\,d\,\varphi$$

který illustruje tabulka, je všeobecně zmenšen.

$d\,\delta = tg\,\varphi\,cot\,\delta\,d\,\varphi$ pro $d\,\varphi = 1{\cdot}00''$

$\delta - \varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
1°	0·96	0·96	0·96	0·97	0·97	0·96	0·96	0·95	0·95
2°	0·92	0·93	0·93	0·93	0·93	0·93	0·92	0·91	0·89
3°	0·89	0·90	0·90	0·90	0·90	0·89	0·88	0·87	0·84
4°	0·86	0·86	0·87	0·87	0·87	0·86	0·84	0·82	0·79
5°	0·82	0·83	0·84	0·84	0·83	0·82	0·81	0·78	0·74
6°	0·80	0·81	0·81	0·81	0·80	0·79	0·77	0·74	0·69
7°	0·77	0·78	0·78	0·78	0·77	0·76	0·74	0·70	0·63
8°	0·74	0·75	0·76	0·75	0·74	0·73	0·70	0·66	0·58
9°	0·71	0·72	0·73	0·73	0·72	0·70	0·67	0·61	0·53
10°	0·69	0·70	0·70	0·70	0·69	0·67	0·63	0·57	0·48
11°	0·66	0·68	0·68	0·67	0·66	0·64	0·60	0·53	0·44
12°	0·64	0·65	0·66	0·64	0·63	0·61	0·56	0·50	0·39
13°	0·62	0·63	0·63	0·62	0·61	0·58	0·53	0·46	0·34
14°	0·60	0·61	0·61	0·60	0·58	0·55	0·50	0·42	0·29
15°	0·58	0·60	0·59	0·58	0·55	0·52	0·46	0·38	0·24
16°	0·56	0·57	0·57	0·55	0·53	0·49	0·43	0·34	0·19
17°	0·54	0·55	0·54	0·53	0·51	0·46	0·40	0·30	0·14
18°	0·52	0·53	0·52	0·51	0·48	0·44	0·37	0·26	0·10
19°	0·50	0·51	0·50	0·49	0·46	0·41	0·34	0·23	0·05
20°	0·48	0·49	0·48	0·47	0·43	0·38	0·30	0·19	
21°	0·47	0·47	0·46	0·44	0·41	0·36	0·27	0·15	
22°	0·45	0·45	0·45	0·42	0·39	0·33	0·24	0·11	
23°	0·43	0·44	0·43	0·40	0·36	0·30	0 21	0·08	
24°	0·42	0·42	0·41	0·38	0·34	0·28	0·18	0·04	
25°	0·40	0·40	0·39	0·36	0·32	0·25	0·15		
26°	0·39	0·39	0·37	0·34	0·30	0·23	0·12		
27°	0·38	0·37	0·36	0·32	0·28	0·20	0·09		
28°	0·36	0·36	0·34	0·31	0·25	0·18	0·06		
29°	0·35	0·34	0·32	0·29	0·23	0·15	0·03		
30°	0·33	0·33	0·30	0·27	0·21	0·12			
31°	0·32	0·31	0·29	0·25	0·19	0·10			
32°	0·31	0·30	0·27	0·23	0·17	0·07			
33°	0·29	0·28	0·26	0·21	0·15	0·05			
34°	0·28	0·27	0·24	0·19	0·12	0·03			
35°	0·27	0·26	0·22	0·18	0·10				
36°	0·26	0·24	0·21	0·16	0·08				
37°	0·24	0·23	0·19	0·14	0·06				
38°	0·23	0·21	0·18	0·12	0·04				
39°	0·22	0·20	0·16	0·11	0·02				
40°	0·21	0·19	0·15	0·09					

$\delta - \varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
41°	0·20	0·17	0·13	0·07					
42°	0·19	0·16	0·12	0·05					
43°	0·16	0·15	1·10	0·03					
44°	0·15	0·14	0·09	0·02					
45°	0·14	0·12	0·07						
46°	0·13	0·11	0·06						
47°	0·12	0·10	0·04						
48°	0·11	0·09	0·03						
49°	0·10	0·07	0·01						
50°	0·09	0·06							
51°	0·08	0·05							
52°	0·07	0·04							
53°	0·06	0·02							
54°	0·05	0·01							
55°	0·04								
56°	0·03								
57°	0·02								
58°	0·02								
59°	0·01								
60°									

4. Vliv chyb děleného kruhu a proměnlivosti azimutu dán je tentokráte relací

$$d\,\delta = \frac{\sqrt{\sin(\delta + \varphi)\,\sin(\delta - \varphi)}}{2\,\sin\delta}\,d\,L\,.$$

Tabulka udaná v následujícím poučuje o velikosti měn azimutu digresse pro měnu deklinace o 1″. Jako ad 4. I. je citlivost v případě hvězd zenitových enormní, tak př. pro $\varphi = 50^0$, $\delta = 50^0\,20'$, dává výchylka v deklinaci 0·1″ celou 1″ v azimutu. Jinak lze též říci, každý koefficient tabulky násoben dvěma udává, kolikrát zmenší se chyby děleného kruhu.

Na rozdíl od 4. ad I. jest zdůrazniti, že citlivost neomezuje se na úzký pruh hvězd blízkých zenitu, nýbrž týká se (v míře arci zmenšené směrem k pólu) všech hvězd, pro něž $\delta > \varphi$.

Koefficient příslušný neklesá nikde pod 1, t. j. měření je všude možné a chyba dělení ztlumí se v případě nejnepříznivějším na $^1/_3$, jedná-li se o touž hvězdu.

Lze tedy říci, že měření azimutů v digressi daleko lépe se hodí k určení deklinačním nežli šířkovým.

Odtud dedukujeme arrangement takových měření totéž, co ad I.

Vyberou se dvě hvězdy, jedna známé, druhá neznámé deklinace, které brzy po sobě vstupují do digressí a užije se ideálního způsobu *A*) buď po vzoru methody Horrebow-Talcott *B*) neb dle vzoru Struveho měření v prvním vertikálu.

Za hvězdu známé deklinace volí se tu s prospěchem hvězda pólu blízká, u níž malá neznámá chyba v deklinaci v azimutu se příliš zvětšená nejeví.

Pozorování *téže* hvězdy v obou digressích dává přímo deklinaci jako jedinou neznámou. Proti meření tohoto druhu mluví délka mezidoby a jí ohrožená konstance azimutu, takže lze z toho těžiti jenom pro hvězdy zenitu velmi blízké, které v krátké době obě digresse passírují. Za to je postup takový naskrze výhodný při použití strojů větších a stabilnějších.

$$d\,a = \frac{sin\,\delta}{\sqrt{sin\,(\delta + \varphi)\,sin\,(\delta - \varphi)}}\,d\,\delta,$$

tabulka obsahuje hodnoty výrazu pro $d\,\delta = 1{\cdot}00''$

$\delta - \varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
0° 20′	7·10	7·81	8·55	9·33	10·17	11·16	12·27	13·72	15·46
0° 40′	5·06	5·57	6·08	6·63	7·23	7·91	8·70	9·70	11·01
1°	4·17	4·58	5·00	5·45	5·94	6·50	7·15	7·96	9·02
2°	3·02	3·30	3·60	3·92	4·27	4·66	5·13	5·72	6·49
3°	2·52	2·75	2·99	3·25	3·54	3·86	4·25	4·74	5·39
4°	2·23	2·43	2·64	2·86	3·11	3·40	3·74	4·17	4·75
5°	2·04	2·22	2·40	2·60	2·82	3·08	3·39	3·79	4·32
6°	1·90	2·06	2·23	2·41	2·62	2·85	3·14	3·51	4·01
7°	1·80	1·94	2·10	2·27	2·46	2·68	2·95	3·30	3·78
8°	1·71	1·85	2·00	2·15	2·33	2·54	2·80	3·13	3·60
9°	1·65	1·77	1·91	2·06	2·23	2·43	2·68	3·00	3·46
10°	1·59	1·71	1·84	1·98	2·14	2·34	2·58	2·89	3·34
11°	1·54	1·66	1·78	1·92	2·07	2·26	2·49	2·80	3·25
12°	1·50	1·61	1·73	1·86	2·01	2·19	2·42	2·72	3·17
13°	1·47	1·57	1·69	1·81	1·96	2·15	2·36	2·66	3·11
14°	1·44	1·54	1·65	1·77	1·91	2·08	2·30	2·60	3·06
15°	1·41	1·51	1·61	1·73	1·87	2·04	2·26	2·62	3·01
16°	1·39	1·48	1·58	1·70	1·84	2·00	2·22	2·52	2·98
17°	1·37	1·46	1·56	1·67	1·80	1·97	2·18	2·48	2·95
18°	1·35	1·44	1·53	1·64	1·78	1·94	2·15	2·45	2·94
19°	1·34	1·42	1·51	1·62	1·75	1·91	2·12	2·43	2·93
20°	1·32	1·40	1·49	1·60	1·73	1·89	2·10	2·41	2·92
21°	1·31	1·39	1·47	1·58	1·71	1·87	2·08	2·39	
22°	1·29	1·37	1·46	1·56	1·69	1·85	2·06	2·38	
23°	1·28	1·36	1·44	1·55	1·67	1·83	2·05	2·37	
24°	1·27	1·35	1·43	1·53	1·65	1·81	2·03	2·37	
25°	1·26	1·34	1·42	1·52	1·64	1·80	2·02	2·37	
26°	1·25	1·33	1·41	1·51	1·63	1·79	2·02		
27°	1·25	1·32	1·40	1·50	1·62	1·78	2·01		
28°	1·24	1·31	1·39	1·49	1·61	1·77	2·00		
29°	1·23	1·30	1·38	1·48	1·60	1·76	2·00		
30°	1·23	1·29	1·37	1·47	1·59	1·76	2·00		

$\delta - \varphi$ \ φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
31°	1·23	1·28	1·36	1·46	1·58	1·75			
32°	1·21	1·28	1·36	1·45	1·58	1·75			
33°	1·21	1·27	1·35	1·45	1·57	1·75			
34°	1·20	1·27	1·35	1·14	1·57	1·74			
35°	1·20	1·26	1·34	1·44	1·57	1·74			
36°	1·19	1·26	1·33	1·43	1·56				
37°	1·19	1·26	1·33	1·43	1·56				
38°	1·19	1·25	1·33	1·43	1·56				
39°	1·18	1·25	1·32	1·43	1·56				
40°	1·18	1·24	1·32	1·42	1·56				
41°	1·18	1·24	1·32	1·42					
42°	1·18	1·24	1·31	1·42					
43°	1·17	1·23	1·31	1·41					
44°	1·17	1·23	1·31	1·41					
45°	1·17	1·23	1·31	1·41					
46°	1·17	1·23	1·31						
47°	1·17	1·23	1·31						
48°	1·16	1·23	1·31						
49°	1·16	1·22	1·31						
50°	1·16	1·22	1·31						
51°	1·16	1·22							
52°	1·16	1·22							
53°	1·16	1·22							
54°	1·16	1·22							
55°	1·16	1·22							
56°	1·16								
57°	1·16								
58°	1·16								
59°	1·15								
60°	1·15								

Zbývala by ještě poznámka o prospěšnosti takových měření deklinačních. Pro hvězdy pólu blízké, které již daleko od zenitu meridiánem procházejí, byla by taková fundamentální měření vždy užitečná, již proto, že eliminují zúplna vliv refrakce a ohybu dalekohledu a kromě toho silně tlumí chyby dělení kruhu. V případě systematické řady pozorovací, která by trvala alespoň celý rok, lze měření těch užiti k získání důležitých konstant astronomických.

Pan Küstner činí v pojednání „Zur Bestimmung der Aberrationskonstante aus Meridianzenitdistanzen unabhängig von den Schwankungen der Polhöhe", Astron. Nachr. 3015, Bd. 126., p. 240 následující poznámku:

„Methoda v prvním vertikálu dává velmi ostrá určení (míněných konstant) pro malé positivní hodnoty $\varphi - \delta$ a lze její platnost také s prospěchem rozšířiti na malá negativní $\varphi - \delta$, vystoupíme-li maličko s rovinou instrumentu z prvního vertikálu."

Pan Küstner myslí patrně na methodu Döllenovu,[1]) která jest již přechodem z prvního vertikálu k digressi.

K tomu podotýkám jenom, že naše projektovaná měření v případě čistých digressí a specielně digressí pólu blízkých daleko lépe eliminují vliv neznámé pólové výšky. Srovnej o tom tabulku ad II. 3.

Pan J. C. Kapteyn navrhl svého času k určení ročních parallax pozorování rektascensijních rozdílů. Pokud získané resultáty ukazují, zaslouží ona měření úplné důvěry. Dle všeho bylo by možno stejně jistých výsledků dojíti z rozdílů deklinačních hvězd pólu ekliptiky blízkých — kdyby bylo lze při posledněj ších měřeních zúplna eliminovati hlavní zdroje chyb — anomalie refrakční a ohyb dalekohledu následkem tíže.

Skutečně zdá se, že míněná fundamentální měření mezeru tuto zúplna vyplňují, an případ digresse dle našeho rozboru § 1., p. 5. skýtá právě *komplementární obraz poměrů* meridianních.

Přejdeme nyní k uspořádání počtu redukčního.

Předpokládejme, že digresse téže hvězdy během celé pozorovací řady měřeny po dnech více či méně od sebe vzdálených.

Především vybereme (resp. ostřeji vypočteme) zdánlivá místa hvězdy pro příslušné epochy z Berl. Jahrb. neb z hvězdných katalogů, α stačí vzíti na $0{\cdot}1^{sec}$.

Po té určíme pro míněnou hvězdu jisté konstanty (resp. jich rozvoje), které budou platit pro všechny digresse

$$A = \frac{\cos\delta \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg}\varphi, \quad \sin a = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

ad (2) ad (7)

$$B = (6{\cdot}73672 - 10)\frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t} \text{ koef. též dle Albrechtových tabulek l. c. p.}$$

$$B' = (2{\cdot}59839 - 10)\frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos\varphi\sin t}\cot t$$

} ad (5)

$$d\log B = 0{\cdot}43429\,.\left(2\cot 2\delta - \frac{\cot^2 t}{\sin\delta\cos\delta}\right)d\delta, \text{ při čemž koef. } log \text{ je } 9{\cdot}63778 \tag{10}$$

$$d t^{sec} = \frac{d\delta}{15}\frac{\cot t}{\sin\delta\cos\delta} \tag{11}$$

$$d a = -\frac{\sin\delta\, d\delta}{\cos\varphi\cos a} = -\frac{\sin\delta\, d\delta}{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}} \tag{12}$$

---

*) Srv. též B. Wanach: Döllens Methode der Breitenbestimmung in der Nähe des ersten Vertikals. A. N. 3244. Bd. 136.

F. Contarino, Sulla determinazione della latitudine col metodo di Döllen A. N. 3263. Bd. 136.

Také Witkowsky, Spisy topografického oddělení ruského generálního štábu, sv. XI. 1885.

za φ brána tu hodnota přibližná, z které vycházíme, kalkul 4—5místný.

Dále určíme ostře (6—7místně) pomocí supponovaného téhož φ a formule

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \text{ ad 2.}$$

azimut první epochy. Když tento určen, dány ostatní pomocí formule pro $d\,a$. Obdobně určíme pro první epochu exaktně t dle

$$\cos t = tg\,\varphi\,\cot \delta \quad \text{resp.} \quad tg\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\delta - \varphi)}{\sin(\delta + \varphi)}} \quad \text{ad 2.}$$

Tytéž veličiny pro ostatní data dává $d\,t$ (3—4místně).

Z daných α a vypočtených t určíme dále momenty digresse pomocí $\alpha \mp \frac{t}{15}$ (horní znamení na východě) a převedeme je na stav hodin, neboť celý další počet zjednoduší se supposicí znalosti momentu digresse. Není-li čas znám (na hvězdárnách přímo od stroje průchodního), stačí ho interpolovati z maxima šroubové polohy.

Uvažme v dalším redukci jednotlivé digresse. Počet všude 4—5 místný.

1. Každý měřený rozdíl šroubový nutno násobiti $\operatorname{cosec} z$, za tím účelem určíme z pro digressi prvního dne dle

$$\cos z = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} \text{ ad 2.}$$

pětimístně. Pro ostatní dni dostaneme zenitovou distanci digresse pomocí

$$d\,z = \frac{\sin \varphi}{\sin z} \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta}\, d\,\delta \tag{13}$$

$$\text{resp. } d \operatorname{cosec} z = -\frac{\cos z}{\sin^3 z} \frac{\sin \varphi \cos \delta}{\sin^2 \delta}\, d\,\delta \tag{14}$$

Pointace dějí se však pomocí časových údajů mimo digressi, i bude třeba rozvojů

$$\operatorname{cosec} z = \operatorname{cosec} z \mp 15 \sin 1'' \operatorname{cosec} z \cot z \cos \delta\, \Delta\, t^{\text{séc}} \tag{15}$$

V koefficientech u $\Delta\, t$ stačí vzíti z pro všechny dny totéž, patřící prvnímu z nich. Užije-li se místo měření intervallu časového rozdílů výškových stačí patrně užiti těchto pro multiplikaci šroubu.

Také udání sklonu osy horizontální nutno násobiti $\cot z$ i platí pro měření téže digresse

$$\cot z = \cot z \mp 15 \sin 1'' \frac{\cos \delta}{\sin^2 z}\, \Delta\, t^{\text{sec}} \tag{16}$$

pro digresse ostatních dní

$$d \cot z = - \frac{1}{\sin^3 z} \frac{\sin \varphi \cos \delta}{\sin^2 \delta} d\delta \qquad (17)$$

2. Každou jednotlivou pointaci dlužno převésti pomocí měřeného intervallu časového (neb výškového) na moment digresse, což může se díti pro všechny jednotlivé dny s týmiž konstantami dle vzorců ad (5).

Znamení ve vzorcích (15) (16) určí se hned z okolnosti, že na východě, blíží-li se hvězda k zenitu, roste *cot* i *cosec*, na západě je tomu naopak.

Podobně určili bychom jakého znamení užiti pro redukci na azimut digresse (srv. (5) p. 5., 6.).

Z určených azimutálných hodnot pointací ad 1. a jich redukce na digressi ad 2. utvoříme po jich algebraickém sloučení střed, který dává azimutálnou hodnotu šroubu v digressi.

Zbývá vyšetřiti vliv denní aberrace na azimuty a epochu digresse.

Vyjděme ze známých výrazů pro denní aberraci v rektascensi a deklinaci (srv. př. Berl. Jahr. 1908, p. 376).

$$\Delta\alpha = + 0{\cdot}0213^s \cos\varphi \cos(\Theta - \alpha) \sec\delta \quad \text{pro} \quad \Theta = \alpha \mp t$$
$$\Delta\delta = + 0{\cdot}320'' \cos\varphi \sin(\Theta - \alpha) \sin\delta \quad \Theta - \alpha = \mp t \begin{matrix}\text{vých}\\ \text{záp.}\end{matrix}$$

i dostaneme pomocí (11) a (12)

$$\Delta\tau = + 0''0426 \cos t \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$$
$$\Delta a = \pm 0{\cdot}320'' \sin\delta.$$

Chyba činí in maximo 0·3″ v azimutu, ježto však jde vždy o rozdíly, vypadne docela dosahujíc sotva několik setin obloukové sekundy.

Epochu digresse stačí znáti — tehdy, když za účelem zjednodušení počtu ji supponujeme — as na $0{\cdot}1^{sec}$, bude tedy míti výraz Δt význam jen pro hvězdy pólu velmi blízké.

Určení konstant hvězdných i redukcí děje se 4—5místně, jen ostrá určení hypothetických azimutů resp. momentů digresse dějí se (jak svrchu uvedeno) z části sedmi neb šestimístně.

Počet sám není asi delší než redukce pozorování v prvním vertikálu, zvláště omezíme-li se jen na pointace v blízkosti maxima a uspořádáme-li je nad to symmetricky k digressi, v kterémž případě členy druhého řádu se zruší, Při předběžných redukcích čítáme ostatně mnohem rychleji, tak že př. ad 1. vyhledáme z udání šroubových maximalní resp. minimální z nich a násobíme je *cosec z*, zatím ostatní pointace vynechávajíce.

Redukční počet v případě měření deklinačních je zcela analogický.

Kratšeji lze dojíti cíle přímým výpočtem korrekcí $d\varphi$ (ad I, II) jedná-li se o digresse téže hvězdy, ovšem bez přímého určení azimutů. V případě digressí dvou různých hvězd o malém deklinačním rozdílu lze rozvojem dle této veličiny $\Delta\delta$ dospěti rovněž k velmi stručnému výsledku.

Od poslednějšího uspořádání počtu upuštěno jednak vzhledem ku výběru hvězd, jednak že za účelem určení různých konstant stroje bylo výhodnějším zjistiti současně též azimuty samé, pokud možno ostře.

Popis užitého stroje a manipulace pozorovací. § 2.

Veliký Repsoldův altazimut hvězdárny Strassburgské umístěn v severní věži budovy meridianní na konickém pilíři as 5 metrů hluboko do země zapuštěném a od věže samotné zcela isolovaném. Poněkud vysoká poloha souvisí s původním jeho účelem, pozorováním azimutů a výšek měsíčních.

Je to theodolit obrovských rozměrů. Bližší popis nalezne čtenář v pojednání Schurově,[1]) z něhož vyjmeme jen poznámky, které nás v dalším interessují.

Dalekohled má ohniskovou dálku 1·30 *m* objektiv 0·13 *m* (5 palců), okulární mikrometr horizontální a vertikální. V zorném poli napjaty kromě toho dva systémy vláken horizontálných a vertikálných. Otočky mikrometrů děleny ve 100 dílců, jichž desetiny lze ještě odhádati. Zorné pole opatřeno osvětlením, které lze změniti v komplementérní osvětlení vláken.

Dalekohled opatřen jemnými šrouby pro pohyb ve výšce i azimutu.

K pozorováním zenitovým nutno užívati lomeného zenitového okuláru, pro úhly zenitu vzdálenější stačí okulár přímohledný.

Dalekohled připevněn na jednom konci horizontální osy, na druhém kruh vertikálný.

Horizontální osa je v podstatě konstrukce Hansen-Repsoldovy po vzoru aequatoreálu Gothského. Na ose horizontální spočívá libella, kterou lze samočinným zařízením (důmyslným systémem pákovým) přeložiti, odečítá se dalekohledem. Přeložení stroje v čepech provádí se rovněž automaticky.

Azimutální kruh, jehož jediné při našich pozorováních používáno, má poloměr 32 *cm*. K jeho odečítání slouží 4 mikroskopy, každý z nich má po dvou párech pohyblivých vláken (v distanci 1·5 otočky za účelem eliminace chyb periodických). Kruh azimutální dělen ode 2′ ke 2 minutám ve smyslu „rafií", otočka šroubu mikroskopu dělena v 60 dílců (jeden dílec = 1″), jichž desetiny lze odhadnouti. Takto vede jediné odečtení kruhu jako střed z 8 údajů ku znalosti 0″1.

Mechanická konstrukce stroje je v mnohém svéráznou fantasií Repsoldovou. Tak vyznačuje se kruh azimutálný zvláštním provedením osy, která v podstatě tvořena dvěma válci, z nichž vnitřní tře se na vnějším.

---

[1]) Schur, Untersuchungen und Beobachtungen am Altazimut der Straßburger Sternwarte. Astron. Nachr. 120 Nr. 2857—58.

Dle toho je excentricita sice trochu proměnlivá, za to však má konstrukce při massivnosti stroje nepopíratelné výhody.

Ku fixování azimutů slouží v zahradě v distanci asi 140 *m* umístěné míry (umělé hvězdy) elektrické, které lze s věže uvésti v činnost (samočinné otevření oken domečků, osvětlení i zavření). V každé poloze stroje přicházejí dvě z nich k platnosti (severní a jižní).

Ku potření následků vedra během doby denní, tohoto největšího nepřítele astronomických měření, užíváno samočinných vodních výlevů ochlazovacích na kopuli a horní část věže na tři hodiny před početím vlastních pozorování.

Manipulace pozorovací byla následující:

Voleny z předem vypočtených malých ephemerid dvě hvězdy, které brzy po sobě vstupují do digresse, jedna západně, druhá východně. Když dalekohled dle dat ephemeridy namířen a pevně zašroubován hrubými šrouby, odečteno 8 vláknových dvojic v mikroskopech, po té zatím již ustálené niveau osy horizontální a to v obou polohách (niveau odečítáno vždy pět minut po ustálení). Potom spuštěn Hippův chronograf spojený s Rieflerovými hodinami, jež jsou umístěny v severní straně mého tehdejšího pokoje ve věži.

K pozorováním není sice třeba absolutní znalosti časové, avšak za účelem pohodlného měření časových intervallů byl čas registrován.

Když objevila se očekávaná hvězda v zorném poli dalekohledu, byla sledována až protala střední vlákno horizontální, v kterémž momentu fixována pohyblivým vláknem vertikálním a současně dán signál časový, po té odečten mikrometr a současně uvedeny v činnost jemné šrouby pro vertikální pohyb, aby mohla hvězda znova passírovati střední vlákno horizontální a přikročeno k nové pointaci.

Pointace dály se zpravidla v bezprostřední blízkosti středního vlákna vertikálního a provedeno jich naznačeným způsobem často přes dvacet.

Ukázalo se však, že je lépe při výšce věže a tím ohrožované konstanci azimutu a sklonu nejvýše 10 pointací učiniti a za to zkrátiti časový intervall mezi oběma digressemi.

Pravidelně mohl již během pointací býti konstatován moment maximální digresse v azimutu a dbáno toho, aby pointace byly rozděleny asi symmetricky kol digresse, což počet redukční velmi usnadňuje.

Když hvězda propuštěna, signalisován čas a zastaven chronograf.

Pak znova odečteno 8 údajů kruhu azimutálního, za účelem eventuelního konstatování změny azimutu. Na konec odečteno znova niveau horizontální osy v obou polohách.

Potom namířen dalekohled na druhou korrespondující digressi a manipulováno zcela identicky.

Během celé pozorovací doby nebylo arciť dle tohoto schematu dvojic pozorováno. Jednak mnohdy některá z digressí nebyla měřena př. pro

změnu počasí, selhání chronografu a p., jednak často arranžováno měření serie digressí na jedné a druhé serie digressí na opačné straně meridiánu za supposice konstance azimutu aspoň na dobu dvou hodin (srv. § 1 schema ad *A*), *B*)).

Poslednější způsob byl oprávněn zvláště v době podzimní, kdy počasí bylo velmi stálé a temperatura v noci téměř konstantní.

Často podniknuta různá změna obou způsobů, abych se mohl přidržeti za každou cenu fundamentálních posic Berlin. Jahrbuchu.

Také jsem činil pokusy s měřením bez vertikálního jemného pohybu dalekohledu za kterýmž účelem nutno ovšem určiti sklon vertikálního pohyblivého vlákna k horizontu. Již klid dalekohledu garantuje tu skvělý výsledek. Takto provedena pozorování 3. a 6. června, při čemž, aby sklon nemusil býti určován, omezil jsem se na 2 až 3 pointace maxima v blízkosti bisekce středních vláken, zvětšení užité bylo tu menší, aby se rychleji dal konstatovati moment digresse. Mimo to experimentoval jsem ve dnech 1.—10. srpna s přeložením během digresse, kteréž při jiných měřeních doporučují hlavně astronomové Harzer a Struve.

Když hvězda očekávaná objevila se v zorném poli, učiněno několik pointací, pak stroj opatrně přeložen v čepech, dalekohled proložen na původní výšku, hvězda znova vyhledána pomocí jemných vertikálních šroubů a dále pointacemi sledována. V případě našem manipulace tato neosvědčila se lépe nežli prvá, neboť se někdy daly konstatovati malé posuvy v azimutu nebo sklonu.

Obé hlásí se též nespolehlivým určením kollimace, která ostatně najde se vždy s menší jistotou nežli šířka.

Proti způsobu mluví dále delší počet redukční, ježto začasté moment digresse překládáním se ztratí, takže se pointují vlastně jen dva konce digressního oblouku.

Pozorování hvězdy polární a azimutů mír. § 3. Určení instrumentálných konstant.

Při pozorování užíváno dvou různých zvětšení, jichž hodnoty určeny dynametrem as na 100, 150. V okolí zenitu užito okuláru lomeného.

Veliká péče věnována měření a kontrollám sklonu osy horizontální, tento byl při své nestálosti jistě jedním z hlavních, ne-li jediným zdrojem chyb, přecházeje celou svou hodnotou do výsledku.

Od počátku až do 22. července užíváno libelly starší poněkud méně citlivé.

Prof. Becker objednal pak novou libellu, která užívána až do konce pozorovací řady.

Citlivost libell zkoumána pokud možno při různých temperaturách na zkoumacím stolku menšího meridianního sálu a nalezeny tu mnohými pokusy hodnoty jednoho dílce, pro starší niveau $1^p = 1{\cdot}39''$, pro novější $1^p = 1{\cdot}24''$.

Hodnota jedné otočky šroubu azimutálního mikrometru měřena resp. kontrollována průchody meridianními hvězd pólu blízkých.

Za tím účelem upevněn stroj as na 10 večerů 19. srpna—13. září v rovině meridiánu a pozorovány průchody vertikálním systémem vláken.

Když nalezeny distance vláken, navázány na ně distance šroubové pohyby z obou stran. Míněná postavení vlákna pohyblivého na obě strany vlákna pevného prováděna celkem pro 5 vláken určitě v systému vyvolených.

Takto konstatována pro jednu otočku šroubovou dostatečná pravděpodobnost starší hodnoty Schurovy (l. c. Astr. Nachr. 2857—18) a přijato $1^R = 58{\cdot}000''$.

Ostatně měření tak arranžována, že k platnosti přišel obyčejně jenom menší díl jedné šroubové otočky v bezprostřední blízkosti vlákna středního, i stačilo pak znáti přijatou hodnotu jen as na $0{\cdot}1''$ (srv. diskussi výsledků § 4.).

K určení vláknových distancí užito polárných hvězd:

α Ursae minoris
51 *H* Cephei
I *H* Draconis
30 *H* Camelopardalis
δ Ursae
λ Ursae
76 Draconis.

Za účelem určení kollimace pozorována často jednak hvězda polární v různých azimutech s přeložením během pozorování, jednak určena tato z digressních azimutů s přeložením během digresse ve dnech 1. až 10. srpna.

I bylo nalezeno $+ 2{\cdot}73''$ vztaženo na konec osy, kde umístěn dalekohled, jakožto střed, který po celou dobu stačilo bráti za konstantní.

Azimuty mír navázány na azimuty hvězdy polární.

Runn mikroskopů určován často a navázán asi na 200 dílců azimutálního kruhu, různě po obvodu rozložených.

Hodnota jeho zanedbána tím spíše, že na měření šířková přechází dle našeho arrangementu pozorování jen asi $^1/_4$.

Za korrekci sklonu následkem nerovnosti čepů, vztaženého na konec osy, kde umístěn dalekohled, přijato v souhlase se starší hodnotou (Courvoisier) $+ 0{\cdot}11''$.

Z journalu pozorovacího vynímám následující poznámky:

Měsíc květen byl počasí velmi nestálého, takže k vlastnímu programu nemohlo býti přikročeno. Též nebyly všechny kroky přípravné skončeny. Některé části stroje byly rozebrány za účelem čistění mechanikem.

Tak zejména čistil jsem zároveň s mechanikem hvězdárny v prvních dnech měsíce května šroub mikrometrický a vlákna zorného pole pečlivě zbavována prachu. V několika dnech prováděno, pokud možno při různých temperaturách, měření „jednoho dílce" libelly horizontální osy stroje na zkoušecím stolku menšího sálu průchodního. V jiných několika dnech určován „runn" mikroskopů, dále prováděno nivellování stroje.

Konečně použito asi dvou večerů koncem května k přesnému fokusování na hvězdě α Ursae Minoris. Zvětšení užitá určována dynametrem.

V červnu přikročeno ku vhodné volbě a nacvičení manipulace „měření v digressi" a k vlastním pozorováním programovým:

2. června. Pokusy měření azimutů v digressi s dalekohledem v klidu.
3. června *FR.* Digressní azimuty, dalekohled v klidu.
6. „ *FL.* D. a.
8. „ *FR.* D. a., pozorování zmařeno mraky.
10. „ *FR.* D. a., pozorování zmařeno mraky.
11. „ *FR. FL.* Digressní azimuty, serie, dalekohled v pohybu.
13. „ *FL.* Pozorování zmařeno mraky.
14. „ *FL.* Jediná digresse, zmařena mraky.
15. „ *FR.* Serie digressních azimutů.
16. „ *FL.* D. a.
17. „ *FR.* Jedna digresse, další zmařeno mraky.
25. „ *FR.* Serie digressních azimutů.
26. „ *FL.* D. a.
27. „ *FR.* D. a.
28. „ *FL.* D. a.
29. „ *FR.* D. a.
30. „ *FL.* Dvě digresse na téže východní straně meridiánu, ostatní zmařeny počasím.

1. července *FR.* D. a.
2. „ *FR.* D. a.
4. „ *FL.* D. a.
5. „ *FR.* Azimuty digressní, dále azimuty hvězdy polární a mír.
6. „ *FR.* Azimuty polárky a mír.
10. „ *FR.* Jedna digresse, další pozorování počasím zmařeno.
11. „ *FR.* Serie digressních azimutů.
13. „ *FR.* D. a.
14. „ *FL.* D. a.

15. července *FR.* Jediná digresse, další pozorování zmařena mraky. Korrigování polohy mikroskopů.
18. „ Azimuty polárky a mír.
22. „ *FR.* Serie digressních azimutů. Polaris a míry.
23. „ *FL.* Azimuty polárky a mír za dne, v noci digressní azimuty.
24. „ *FR.* Azimuty hvězdy polární a mír za dne, v noci digressní azimuty.
25. „ *FL.* Serie digressních azimutů, ku konci pozorování digresse hvězdy polární s přeložením během digresse za účelem určení kollimace.
26. „ Jediná digresse a i ta zmařena počasím.
27. „ *FR.* Azimuty digressní. Digresse hvězdy polární a azimuty mír.
28. „ Digresse polárky a azimuty mír.
29. „ Měření „jednoho dílce“ libelly Heydeho nově objednané a užívané od 22. července, v menším sále průchodním.
30. „ *FL.* Serie digressních azimutů.

1. srpna. Serie digressních azimutů s přeložením během digresse
2. „ Digressní azimuty s přeložením.
3. „ D. a. s přeložením.
4. „ D. a. s přeložením.
10. „ Určování nerovnosti čepů. V noci d. a. s přeložením.
12. „ Za dne. Různá zkoumání azimutálního kruhu a jeho excentricity.
16. „ Různé experimenty s měřením digressních azimutů hvězd velice blízkých zenitu.
17. „ Vyšetřování dělení kruhu azimutálního (za dne).
18. „ *FR.* Ve dne runn mikroskopů.
V noci digressní azimuty a azimuty mír.
19. „ Stroj po mnohých pokusech upevněn v meridiánu a pozorovány meridianní průchody, jednak hvězd časových, jednak polárných za účelem určení resp. kontrolly různých konstant stroje, zejména otočky mikrometru.
20. „
21. „
24. „
26. „
31. „ } Průchody meridiánní.

5. září.		
6. ,,		Průchody meridiánní.
7. ,,		
9. ,,		Určování resp. kontrolly jedné otočky šroubové za
10. ,,		dne (z distancí vláken pevných).
13. ,,		Průchody meridiannové.
14. ,,	*FR.*	Serie digressních azimutů.
15. ,,	*FL.*	D. a.
16. ,,	*FL.*	D. a.

FR. značí resp. „dalekohled v pravo“ v dalším poloha I.
FL. značí resp. „dalekohled v levo“ v dalším poloha II.

Do programmu měření šířkových pojaty byly následující deklinace náležející vesměs fundamentálnímu katalogu B. J.

Jméno	velikost	α 1908,0	δ 1908,0	Pramen
γ Cassiopeiae	2·0	$0^h\ 51^m\ 8^s847$	+ 60° 13′ 7·25″	B. J. 1908 [32]
55 Cassiopeiae	6·3	2 7 14·966	+ 66° 5′ 37·13	[76]
5 H. Camelop.	4·5	3 40 37·858	+ 71° 2′ 58·78″	[138]
I Hev. Draconis	4·3	9 24 2·318	+ 81° 44′ 2·27″	[*Ne*] p. 175
γ Ursae maj.	2·3	11 48 59·772	+ 54° 12′ 22·54″	[447]
76 Ursae maj.	6·2	12 37 32·986	+ 63° 13′ 5·05″	[478]
ζ Ursae maj. pr.	2·2	13 20 13·398	+ 55° 24′ 20·28″	[497]
η Ursae maj.	1·8	13 43 55·020	+ 49° 46′ 19·89″	[509]
Grombridge 2164	5·8	14 49 6·200	+ 59° 40′ 3·30″	[549]
I. H. Ursae min.	5·3	15 13 34·723	+ 67° 41′ 45·38″	[565]
ι Draconis	3·2	15 22 52·898	+ 59° 17′ 17·23″	[571]
η Draconis	2·7	16 22 44·558	+ 61° 43′ 20·33″	[615]
Grombridge 2377	4·9	16 43 33·044	+ 56° 56′ 45·54″	[627]
ζ Draconis	3·0	17 8 31·098	+ 65° 49′ 40·40″	[639]
β Draconis	2·7	17 28 21·209	+ 52° 22′ 9·09″	[653]
ξ Draconis	3·6	17 51 56·271	+ 56° 53′ 12·67″	[671]
γ Draconis	2·3	17 54 28·174	+ 51° 29′ 57·78″	[676]
ϑ Cygni	4·5	19 33 58·463	+ 50° 0′ 27·53″	[738]
ϑ Cephei	4·1	20 28 2·379	+ 62° 41′ 4·81″	[767]
η Cephei	3·5	20 43 25·220	+ 61° 28′ 52·32″	[783]
76 Draconis	6·0	20 49 17·847	+ 82° 11′ 28·42″	[*Nk*] p. 175
α Cephei	2·5	21 16 23·060	+ 62° 11′ 43·96″	[803]
3 Lacertae	4·5	22 19 56·404	+ 51° 46′ 4·22″	[844]
ι Cephei	3·5	22 46 24·133	+ 65° 42′ 58·95″	[865]

Seznam měřených azimutů.

Datum	Čís.	Hvězda	Čtení azimutálního kruhu	Sklon udaný v dílcích	Azimutální hodnota šroubu v obloukových sekundách	Počet vláknových pointací	Poloha	Poznámka
3. VI.	1	η Ursae *W*	102° 33′ 12·30″	+ 1·75	— 83·99″	2	I	
	2	β Draconis *O*	247° 22′ 40·82″	— 0·70	— 1·98	2	I	
6. VI.	3	γ Ursae *W*	117° 53′ 35·91″	— 0·70	— 94·83	2	II	
	4	η Ursae *W*	102° 32′ 53·69″	+ 0·25	— 110·84	2	II	
	5	β Draconis *O*	247° 23′ 1·18″	+ 0·13	— 68·93	2	II	
	6	γ Draconis *O*	250° 12′ 59·16″	+ 3·21	+ 24·94	2	II	
11. VI.	7	ζ Ursae *O*	239° 7′ 41·35″	+ 1·09	— 33·57	18	I	
	8	γ Ursae *W*	117° 53′ 23·14″	— 2·65	— 45·57	2	I	
	9	η Ursae *W*	102° 32′ 28·14″	— 2·70	— 11·51	17	I	
	10	β Draconis *O*	247° 23′ 4·74″	+ 2·10	— 70·53	2	II	Sklon jen v jedné poloze určen nejistý
	11	γ Draconis *O*	250° 12′ 53·62″	+ 3·49	+ 47·30	19	II	
	12	ι Draconis *W*	129° 28′ 46·41″	— 5·06	— 18·97	18	II	
15. VI.	13	γ Ursae *W*	117° 53′ 34·13″	+ 0·11	— 69·51	27	I	
	14	η Ursae *W*	102° 32′ 55·95″	+ 0·50	— 54·78	2	I	Niveau pohyblivé nejisté zvl. ad 15)
	15	γ Draconis *O*	250° 12′ 48·92″	+ 0·34	+ 67·60	25	I	
16. VI	16	γ Ursae *W*	117° 53′ 33·76″	+ 2·20	— 89·13	15	II	
	17	η Ursae *W*	102° 32′ 56·27″	+ 2·04	— 101·21	19	II	
	18	β Draconis *O*	247° 23′ 4·02″	+ 1·38	— 73·19	29	II	
	19	γ Draconis *O*	250° 12′ 54·17″	+ 3·01	+ 42·16	27	II	

Datum	Čís.	Hvězda	Čtení azimutálního kruhu	Sklon udaný v dílcích	Azimutální hodnota šroubu v obloukových sekundách	Počet vláknových pointací	Poloha	Poznámka
25 VI.	20	η Ursae *O*	257° 29′ 30·94″	+ 3·15	— 62·96″	16	I	
	21	γ Ursae *W*	117° 52′ 55·19″	+ 0·05	— 32·58	18	I	
	22	η Ursae *W*	102° 32′ 48·67″	— 0·16	— 38·04	18	I	
	23	β Draconis *O*	247° 23′ 2·44″	+ 3·82	— 72·17	16	I	
	24	ζ Ursae *W*	120° 53′ 50·92″	+ 0·14	— 13·15	19	I	
	25	γ Draconis *O*	250° 13′ 31·30″	+ 3·98	— 1·53	18	I	
	26	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 51·06″	— 0·04	— 0·41	27	I	
	27	ϑ Cygni *O*	256° 19′ 18·67″	+ 4·55	— 86·17	25	I	
26. VI.	28	η Ursae *O*	257° 29′ 45·60″	+ 2·29	— 90·68	22	II	
	29	η Ursae *W*	102° 32′ 51·20″	+ 1·12	— 83·57	23	II	
	30	β Draconis *O*	247° 22′ 50·08″	+ 3·52	— 75·49	22	II	
	31	γ Draconis *O*	250° 12′ 57·34″	+ 3·47	+ 21·32	24	II	
	32	ι Draconis *W*	129° 28′ 28·07″	+ 1·00	— 9·39	19	II	
27. VI.	33	η Ursae *O*	257° 39′ 33·06″	+ 2·79	— 10·55$_{11}$	2	I	
	34	γ Ursae *W*	117° 53′ 35·96″	+ 1·80	— 83·68	18	I	
	35	η Ursae *W*	102° 32′ 35·67″	+ 1·56	— 43·41	20	I	
	36	β Draconis *O*	247° 23′ 15·87″	+ 2·85	— 81·27	16	I	
	37	γ Draconis *O*	250° 12′ 58·76″	+ 2·45	+ 41·88	20	I	
28. VI	38	η Ursae *W*	102° 32′ 41·64″	+ 1·01	— 75·53	18	II	
	39	β Draconis *O*	247° 22′ 35·89″	+ 2·80	— 61·30	23	II	
	40	γ Draconis *O*	250° 13′ 18·40″	+ 3·51	— 0·23	23	II	
	41	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 48·61″	+ 1·27	— 10·31	20	II	
29. VI.	42	β Draconis *O*	247° 12′ 52·49″	+ 2·12	— 58·06	2	I	
	43	γ Draconis *O*	250° 12′ 52·64″	+ 2·22	+ 45·72	25	I	
	44	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 49·77″	+ 1·41	— 0·75	26	I	

30 VI.	45	γ Draconis *O*	250° 12′ 58·23″	+ 2·35	+ 25·77	21	II
	46	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 29·61″	+ 4·51	+ 2·82	24	II
1. VII.	47	β Draconis *O*	247° 22′ 57·33″	+ 2·11	— 66·58″	2	I
	48	γ Draconis *O*	250° 13′ 16·71″	+ 2·40	+ 15·14	2	I
2. VII.	49	η Ursae *W*	102° 32′ 51·38″	+ 1·66	— 87·05	19	I
	50	β Draconis *O*	247° 23′ 10·57″	+ 1·24	— 108·94	21	I
	51	76 Ursae *W*	137° 5′ 44·12″	+ 1·11	— 87·67	20	I
	52	α Cephei *O*	224° 51′ 25·50″	+ 1·30	— 60·56	21	I
4. VII.	53	I. Hev. Draconis *W*	167° 28′ 17·84″	+ 1·10	— 88·53	17	II
	54	76 Draconis *O*	191° 52′ 11·19″	+ 1·19	— 71·33	17	II
	55	76 Ursae *W*	137° 6′ 4·01″	— 0·51	— 111·93	19	II
	56	α Cephei *O*	224° 51′ 34·23″	+ 1·19	— 80·18	15	II
5. VII.	57	76 Ursae *W*	137° 51′ 61·16″	+ 0·56	— 102·06	21	I
	58	α Cephei *O*	224° 51′ 37·07″	+ 0·51	— 72·73	16	I
11. VII.	59	β Draconis *O*	247° 22′ 51·05″	+ 3·32	— 102·82	20	I
	60	γ Draconis *O*	250° 12′ 56·67″	+ 3·11	— 0·70	11	I
	61	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 55·54″	+ 2·06	— 33·86	18	I
	62	ι Draconis *W*	129° 28′ 41·40″	+ 1·77	— 38·31	20	I
13. VII.	63	β Draconis *O*	247° 23′ 14·36″	+ 4·59	— 155·72	22	II
	64	γ Draconis *O*	250° 13′ 4·01″	+ 4·89	— 43·02	12	II
	65	α Cephei *O*	224° 51′ 25·12″	+ 4·50	— 84·87	15	II
	66	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 44·71″	— 0·05	— 27·33	14	II
	67	ι Draconis *W*	129° 28′ 37·22″	— 0·06	— 37·77	15	II
14. VII.	68	76 Ursae *W*	137° 6′ 6·81″	+ 0·14	— 115·73″	23	II
	69	α Cephei *O*	224° 51′ 33·64″	+ 2·94	— 89·62	15	II

Datum	Čís.	Hvězda	Čtení azimutálního kruhu	Sklon udaný v dílcích	Azimutální hodnota šroubu v obloukových sekundách	Počet vláknových pointací	Poloha	Poznámka
22. VII.	70	76 Ursae *W*	137° 6′ 20·39″	+ 1·28	— 102·70	18	I	
	71	α Cephei *O*	224° 51′ 43·11″	— 0·47	— 67·53	12	I	
	72	ϑ Cygni *O*	256° 19′ 27·69″	+ 2·60	— 132·06	15	I	
	73	β Draconis *W*	112° 39′ 51·06″	— 0·43	— 43·03	25	I	
23. VII.	74	76 Ursae maj. *W*	137° 6′ 14·44″	+ 3·24	— 109·49	20	II	
	75	α Cephei *O*	224° 51′ 39·39″	+ 0·31	— 75·20	27	II	
24. VII.	76	α Cephei *O*	224° 51′ 42·67″	— 0·39	— 67·96	19	I	
	77	ϑ Cygni *O*	256° 19′ 23·15″	— 0·94	— 111·54	16	I	
	78	β Draconis *W*	112° 39′ 47·00″	+ 3·39	— 54·44	31	I	
25. VII.	79	β Draconis *O*	247° 23′ 23·34″	— 1·15	— 128·02	30	II	
	80	76 Ursae *W*	137° 5′ 47·44″	+ 5·95	— 88·93	18	II	Čtení kruhu (81) je středem ze dvou mikroskopů, jinak byla by nutná conjektura.
	81	α Cephei *O*	224° 51′ 46·22″	— 0·10	— 82·02	28	II	
	82	ι Draconis *W*	129° 28′ 42·01″	+ 5·38	— 29·89	37	II	
27. VII.	83	Grombridge 2164 *W*	130° 14′ 50·97″	+ 7·20	— 26·28	36	I	
	84	ϑ Cygni *O*	256° 19′ 18·30″	— 2·35	— 116·52	13	I	Elongace 85 udála se právě pod středním vláknem, pointace odhadovány dle tloušťky vlákna.
30. VII.	85	η Cephei *O*	226° 11′ 52·90″	+ 0·62	0·00	8	II	
	86	α Cephei *O*	224° 51′ 37·77″	+ 0·70	— 69·85	37	II	
	87	ι Cephei *O*	218° 26′ 40·07″	— 2·80	+ 3·82	12	II	
	88	η Draconis *W*	134° 16′ 35·85″	+ 3·76	— 12·39	31	II	
1. VIII.	89	ϑ Cephei *O*	223° 55′ 26·09″	— 1·43	+ 2·54	7 + 6	I II	
	90	α Cephei *O*	224° 51′ 38·09″	— 0·65	— 63·11	7 + 6	I II	

	91	ι Draconis *W*	129° 28′ 49·48″	+ 0·90	— 12·80	7 + 11	II I
	92	β Draconis *W*	112° 39′ 31·44″	+ 1·78	— 27·97	8 + 9	I II
	93	3 Lacertae *O*	249° 20′ 3·20″	— 0·55	— 19·27	6 + 6	II I
2. VIII.	94	ϑ Cephei *O*	223° 55′ 16·40″	— 1·00	+ 12·15	10 + 6	I II
	95	α Cephei *O*	224° 51′ 38·99″	— 0·66	— 63·42	6 + 15	II I
	96	ι Draconis *W*	129° 28′ 25·16″	+ 0·45	+ 11·47	6 + 9	I II
3. VIII.	97	α Cephei *O*	224° 51′ 13·56″	— 2·05	— 36·63	6 + 10	II I
	98	ι Draconis *W*	129° 28′ 45·06″	+ 0·41	— 9·12	6 + 10	I II
	99	β Draconis *W*	112° 39′ 45·60″	+ 1·09	— 37·31	11 + 6	II I
	100	3 Lacertae *O*	249° 19′ 3·80″	— 0·70	— 19·90	9 + 6	I II
4. VIII.	101	α Cephei *O*	224° 51′ 43·52″	— 1·86	— 67·62	9 + 6	II I
	102	β Draconis *W*	112° 39′ 38·07″	— 2·26	— 31·60	7 + 13	I II
10. VIII.	103	ι Draconis *W*	129° 28′ 26·18″	+ 3·13	+ 6·05	9 + 6	II I
	104	β Draconis *W*	112° 39′ 23·05″	+ 2·70	— 17·01	13 + 6	I II
18. VIII.	105	α Cephei *O*	224° 51′ 2·49″	+ 2·88	— 39·07	25	I
	106	Grombridge 2377 *W*	124° 29′ 43·67″	+ 1·96	— 56·76	13	I
14. IX.	107	I. H. Ursae min. *W*	145° 0′ 11·44″	+ 2·23	+ 3·84	13	I
	108	η Draconis *W*	134° 16′ 38·99″	+ 2·01	+ 6·81	15	I
	109	ξ Draconis *W*	124° 20′ 53·64″	+ 1·94	+ 5·32	14	I
	110	ζ Draconis *W*	141° 46′ 39·43″	+ 1·86	— 10·84	15	I
	111	γ Cassiopeiae *O*	228° 39′ 31·47″	+ 0·05	+ 32·86	17	I
	112	55 Cassiopeiae *O*	217° 47′ 15·45″	— 0·20	— 4·49	21	I
	113	5 H. Camelop. *O*	209° 24′ 29·02″	— 0·28	+ 17·30	14 + (7)	I
15. IX.	114	ζ Draconis *W*	141° 46′ 19·17″	— 0·38	— 4·02	16	II
	115	γ Cassiopeiae *O*	228° 39′ 39·64″	— 0·94	+ 10·72	3	II
16. IX.	116	ζ Draconis *W*	141° 46′ 35·11″	— 0·12	— 19·47	11	II
	117	γ Cassiopeiae *O*	228° 39′ 40·84″	— 1·60	+ 8·92	11 + (7)	II

Datum	Kombinace	Podmínečná rovnice pro c red. na 3″	ΔR	Δa	Mezidoba h m	Váha	Poznámka	$d\varphi$
3. VI.	(1) (2)	$7{\cdot}821\,d\varphi = 2{\cdot}213\,c - 7{\cdot}63''$	+ 0·3	− 2·45	0 42			— 0·13″
6. VI.	(3) (5)	$4{\cdot}862\,d\varphi = 0{\cdot}487\,c + 0{\cdot}68''$	+ 0·2	+ 2·22	1 22			+ 0·44″
	(4) (5)	$7{\cdot}821\,d\varphi = -2{\cdot}213\,c + 13{\cdot}43''$	— 0·0	+ 1·27	0 42			+ 0·87″
	(4) (6)	$8{\cdot}256\,d\varphi = 0{\cdot}386\,c + 3{\cdot}51''$	+ 0·5	+ 2·96	1 22			+ 0·57″
11. VI.	(7) (8)	$4{\cdot}039\,d\varphi = +0{\cdot}200\,c - 6{\cdot}00''$	+ 0·5	+ 3·74	3 24	½	Intervally poněkud delší	— 1·34″
	(7) (9)	$6{\cdot}998\,d\varphi = +2{\cdot}900\,c - 11{\cdot}58''$	— 0·2	+ 3·78	4 04	½	obě elongace na téže straně meridiánu, srv. § 4 ad c), váha θ, jinak vypadlo by pozorování (8) vzhledem ke znamení koefficientu $d\varphi$.	— 0·41″
	(8) (9)	$2{\cdot}959\,d\varphi = +2{\cdot}700\,c - 6''33''$	— 0·3	+ 0·05	0 40	θ		+ 0·60″
	(10) (12)	$4{\cdot}095\,d\varphi = 1{\cdot}066\,c + 0{\cdot}49''$	— 0·2	+ 1·76	3 02	½	srv. poznámku ad (10)	+ 0·90″
	(11) (12)	$4{\cdot}530\,d\varphi = 1{\cdot}452\,c + 4{\cdot}94''$	+ 0·4	+ 8·55	2 20			+ 2·04″
15. VI.	(13) (15)	$5{\cdot}297\,d\varphi = -0{\cdot}873\,c - 5{\cdot}41''$	+ 0·8	+ 0·23	2 02	½	srv. pozn. ad (15)	— 1·51″
	(14) (15)	$8{\cdot}256\,d\varphi = 1{\cdot}827\,c - 14''15''$	+ 0·5	— 0·16	1 22	½		— 1·05″
16. VI.	(16) (18)	$4{\cdot}862\,d\varphi = +0{\cdot}487\,c - 3{\cdot}58''$	+ 0·2	— 0·82	1 22			— 0·44″
	(17) (18)	$7{\cdot}821\,d\varphi = -2{\cdot}213\,c + 6{\cdot}39''$	— 0·1	— 0·66	0 42			— 0·03″
	(17) (19)	$8{\cdot}256\,d\varphi = -1{\cdot}827\,c + 6{\cdot}96''$	+ 0·1	+ 0·97	1 22			+ 0·18″
25. VI.	(20) (21)	$7{\cdot}247\,d\varphi = -2{\cdot}700\,c + 3{\cdot}50''$	0·0	+ 3·10	1 32			— 0·63″
	(22) (23)	$7{\cdot}821\,d\varphi = +2{\cdot}213\,c - 9{\cdot}78''$	— 0·3	+ 3·98	0 42			— 0·40″
	(23) (24)	$4{\cdot}613\,d\varphi = -0{\cdot}687\,c + 3{\cdot}77''$	— 0·3	+ 3·68	0 22			+ 0·37″
	(24) (25)	$5{\cdot}048\,d\varphi = -1{\cdot}073\,c - 1{\cdot}76''$	+ 0·1	+ 3·84	0 18			— 0·99″
	(25) (26)	$4{\cdot}492\,d\varphi = -1{\cdot}477\,c - 0{\cdot}12''$	0·0	+ 4·02	1 51			— 1·01″
	(26) (27)	$5{\cdot}988\,d\varphi = -2{\cdot}867\,c + 15{\cdot}33''$	— 0·3	+ 4·59	0 19			+ 1·12″
26. VI.	(28) (29)	$10{\cdot}206\,d\varphi = 0 + 2{\cdot}15''$	0·0	+ 1·17	2 12			+ 0·21″
	(29) (30)	$7{\cdot}821\,d\varphi = -2{\cdot}213\,c + 8{\cdot}25''$	— 0·1	+ 2·40	0 42			+ 0·21″
	(31) (32)	$4{\cdot}530\,d\varphi = 1{\cdot}452\,c - 1{\cdot}63''$	+ 0·2	— 0·98	2 21			+ 0·60″

27. VI.	(33) (34)	$7{\cdot}247\, d\varphi = -2{\cdot}700\, c + 13{\cdot}38''$	$-1{\cdot}6$	$+0{\cdot}99$	1	32				$+0{\cdot}73''$
	(35) (36)	$7{\cdot}821\, d\varphi = 2{\cdot}213\, c - 0{\cdot}72''$	$-0{\cdot}3$	$+1{\cdot}29$	0	42				$+0{\cdot}76''$
	(35) (37)	$8{\cdot}256\, d\varphi = 1{\cdot}827\, c - 2{\cdot}37''$	$+0{\cdot}3$	$+0{\cdot}89$	1	22				$+0{\cdot}38''$
28. VI.	(38) (39)	$7{\cdot}821\, d\varphi = -2{\cdot}213\, c + 10{\cdot}51''$	$-0{\cdot}1$	$+1{\cdot}79$	0	42				$+0{\cdot}49''$
	(40) (41)	$4{\cdot}492\, d\varphi = +1{\cdot}477\, c - 0{\cdot}24''$	$+0{\cdot}1$	$+2{\cdot}24$	1	47				$+0{\cdot}93''$
29. VI.	(42) (44)	$4{\cdot}057\, d\varphi = -1{\cdot}090\, c + 5{\cdot}88''$	$-1{\cdot}0$	$+0{\cdot}71$	2	27				$+0{\cdot}64''$
	(43) (44)	$4{\cdot}492\, d\varphi = -1{\cdot}477\, c + 4{\cdot}23''$	$+0{\cdot}2$	$+0{\cdot}81$	1	47				$-0{\cdot}04''$
30. VI.	(45) (46)	$4{\cdot}492\, d\varphi = +1{\cdot}477\, c + 0{\cdot}80''$	$+0{\cdot}5$	$-2{\cdot}16$	1	47				$+1{\cdot}16''$
1. VII.	(47) (44)	$4{\cdot}057\, d\varphi = -1{\cdot}090\, c + 5{\cdot}69''$	$-0{\cdot}4$	$+0{\cdot}70$	0	40		azimut (47) navázán určením indexové chyby pomocí (48) na (44)		$+0{\cdot}60''$
2. VII.	(49) (50)	$7{\cdot}821\, d\varphi = 2{\cdot}212\, c - 8{\cdot}82''$	$-0{\cdot}3$	$-0{\cdot}42$	0	42				$-0{\cdot}28''$
	(50) (51)	$3{\cdot}772\, d\varphi = -1{\cdot}268\, c + 2{\cdot}56''$	$+0{\cdot}2$	$+0{\cdot}13$	0	35				$-0{\cdot}33''$
	(51) (52)	$2{\cdot}236\, d\varphi = -0{\cdot}043\, c + 2{\cdot}98''$	$+0{\cdot}3$	$+0{\cdot}19$	1	25				$+1{\cdot}27''$
4. VII.	(53) (54)	$0{\cdot}490\, d\varphi = -0{\cdot}032\, c - 0{\cdot}31''$	$+0{\cdot}2$	$+0{\cdot}09$	0	39	½	koefficient šířky nedopouští spolehlivého určení		$-0{\cdot}84''$
	(55) (56)	$2{\cdot}181\, d\varphi = +0{\cdot}043\, c + 0{\cdot}64''$	$+0{\cdot}3$	$+1{\cdot}70$	1	25				$+0{\cdot}35''$
5. VII.	(57) (58)	$2{\cdot}236\, d\varphi = -0{\cdot}043\, c + 0{\cdot}87''$	$+0{\cdot}3$	$-0{\cdot}05$	1	25				$+0{\cdot}33''$
11. VII.	(59) (61)	$4{\cdot}057\, d\varphi = -1{\cdot}091\, c + 3{\cdot}53''$	$-0{\cdot}3$	$+1{\cdot}26$	2	31				$+0{\cdot}06''$
	(60) (61)	$4{\cdot}492\, d\varphi = -1{\cdot}477\, c + 7{\cdot}00''$	$+0{\cdot}3$	$+1{\cdot}05$	1	51				$+0{\cdot}57''$
	(60) (62)	$4{\cdot}530\, d\varphi = -1{\cdot}452\, c + 8{\cdot}93''$	$+0{\cdot}3$	$+1{\cdot}34$	2	21				$+1{\cdot}01''$
13. VII.	(63) (66)	$4{\cdot}057\, d\varphi = +1{\cdot}091\, c - 8{\cdot}51''$	$-0{\cdot}6$	$+4{\cdot}64$	2	31	½	srv. § **4.** ad *c*)		$-1{\cdot}29''$
	(64) (66)	$4{\cdot}492\, d\varphi = +1{\cdot}477\, c - 7{\cdot}16''$	$+0{\cdot}02$	$+4{\cdot}94$	1	51				$-0{\cdot}61''$
	(65) (66)	$2{\cdot}457\, d\varphi = -0{\cdot}134\, c - 1{\cdot}19''$	$-0{\cdot}52$	$+4{\cdot}55$	0	20				$-0{\cdot}65''$
	(65) (67)	$2{\cdot}494\, d\varphi = -0{\cdot}159\, c - 0{\cdot}63''$	$-0{\cdot}44$	$+4{\cdot}56$	0	50				$-0{\cdot}45''$
14. VII.	(68) (69)	$2{\cdot}181\, d\varphi = +0{\cdot}043\, c - 0{\cdot}54''$	$+0{\cdot}24$	$+2{\cdot}80$	1	25				$-0{\cdot}19''$
22. VII.	(70) (71)	$2{\cdot}181\, d\varphi = -0{\cdot}043\, c - 1{\cdot}31''$	$+0{\cdot}5$	$-1{\cdot}75$	1	25				$-0{\cdot}66''$
	(72) (73)	$7{\cdot}367\, d\varphi = -1{\cdot}776\, c + 5{\cdot}67''$	$-0{\cdot}2$	$+3{\cdot}03$	1	03				$+0{\cdot}05''$
23. VII.	(74) (75)	$2{\cdot}181\, d\varphi = +0{\cdot}043\, c - 1{\cdot}55''$	$+0{\cdot}3$	$-2{\cdot}93$	1	25				$-0{\cdot}65''$
24. VII.	(76) (78)	$3{\cdot}845\, d\varphi = +1{\cdot}225\, c - 7{\cdot}23''$	$-0{\cdot}3$	$-3{\cdot}78$	1	41				$-0{\cdot}92''$
	(77) (78)	$7{\cdot}367\, d\varphi = -1{\cdot}778\, c + 6{\cdot}29''$	$-0{\cdot}1$	$-4{\cdot}33$	1	03				$+0{\cdot}13''$

Datum	Kombinace	Podmínečná rovnice pro c red. na 3″	ΔR	Δa	Mezidoba h	Mezidoba m	Váha	Poznámka	$d\varphi$
25. VII.	(79) (80)	$3{\cdot}772\,d\varphi = +1{\cdot}267\,c - 7{\cdot}22''$	+ 0·1	— 7·10	0	46			— 0·91″
	(81) (82)	$2{\cdot}504\,d\varphi = -0{\cdot}159\,c - 0{\cdot}90''$	— 0·5	— 5·48	0	50	½	srv. azimut (81)	— 0·55″
27. VII.	(83) (84)	$5{\cdot}988\,d\varphi = -2{\cdot}867\,c + 8{\cdot}37''$	— 0·6	— 9·55	0	19			— 0·04″
30. VII.	(85) (88)	$2{\cdot}345\,d\varphi = +0{\cdot}012\,c - 1{\cdot}42''$	+ 0·1	— 3·14	2	38	½	srv. azimut (85) a § 4 ad c)	— 0·59″
	(86) (88)	$2{\cdot}290\,d\varphi = -0{\cdot}021\,c - 0{\cdot}48''$	— 0·5	— 3·06	2	09			— 0·24″
	(87) (88)	$2{\cdot}063\,d\varphi = -0{\cdot}148\,c + 0{\cdot}74''$	+ 0·2	— 6·56	1	03			+ 0·15″
1. VIII.	(89) (91)	$2{\cdot}469\,d\varphi$	+ 0·1	— 2·33	1	42			— 0·78″
	(90) (91)	$2{\cdot}504\,d\varphi$	+ 0·1	— 1·55	0	50			— 0·38″
	(92) (93)	$7{\cdot}000\,d\varphi$	+ 0·2	— 2·33	1	08			0·00
2. VIII.	(94) (96)	$2{\cdot}469\,d\varphi$	+ 0·1	— 1·45	1	42			+ 0·45″
	(95) (96)	$2{\cdot}504\,d\varphi$	— 0·6	— 1·11	0	50			+ 0·78″
3. VIII.	(97) (98)	$2{\cdot}504\,d\varphi$	+ 0·1	— 2·46	0	50	½		+ 0·79″
	(99) (100)	$7{\cdot}000\,d\varphi$	+ 0·2	— 1·79	1	08			+ 0·04″
4. VIII.	(101) (102)	$3{\cdot}845\,d\varphi$	— 0·4	+ 0·40	1	41	½		— 0·99″
10. VIII.	(103) (104)	$1{\cdot}341\,d\varphi$	— 0·1	+ 0·43	0	51	½		— 0·39″
18. VIII.	(105) (106)	$2{\cdot}778\,d\varphi = +0{\cdot}353\,c - 4''76''$	0·0	+ 0·92	1	50	½	obě digresse na téže straně meridiánu, srv. § 4. od c)	— 1·33″
14. IX.	(107) (111)	$2{\cdot}082\,d\varphi = -0{\cdot}279\,c + 0{\cdot}51''$	+ 0·2	— 2·18	2	10			— 0·16″
	(108) (112)	$2{\cdot}042\,d\varphi = +0{\cdot}158\,c + 1{\cdot}17''$	— 0·1	— 2·21	2	16			+ 0·80″
	(109) (113)	$2{\cdot}298\,d\varphi = +0{\cdot}604\,c - 2{\cdot}34''$	+ 0·1	— 2·22	2	31			— 0·23″
	(108) (111)	$2{\cdot}451\,d\varphi = -0{\cdot}079\,c + 1{\cdot}15''$	+ 0·2	— 1·96	1	41			+ 0·37″
	(110) (111)	$2{\cdot}181\,d\varphi = -0{\cdot}230\,c - 1{\cdot}34''$	+ 0·4	— 1·81	0	27			— 0·93″
	(109) (112)	$2{\cdot}538\,d\varphi = +0{\cdot}496\,c - 1{\cdot}91''$	— 0·1	— 2·14	1	27			— 0·17″
	(109) (111)	$2{\cdot}947\,d\varphi = +0{\cdot}259\,c - 1{\cdot}93''$	— 0·3	— 1·89	0	52			— 0·39″
15. IX.	(114) (115)	$2{\cdot}182\,d\varphi = +0{\cdot}230\,c + 1{\cdot}42''$	+ 0·1	— 0·56	0	27			+ 0·97″
16. IX.	(116) (117)	$2{\cdot}182\,d\varphi = +0{\cdot}230\,c - 0{\cdot}07''$	+ 0·3	— 1·48	0	27			+ 0·28″

Význam jednotlivých sloupců nepotřebuje další poznámky, jenom pokud týká se kolumny ΔR a Δa. Tyto udávají rozdíl šroubu (v otočkách) a rozdíl sklonu (v „partes") a tím přibližný vliv šroubu a sklonu horizontální osy na příslušné měření $d\varphi$.

Výsledky jednotlivých měření šířkových udané sub $d\varphi$) jsou poněkud skresleny nejistotou menších změn kollimace a nejistotou chyb v kombinaci deklinační. Přes to je harmonie příslušných údajů dosti dobrá.

Diskusse výsledků pozorovacích a odvození pravděpodobné výšky pólu altazimutu (resp. meridianního kruhu) Strassburgské hvězdárny. § 4.

Především dlužno zmíniti se o způsobu redukce pozorování, jednak ku posouzení výsledků, jednak pro případ, kdyby se ukázalo nutným ať již z důvodů jakéhokoli — počty na základě udaných měření znova provésti.

Nepoměrně usnadněn byl počet supponovanou znalostí momentu digresse navázáním na čas kruhu meridianního. (Srv. konec § 1.)

Počet prováděn ve dvou etapách, v první přibližně užito jen 1 až 2 postavení šroubu, která vykazovala největší výchylku azimutu. Pak trvá redukce pozorování jen několik minut. Je radno redukce takové prováděti již během pozorovací doby ve dne, an se tak předejde často mnohým eventuelním nedopatřením na instrumentu.

Druhá etapa počtu redukuje všechny pointace na moment digresse.

Zdánlivá místa hvězd interpolována v deklinaci na 0·1″. Vliv aberrace denní bylo možno zanedbati (srv. § 1. ku konci), dále bylo možno z důvodů snadno pochopitelných vzíti zdánlivá místa pro epochu průchodu meridiánem.

Dále určeny konstanty jednotlivých hvězd (srv. § 1.) a podmínečných rovnic pro určení šířky.

Za šířku hypothetickou vzato $\varphi = 48^0\,35'\,1{\cdot}00''$, pomocí této určeny také kalkulem šestimístným azimuty digressní.

Potom přikročeno k redukcím jednotlivých pointací na azimut a moment digresse.

Počet byl pětimístný a prováděn až na veličiny druhého řádu incl.

Za konstanty instrumentální přijaty ony udané v § 3. K vůli pohodlí počtu čítána měřená difference šroubová místo od vlákna středního, od základní polohy „$16^R\,600$", která až na několik tisícin otočky se středním vláknem koincidovala. Tyto hodnoty šroubu stojí také v seznamu azimutů měřených.

Příslušné odchylky určovány zvláště za veder v červenci a srpnu den ze dne (pohyby vlákna z obou stran při namířeném dalekohledu proti modré obloze).

Runn a chyby dělení kruhu nebyly naneseny (srv. § 1.). Nepatrná jich hodnota redukuje se v našem případě průměrem as na $^1/_4$.

Za účelem úplné eliminace chyb děleného kruhu bylo by arci lépe omeziti se jenom na hvězdy zenitu velmi blízké, kde vliv míněný se až 10, 20 a vícekrát tlumí, ale v případě daném nestalo se tak, ježto jsem se chtěl za každou cenu přidržeti jenom hvězd fundamentálního katalogu Berl. Jahr.

Zmíniti jest se ještě o redukci pozorování ve dnech 1.—10. srpna „s přeložením během digresse".

Přeložení eliminuje kollimaci úplně, vezme-li se střed, na digressi v obou polohách redukovaných pointací, a tato hodnota se považuje za měřený azimut. Avšak tohoto způsobu nejjednodušší redukce nebylo užito. Mnohdy konstatovány během přeložení i nejpečlivějšího nepatrné posuvy v azimutu resp. náhlé změny sklonu. Jak z rozboru § 1. je patrno, určí se kollimace z měření azimutálných s přesností menší nežli šířka z naší rovnice differenciální.

I bylo čítáno tak, že *vzat střed z určení* kollimace, která plynula z veškerých oněch měření s přeložením, s touto hodnotou redukována měření v obou polohách, a z nich pak vzat střed.

Arrangement celé pozorovací řady řídilo se především výběrem hvězd fundamentálního katalogu B. Jahr. Z téže příčiny nebylo při měřeních přesně šetřeno principu dvojic resp. ideálního projektu ad *A*), *B*) § 1., nýbrž pozorování dle potřeby brzy v té, brzy v oné formě arranžována. Tak intervally mezi digressemi jsou něco delší, za to převládá všude velký počet pointací.

Aby bylo možno využiti všech azimutů vůbec měřených i těch, které př. nezdarem povětrnostním resp. jiným zůstaly lichými, bylo nutno při diskussi měření držeti se jistých racionelních pravidel, jež možno takto označiti.

Pro všechny různé kombinace digressí téhož večera mluvila by sice eliminace neznámých chyb deklinačních, avšak je lépe navazovati vždy dvě digresse, mezi nimiž co nejméně různých pohybů s dalekohledem provedeno.

Proto

a) navazovány vždy pokud možno jen dva sousední azimuty př. (33), (34),

b) resp. pojeny digresse nejvýše ob jednu př. (76), (78),

c) kde konečně bylo (k vůli zachránění osamělého azimutu) navázati dvě digresse ob dva azimuty př. (63), (66) resp. dvě digresse na téže straně meridiánu př. (105), (106) (srv. konec I. § 1.) pak dána takovéto kombinaci váha poloviční.

Teprve v září, jehož klidné počasí a stálá temperatura dovolovaly připustiti konstanci azimutu, tvořeny kombinace všechny, jichž koefficient šířkový byl větší než aspoň 2.

Vezmeme-li nyní za pravděpodobnou pólovou výšku z výsledků prostý průměr (se zřetelem na váhy) objeví se, připojíme-li současně korrekce pro kolísání pólu v jednotlivých měsících jako střední pólová výška altazimutu

$$\varphi = 48^0\ 35'\ 0{\cdot}88'' - 0{\cdot}037\ \Delta c \pm 0{\cdot}09''\ \text{stř. chyba.}$$

Zkoumejme nyní, jaký vliv na výsledek má eventuelní měna resp. chyba v kollimaci, hodnotě jedné šroubové otočky, jednoho dílce libelly a dělení kruhu. Stačí utvořiti průměry (vzhledem k vahám) z hodnot resp. koef. c, dat sub ΔR, Δa a koef. $d\varphi$ i objeví se

$$-0{\cdot}037''\ \Delta c, \quad -0{\cdot}094, \quad +0{\cdot}009^p, \quad 4{\cdot}58\ d\varphi.$$

Má-li chyba zaviněná býti pokaždé ve φ menší než 0·01″ postačí znáti

kollimaci jen as na	± 0·3″
hodnotu šroubu na	± 0″1
hodnotu dílce libelly na	± 0″5

a chyby v dělení kruhu redukují se as na $^1/_4$.

Jako poznámku k posouzení závažnosti výsledku resumujeme okolnosti příznivé: Velikost dalekohledu i jemnost stroje, přednosti methody prosté anomalií refrakce (nehledě k laterální), ohybu dalekohledu následkem téže a (*v našem případě jen částečná*) eliminace chyb děleného kruhu.

Okolnosti nepříznivé: Snad poněkud vysoká poloha stroje, veliká vedra v červenci a srpnu (během doby denní), něco menší citlivost první z užitých libell, a konečně malý počet deklinací fundamentálního katalogu B. J. do programu pojatý.

Ku srovnání s cizími měřeními uvedeme v krátkosti jich výsledky. Na altazimutu určována výška pólu (střední):

Prof. Schur*): cirkummeridianní výšky počtem 38 . . .	48⁰ 35′	0·15″
Horrebow-Talcott . . . . . 28 . . .		1·40″
	48⁰ 35′	0·78″
Corvoisier**) dvouletá, ale řídká pozorování dle absolutní methody Kapteyn Horrebow Talcott	48⁰ 35′	1·151″
Liebmann***): refrakce prostá methoda stejných výšek Gauss-Horrebow Talcott	48⁰ 35′	0·95″
Heinrich: digressní azimuty Böhmovy	48⁰ 35′	0·88″

*) Astron. Nachr. 2857—58 (Bd. 120). W. Schur, Untersuchungen und Beobachtungen am Altazimut der Straßburger Sternwarte.

**) Courvoisier, Untersuchungen über die absolute Polhöhe von Straßburg i. E. Diss. Straßburg 1901.

***) J. Liebmann, Die mittlere Polhöhe der Straßburger Sternwarte. Astron. Nachr. 4474 (Bd. 187).

Výsledky jednotlivé lze přenésti korrekcí — 0·530″ na pólovou výšku kruhu meridianního a vice versa. Učiníme-li poslednější, obdržíme ještě měření přenesená z kruhu poledního.

*) Pozorování α Ursae Minoris 1888—93:

Halm	počet 200	48° 35′ 1·09″
Zwinck	192	0·95″
Wislicenus	48	0·73″
Kobold	20	0·91″
Kaufmann	21	1·01″
Wanach	53	0·75″
		48° 35′ 0·97″
*) Pozorování α Ursae Min. 1884—88		48° 35′ 0·93″
Pozorování 32 hvězd cirkumpolárních 1882 až 1888		48° 35′ 0·98″

Shrneme-li tudíž výsledky měření i srovnání, můžeme uzavírati:

Měřením digressních azimutů tuto získaná výška pólu nemá arciť nároků na platnost absolutní, obsahujíc dojista ještě cosi libovolného, ale rozhodně nutno ji voliti za jeden z hlasů, jichž průměr konverguje realnými cestami k ideální hodnotě absolutní výšky polové, jedinou pozorovací řadou sotva dostupné.

---

*) J. Liebmann, Die mittlere Polhöhe der Straßburger Sternwarte. Astron. Nachr. 4474 (Bd. 187).

Dělení roviny v infinitesimální rhomby kružnicemi stálých poloměrů.

Napsal

Fr. Velísek.

(Předloženo dne 8. května 1914.)

I.

Při řešení problému uvedeného vyskytují se funkcionální rovnice, jichž direktní řešení lze podati jen po složitých výpočtech. Dlužno tudíž k určení konstant v úkolu přicházejících užíti methody, která nevyžaduje úplného řešení zmíněných funkcionálních rovnic. Poněvadž pak methody ty jsou různého druhu při stejných a nestejných poloměrech hledaných kružnic, uvedeme nejdříve funkcionální rovnice problému, na to řešení pro stejné poloměry. Pro různé poloměry podáno bude řešení v části další.

Jsou-li poloměry kružnic c, c_1, souřadnice středů jich pak U, U_1, resp. V, V_1, kde U, U_1 jsou funkce argumentu u, V, V_1 argumentu v, lze psáti rovnice hledaných kružnic

$$(x - U)^2 + (y - U_1)^2 = c^2,$$
$$(x - V)^2 + (y - V_1)^2 = c_1^2,$$

nebo po zavedení úhlů ψ, ω

$$(1) \qquad \begin{aligned} x - U &= c \cos \psi, & y - U_1 &= c \sin \psi, \\ x - V &= c_1 \cos \omega, & y - V_1 &= c_1 \sin \omega. \end{aligned}$$

Lineární element dán jest výrazem

$$d s^2 = c_1^2 \omega_u^2 d u^2 + 2 c c_1 \psi_v \omega_u \cos \omega_u (\psi - \omega) + c^2 \psi_v^2 d v^2,$$

tudíž jako podmínka rhombického dělení rovnice

$$c_1^2\,\omega_u^2 = c^2\,\psi_v^2,$$

kterou splníme pro

$$\psi = c_1\,\varphi_u,\quad \omega = c\,\varphi_v.$$

Dosazením těchto hodnot do (1) plynou funkcionální rovnice problému

$$(2)\qquad \begin{aligned} U - V &= c_1\cos(c\,\varphi_v) - c\cos(c_1\,\varphi_u),\\ U_1 - V_1 &= c_1\sin(c\,\varphi_v) - c\sin(c_1\,\varphi_u). \end{aligned}$$

Z rovnic posledních jde, označíme-li úhel souřadný ω

$$\varphi_{uu} = \frac{U'\cos(c\,\varphi_v) + U_1'\sin(c\,\varphi_v)}{c\,c_1\sin\omega},\quad \varphi_{vv} = -\frac{V'\cos(c_1\,\varphi_u) + V_1'\sin(c_1\,\varphi_u)}{c\,c_1\sin\omega},$$

$$\varphi_{uv} = \frac{U'\cos(c_1\,\varphi_u) + U_1'\sin(c_1\,\varphi_u)}{c\,c_1\sin\omega} = -\frac{V'\cos(c\,\varphi_v) + V_1'\sin(c\,\varphi_v)}{c\,c_1\sin\omega},$$

tedy jako podmínka integrability rovnic (2) výraz

$$U'\cos(c_1\,\varphi_u) + U_1'\sin(c_1\,\varphi_u) = \pm\,[V'\cos(c\,\varphi_v) + V_1'\sin(c\,\varphi_v)].$$

V rovnici znamení dlužno bráti dle volby téhož v hořejším výrazu

$$c_1^2\,\omega_u^2 = c^2\,\psi_v^2.$$

Poněvadž pak postup v obou případech jest stejný, klademe

$$(3)\qquad U'\cos(c_1\,\varphi_u) + U_1'\sin(c_1\,\varphi_u) + V'\cos(c\,\varphi_v) + V_1'\sin(c\,\varphi_v) = 0,$$

dále k vůli stručnosti

$$(4)\qquad \begin{aligned} A &= U'\cos(c_1\,\varphi_u) + U_1'\sin(c_1\,\varphi_u), & A_1 &= U'\sin(c_1\,\varphi_u) - U_1'\cos(c_1\,\varphi_u),\\ A_2 &= U''\cos(c_1\,\varphi_u) + U_1''\sin(c_1\,\varphi_u), & A_3 &= U''\sin(c_1\,\varphi_u) - U_1''\cos(c_1\,\varphi_u),\\ A_4 &= U'''\cos(c_1\,\varphi_u) + U_1'''\sin(c_1\varphi_u), & A_5 &= U'''\sin(c_1\,\varphi_u) - U_1'''\cos(c_1\,\varphi_u). \end{aligned}$$

Z posledních rovnic jde, vyjádříme-li derivace U pomocí A_k

$$\begin{aligned} U'\cos(c\,\varphi_v) + U_1'\sin(c\,\varphi_v) &= A\cos\omega + A_1\sin\omega,\\ U'\sin(c\,\varphi_v) - U_1'\cos(c\,\varphi_v) &= -A\sin\omega + A_1\cos\omega,\\ U''\cos(c\,\varphi_v) + U_1''\sin(c\,\varphi_v) &= A_2\cos\omega + A_3\sin\omega, \end{aligned}$$

tudíž pro derivace φ

$$\varphi_{uu} = \frac{A\cos\omega + A_1\sin\omega}{c\,c_1\sin\omega},\quad \varphi_{uv} = \frac{A}{c\,c_1\sin\omega}.$$

Derivace rovnice (3) dle v dávají

$$c\,c_1\,A_2\,\sin\omega - c_1\,A_1\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega) - c\,A\,[V'\sin(c\,\varphi_v) - V_1'\cos(c\,\varphi_v)] = 0,$$

$$c^2 c_1^2 A_4 \sin^2\omega - 2\,c\,c_1^2 A_3 \sin\omega\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega) + c\,c_1^2 A_2\cos\omega\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega) - c^2 c_1 A A_2\cos\omega - c\,c_1^2 A_1\sin\omega\,(A_2\cos\omega + A_3\sin\omega) + c\,c_1 A A_1\,(A_1\cos\omega - A\sin\omega) - c_1^2 A\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega)^2 - c^2 c_1 A_2\sin\omega\,[V'\sin(c\,\varphi_v) - V_1'\cos(c\,\varphi_v)] + c\,c_1 A_1\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega)\,[V'\sin(c\,\varphi_v) - V_1'\cos(c\,\varphi_v)] - c^2 A^2\,[V'\cos(c\,\varphi_v) + V_1'\sin(c\,\varphi_v)] = 0.$$

Rovnice (3) a první z předchozích dávají

$$V'\cos(c\,\varphi_v) + V_1'\sin(c\,\varphi_v) = -A,$$

$$V'\sin(c\,\varphi_v) - V_1'\cos(c\,\varphi_v) = \frac{c\,c_1\,A_2\sin\omega - c_1\,A_1\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega)}{c\,A},$$

kteréžto výrazy dosazeny do druhé z předchozích rovnic skytají po příslušné úpravě

$$\begin{aligned}(5)\quad &\sin^2\omega\,[c^2 c_1^2 A\,A_4 + 2\,c\,c_1^2 A_1\,(A_1 A_2 - A\,A_3) - c\,c_1^2 A\,A_1 A_3 - c_1^2 A_1^2\,(A^2 + A_1^2) - c^2 c_1^2 A_2^2] + \cos^2\omega\,[c\,c_1^2 A^2 A_2 - c_1^2 A^2\,(A^2 + A_1^2)] + \\ &+ \sin\omega\cos\omega\,[2\,c\,c_1^2 A\,(A_1 A_2 - A\,A_3) - 2\,c_1^2 A\,A_1\,(A^2 + A_1^2)] - \\ &- c\,c_1 A^3 A_1\sin\omega + \cos\omega\,(c\,c_1 A^2 A_1^2 - c^2 c_1 A^2 A_2) + c^2 A^4 = 0.\end{aligned}$$

Označíme krátce

$$\alpha = c^2 c_1^2 A\,A_4 + 2\,c\,c_1^2 A_1\,(A_1 A_2 - A\,A_3) - c\,c_1^2 A\,A_1 A_3 - c_1^2 A_1^2\,(A^2 + A_1^2) - c^2 c_1^2 A_2^2,$$

$$\beta = c\,c_1^2 A^2 A_2 - c_1^2 A^2\,(A^2 + A_1^2),$$

$$\gamma = 2\,c\,c_1^2 A\,(A_1 A_2 - A\,A_3) - 2\,c_1^2 A\,A_1\,(A^2 + A_1^2),$$

$$\delta = c\,c_1 A^2 A_1^2 - c^2 c_1 A^2 A_2,\quad \varepsilon = c\,c_1 A^3 A_1,\quad \eta = c^2 A^4.$$

Rovnice (5) pak má tvar

$$\alpha\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega + \gamma\sin\omega\cos\omega + \delta\cos\omega - \varepsilon\sin\omega + \eta = 0\,.$$

Poněvadž platí vztahy

$$\varphi_{uv} = \frac{A}{c\,c_1\sin\omega},\ \varphi_{vv} = \frac{c\,c_1 A_2\sin^2\omega + c\,A^2\cos\omega - c_1 A_1\,(A\cos\omega + A_1\sin\omega)}{c^2 c_1 A\sin\omega}$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -\frac{A\,A_1}{c\sin\omega},\ \frac{\partial A_1}{\partial v} = \frac{A^2}{c\sin\omega},\ \frac{\partial A_2}{\partial v} = -\frac{A\,A_3}{c\sin\omega},$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial v} = \frac{A\,A_2}{c\sin\omega},\ \frac{\partial A_4}{\partial v} = -\frac{A\,A_5}{c\sin\omega},$$

dává rovnice (5) derivována dle v nejprve

$$\sin^2\omega\,\alpha_v + \cos^2\omega\,\beta_v + \sin\omega\cos\omega\,\gamma_v + \cos\omega\,\delta_v - \sin\omega\,\varepsilon_v + \eta_v + (2\alpha\sin\omega\cos\omega - 2\beta\sin\omega\cos\omega + \gamma\cos^2\omega - \gamma\sin^2\omega - \delta\sin\omega - \varepsilon\cos\omega)(c_1\varphi_{uv} - c\,q_{vv}) = 0.$$

Povýšíme-li rovnici (5) na druhou a dosadíme za $\cos\omega$ z této rovnice do posledního výrazu při předpokladu $\gamma\sin\omega + \delta \neq 0$, obdržíme pro $\sin\omega$ rovnice při zkráceném označení jeho součinitelů

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1\sin^4\omega + \beta_1\sin^3\omega + \gamma_1\sin^2\omega + \varepsilon_1\sin\omega + \delta_1 = 0\\ &\alpha_2\sin^5\omega + \beta_2\sin^4\omega + \gamma_2\sin^3\omega + \varepsilon_2\sin^2\omega + \delta_2\sin\omega + \eta_2 = 0, \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_1 = (\alpha-\beta)^2 + \gamma^2,\quad \beta_1 = 2\gamma\delta - 2\varepsilon(\alpha-\beta),$$
$$\gamma_1 = \varepsilon^2 + 2(\alpha-\beta)(\beta+\eta) + \delta^2 - \gamma^2,\quad \varepsilon_1 = -2\varepsilon(\beta+\eta) - 2\gamma\delta,$$
$$\delta_1 = (\beta+\eta)^2 - \delta^2,$$

$$\alpha_2 = (2c\,c_1A_2 - 2c_1A_1^2)\gamma^2 + (\alpha-\beta)^2(2c\,c_1A_2 - 2c_1A_1^2) = 2c_1(cA_2 - A_1^2)[\gamma^2 + (\alpha-\beta)^2],$$

$$\beta_2 = \delta[3c\,c_1A_2\gamma - 3c_1A_1^2\gamma - c_1A\,A_1(\alpha-\beta)] + \varepsilon[3c_1A_1^2(\alpha-\beta) - 3c\,c_1A_2(\alpha-\beta) - c_1A\,A_1\gamma] = 2c_1(A_1^2 - cA_2)[\varepsilon(\alpha-\beta) - \gamma\delta] - c\,c_1^2A^2\gamma[(A_1 - cA_2)^2 + A^2A_1^2],$$

$$\eta_2 = -3c\,c_1^2(c^2 - c_1^2)A^7(A^2A_1 + A_1^3 + cA\,A_3 - cA_1A_2).$$

Koëfficienty γ_2, ε_2, δ_2 neuvádíme, jelikož se nedají vyjádřiti jednoduchými výrazy argumentů α, β, γ, δ, ε a nemají pro redukci rovnic určujících $\sin\omega$ významu.

Jelikož

$$\alpha_2 + 2c_1\alpha_1\varrho = 0,$$

kde položeno $\varrho = A_1^2 - cA_2$, možno psáti rovnice (6) ve tvaru

$$(7)\qquad \begin{aligned} &a_0\sin^4\omega + a_1\sin^3\omega + a_2\sin^2\omega + a_3\sin\omega + a_4 = 0\\ &b_0\sin^4\omega + b_1\sin^3\omega + b_2\sin^2\omega + b_3\sin\omega + b_4 = 0. \end{aligned}$$

Při tom značí:

$$a_0 = \alpha_1 = c_1^4\varrho^4 + A(6c\,c_1^4A_1A_3\varrho^2 - 2c^2c_1^4A_4\varrho^2) + A^2(c^4c_1^4A_4^2 + 9c^2c_1^4A_1^2A_3^2 - 6c^3c_1^4A_1A_3A_4 + 2c\,c_1^4A_2\varrho^2 + 4c_1^4A_1^2\varrho^2) + A^3(6c^2c_1^4A_1A_2A_3 - 2c^3c_1^4A_2A_4 + 8c\,c_1^4A_1A_3\varrho) + A^4(c^2c_1^4A_2^2 - 2c_1^4\varrho^2 + 4c^2c_1^4A_3^2 + 8c_1^4A_1^2\varrho) + A^5(2c^2c_1^4A_4 + 2c\,c_1^4A_1A_3) + A^6(4c_1^4A_1^2 - 2c\,c_1^4A_2) + + c_1^4A^8,$$

$$a_1 = \beta_1 = -2c\,c_1^3A_1A^3\varrho^2 + A^4(6c^2c_1^3A_1^2A_3 - 4c^2c_1^3A_3\varrho - 2c^3c_1^3A_1A_4) + A^5(2c^2c_1^3A_1A_2 - 4c\,c_1^3A_1\varrho) - 2c\,c_1^3A_1A^7,$$

$$a_2 = \gamma_1 = -2\,c_1^4\,\varrho\,(A_1^2 + c\,A_2)\,A^2 + A^3\,(-2\,c^2\,c_1^4\,A_4\,\varrho - 2\,c\,c_1^4\,A_1\,A_3\,\varrho) + A^4\,(2\,c_1^4\,\varrho^2 - c^2\,c_1^2\,\varrho^2 + 2\,c\,c_1^4\,A_2\,\varrho - 4\,c^2\,c_1^4\,A_3^2 - 8\,c_1^4\,A_1^2\,\varrho) + A^5\,(2\,c^4\,c_1^4\,A_4 - 6\,c^3\,c_1^2\,A_1\,A_3 - 2\,c^2\,c_1^4\,A_4 - 2\,c_1^4\,A_1\,c\,A_3) + A^6\,(c^2\,c_1^2\,A_1^2 - 2\,c^3\,c_1^2\,A_2 + 2\,c\,c_1^4\,A_2 - 2\,c_1^4\,\varrho - 4\,c_1^4\,A_1^2) + A^8\,(2\,c^2\,c_1^2 - 2\,c_1^4),$$

$$a_3 = \varepsilon_1 = 4\,c\,c_1^3\,A_1\,A^3\,\varrho^2 + 4\,c^2\,c_1^3\,A_3\,A^4\,\varrho + 6\,c\,c_1^3\,A_1\,A^5\,\varrho + (2\,c\,c_1^3 - 2\,c^3\,c_1\,A_1)\,A^7,$$

$$a_4 = \delta_1 = c_1^2\,(c_1^2 - c^2)\,\varrho^2\,A^4 - 2\,c_1^2\,(c^2 - c_1^2)\,\varrho\,A^6 + (c^2 - c_1^2)^2\,A^8,$$

$$b_0 = \beta_2 + 2\,c_1\,\varrho\,\beta_1 = c_1\,\varrho\,A^4\,(6\,c^2\,c_1^3\,A_1^2\,A_3 - 2\,c^2\,c_1^3\,A_3\,\varrho - 2\,c^3\,c_1^3\,A_1\,A_4) + c_1\,\varrho\,A^5\,(2\,c^2\,c_1^3\,A_1\,A_2 - 2\,c\,c_1^3\,A_1\,\varrho + 2\,c\,c_1^3\,A_1^3) + 2\,c^2\,c_1^4\,A^6\,A_1^2\,A_3 + 2\,c^2\,c_1^4\,A^7\,A_1\,A_2,$$

$$b_1 = \gamma_2 + 2\,c_1\,\varrho\,\gamma_1 = A^3\,(2\,c^3\,c_1^5\,A_4\,\varrho + 6\,c\,c_1^5\,A_1^3\,A_3\,\varrho - 6\,c\,c_1^5\,A_1\,A_3\,\varrho^2 - 2\,c^2\,c_1^5\,A_1^2\,A_4\,\varrho) + A^4\,(2\,c^2\,c_1^5\,A_1\,A_5\,\varrho + 4\,c_1^5\,A_1^4\,\varrho - 3\,c^2\,c_1^3\,\varrho^3 - 2\,c^4\,c_1^5\,A_4^2 + 10\,c^3\,c_1^5\,A_1\,A_3\,A_4 - 12\,c^2\,c_1^5\,A_1^2\,A_3^2 - c^3\,c_1^3\,A_2\,\varrho^2 + c^2\,c_1^3\,A_1^2\,\varrho^2 + 2\,c^2\,c_1^5\,A_2^2\,\varrho + 4\,c_1^5\,\varrho^3 + 2\,c\,c_1^5\,A_2\,\varrho^2 - 8\,c_1^5\,A_1^2\,\varrho^2) + A^5\,(8\,c\,c_1^5\,A_1\,A_3\,\varrho + 2\,c^3\,c_1^5\,A_3\,A_5 + 2\,c^3\,c_1^5\,A_2\,A_4 + 2\,c^5\,c_1^3\,A_2\,A_4 - 6\,c^4\,c_1^3\,A_1\,A_2\,A_3 - 2\,c^4\,c_1^3\,A_1^2\,A_4 + 2\,c^2\,c_1^5\,A_1^2\,A_4 + 6\,c^3\,c_1^3\,A_1^3\,A_3 - 6\,c\,c_1^5\,A_1^3\,A_3 + 5\,c^4\,c_1^3\,A_4\,\varrho - 15\,c^3\,c_1^3\,A_1\,A_3\,\varrho - 4\,c^2\,c_1^5\,A_4\,\varrho) + A^6\,(2\,c^2\,c_1^5\,A_1\,A_5 - 4\,c^2\,c_1^5\,A_3^2 - 8\,c\,c_1^5\,A_1^2\,A_2 + 10\,c_1^5\,A_1^4 - c^2\,c_1^3\,A_1^2\,\varrho + 2\,c^3\,c_1^3\,A_2\,\varrho - 4\,c^2\,c_1^3\,A_1^2\,\varrho + 4\,c_1^5\,A_1^2\,\varrho - 5\,c^3\,c_1^3\,A_2\,\varrho + 2\,c\,c_1^5\,A_2\,\varrho - 2\,c_1^5\,\varrho^2 - 12\,c_1^5\,A_1^2\,\varrho) + A^7\,(2\,c\,c_1^5\,A_1\,A_3 - 6\,c^3\,c_1^3\,A_1\,A_3 - 2\,c^2\,c_1^5\,A_4) + A^8\,(2\,c^3\,c_1^3\,A_2 - 8\,c^2\,c_1^3\,A_1^2 + 4\,c_1^5\,A_1^2 + 5\,c^2\,c_1^3\,\varrho - 4\,c_1^5\,\varrho),$$

$$b_2 = \varepsilon_2 + 2\,c\,\varrho\,\varepsilon_1 = A^4\,(3\,c^3\,c_1^4\,A_1\,A_4\,\varrho - 13\,c^2\,c_1^4\,A_1^2\,A_3\,\varrho + 7\,c^2\,c_1^4\,A_3\,\varrho^2 + 4\,c^3\,c_1^4\,A_2\,A_3\,\varrho + 2\,c^3\,c_1^4\,A_1^3\,A_4 - 2\,c^4\,c_1^4\,A_1\,A_2\,A_4 - 6\,c^2\,c_1^4\,A_1^4\,A_3 + 6\,c^3\,c_1^4\,A_1^2\,A_2\,A_3) + A^5\,(c^4\,c_1^4\,A_3\,A_4 - 13\,c\,c_1^4\,A_1^3\,\varrho - 3\,c^3\,c_1^4\,A_1\,A_3^2 + 10\,c\,c_1^4\,A_1\,\varrho^2 + 2\,c^2\,c_1^4\,A_1\,A_2\,\varrho - c^3\,c_1^4\,A_5\,\varrho - 4\,c^2\,c_1^4\,A_1^3\,A_2 + 2\,c^3\,c_1^4\,A_1\,A_2^2 + 2\,c\,c_1^4\,A_1^5) + A^6\,(3\,c^3\,c_1^4\,A_1\,A_4 - 13\,c^2\,c_1^4\,A_1^2\,A_3 - c^3\,c_1^4\,A_2\,A_3) + A^7\,(c^3\,c_1^2\,A_1\,\varrho + 3\,c\,c_1^4\,A_1\,\varrho - 5\,c\,c_1^4\,A_1^3 - 4\,c^2\,c_1^4\,A_1\,A_2 + c^3\,c_1^2\,A_1^3 - c^4\,c_1^2\,A_1\,A_2) + A^8\,(4\,c^4\,c_1^2\,A_3 - c^2\,c_1^4\,A_3) + A^9\,(4\,c^3\,c_1^2\,A_1 - c\,c_1^4\,A_1),$$

$$b_3 = \delta_2 + 2\,c_1\,\varrho\,\delta_1 = A^5\,(6\,c^3\,c_1^3\,A_1\,A_3\,\varrho - 2\,c^4\,c_1^3\,A_4\,\varrho + 2\,c^2\,c_1^5\,A_4\,\varrho) + A^6\,(8\,c^2\,c_1^3\,A_1^2\,\varrho + 6\,c^2\,c_1^5\,A_3^2 - 2\,c_1^5\,A_1^4 + 2\,c\,c_1^5\,A_1^2\,A_2 + 2\,c^3\,c_1^3\,A_2\,\varrho - 2\,c\,c_1^5\,A_2\,\varrho - 2\,c^2\,c_1^3\,\varrho^2 + 2\,c_1^5\,\varrho^2) + A^7\,(15\,c^3\,c_1^3\,A_1\,A_3 - 2\,c^4\,c_1^3\,A_4 + 2\,c^2\,c_1^5\,A_4) + A^8\,(11\,c^2\,c_1^3\,A_1^2 + 2\,c^3\,c_1^3\,A_2 - 2\,c\,c_1^5\,A_2 - 2\,c_1^5\,A_1^2 + c^4\,c_1\,\varrho - 6\,c^2\,c_1^3\,\varrho + 2\,c_1^5\,\varrho),$$

$$b_4 = \eta_2 = -3\,c\,c_1^2\,(c^2 - c_1^2)\,A_1\,A^7\,\varrho - 3\,c^2\,c_1^2\,(c^2 - c_1^2)\,A_3\,A^8 - 3\,c\,c_1^2\,(c^2 - c_1^2)\,A_1\,A^9.$$

Koëfficienty a_k jsou stupně 12-ho, b_k stupně 15-ho vzhledem na všechny veličiny v nich přicházející.

Eliminací $\sin\omega$ z rovnic (7) obdržíme vztah mezi A_k, poněvadž pak dle vztahů (4) platí

$$A^2 + A_1^2 = U'^2 + U_1'^2,\ cos\,(c_1\,\varphi_u) = \frac{A\,U' - A_1\,U_1'}{U'^2 + U_1'^2}\,,$$

$$sin\,(c_1\,\varphi_u) = \frac{A\,U_1' + A_1\,U}{U'^2 + U_1'^2}\,,$$

$$(8)\quad A_2 = \frac{1}{U'^2 + U_1'^2}\,[A\,(U'\,U'' + U_1'\,U_1'') + A_1\,(U'\,U_1'' - U_1'\,U'')],$$

$$A_3 = \frac{1}{U'^2 + U_1'^2}\,[A\,(U_1'\,U'' - U'\,U_1'') + A_1\,(U'\,U'' + U_1'\,U_1'')],$$

$$A_4 = \frac{1}{U'^2 + U_1'^2}\,[(U'\,U''' + U_1'\,U_1''') + A_1\,(U'\,U_1''' - U_1'\,U''')],$$

dají se A_k vyjádřiti pomocí A, tedy všechny koëfficienty v resultantě rovnic (7) při jednotlivých mocnostech A musí vymizeti, nemá-li býti $A = U'\,cos\,(c_1\,\varphi_u) + U_1'\,sin\,(c_1\,\varphi_u)$ funkcí argumentu u. Případ tento dává $\varphi_{u\,v} = 0$, tedy jsou ω funkcí v, ψ funkcí u. Resultanta uvedená dána jest determinantem stupně čtvrtého

$$(9)\quad \begin{vmatrix} (a_0\,b_4), & (a_0\,b_3), & (a_0\,b_2), & (a_0\,b_1) \\ (a_1\,b_4), & (a_1\,b_3) + (a_0\,b_4), & (a_1\,b_2) + (a_0\,b_3), & (a_0\,b_2) \\ (a_2\,b_4), & (a_2\,b_3) + (a_1\,b_4), & (a_1\,b_3) + (a_0\,b_4), & (a_0\,b_3) \\ (a_3\,b_4), & (a_2\,b_4), & (a_1\,b_4), & (a_0\,b_4) \end{vmatrix} = 0$$

II.

Pro $c = c_1$ vymizí výrazy pro a_4, b_4. V tomto případě resultanta rovnic (7) redukuje se na determinant třetího stupně

$$(10)\quad \begin{vmatrix} (a_0\,b_3), & (a_0\,b_2), & (a_0\,b_1) \\ (a_1\,b_3), & (a_1\,b_2) + (a_0\,b_3), & (a_0\,b_2) \\ (a_2\,b_3), & (a_1\,b_3), & (a_0\,b_3) \end{vmatrix} = 0,$$

v němž značí

$$a_0 = c^4\,(A^2 + A_1^2)^4 + 2\,c^5\,(A^2 + A_1^2)\,[A\,A_1\,A_3\,(A^2 + A_1^2) + 2\,A_1^3\,(A\,A_3 - A_1\,A_2) - A^2\,A_2\,(A^2 + A_1^2)] + c^6\,\{(A^2 + A_1^2)\,[2\,A\,A_4\,(A^2 - A_1^2) - 2\,A\,A_1\,A_2\,A_3 + A_2^2\,(A_1^2 - A^2) + 4\,A^2\,A_3^2] + 5\,A_1^2\,(A_1\,A_2 - A\,A_3)^2\} + 2\,c^7\,(A_2^2 - A\,A_4)\,[A_2\,(A^2 + A_1^2) - 3\,A_1\,(A_1\,A_2 - A\,A_3)] + c^8\,(A\,A_4 - A_2^2)^2,$$

$$a_1 = -2\,c^4\,A^3\,A_1\,(A^2 + A_1^2) + 2\,c^5\,A^3\,A_1\,[3\,A_2\,(A^2 + A_1^2) - A_1\,(A_1\,A_2 - A\,A_3)] + 2\,c^6\,A^3\,[2\,A_2\,(A\,A_3 - A_1\,A_2) + A_1\,(A_2^2 - A\,A_4)],$$

$$a_2 = -c^4\,A^2\,A_1^2\,(A^2 + A_1^2)\,(2\,A_1^2 + 5\,A^2) + 2\,c^5\,A^2\,[2\,A^2\,A_1\,(A_1\,A_2 - A\,A_3) - A^3\,(A_1\,A_3 + A\,A_2) - A^2\,A_1^2\,A_2 + 2\,A^2\,A_2\,(A^2 + A_1^2) + A_1\,(A_1\,A_2 - A\,A_3)\,(A^2 + A_1^2)] + c^6\,A^2\,[4\,A_1\,A_2\,(A_1\,A_2 - A\,A_3) - 4\,(A_1\,A_2 - A\,A_3)^2 - 2\,A\,A_2\,(A_1\,A_3 + A\,A_2) - 2\,(A^2 + A_1^2)\,(A\,A_4 - A_2^2) + A^2\,(2\,A\,A_4 - A_2^2)] + 2\,c^7\,A^2\,A_2\,(A\,A_4 - A_2^2),$$

$$a_3 = 2c^4A^3A_1^3(3A^2 + 2A_1^2) - 2c^5A^3A_1[A^2A_2 + 2A_1(A_1A_2 - AA_3) + 2A_2(A^2 + A_1^2)] + 4c^6A^3A_2(A_1A_2 - AA_3),$$

$$b_0 = 2c^6A^4A_1[(AA_2 + 2A_1A_3)(A^2 + A_1^2) + AA_1(A_1A_2 - AA_3)] - 2c^7A^4A_1[A_1^2A_4 + AA_2^2 + A_2(A_1A_3 + AA_2)] + 2c^8A^4A_2(A_1A_4 - A_2A_3),$$

$$b_1 = -c^5A^4A_1^2(A_1^2 + A^2)(3A^2 + 2A_1^2) + c^6A_4[4A_1(A^2 + A_1^2)(A_1A_2 - AA_3) + 4A_1^3(A_1A_2 - AA_3) + AA_1^2(A_1A_3 + AA_2) + A^2A_2(A^2 + A_1^2) + 2A^2A_1^2A_2] + c^7A^3(2AA_1A_5(A^2 + A_1^2) - 2A^2A_4[A^2 + A_1^2) - 4AA_3^2(A^2 + A_1^2) + 6A_1^2A_3(A_1A_2 - AA_3) - AA_2^2(A^2 + A_1^2) - AA_1A_2(A_1A_2 - AA_3) - 2AA_1^2(A_2^2 + A_3^2) + 3A^2A_1^2A_4] + c^8A^3[2AA_5(AA_3 - A_1A_2) - 2A_2^2(AA_2 + A_1A_3) - 2A_1A_4(A_1A_2 - AA_3) + 3AA_4(A_1A_3 + AA_2) + 5AA_1A_3A_4 - 4A_1A_2^2A_3] + 2c^9A^3A_4(A_2^2 - AA_4),$$

$$b_2 = c^5A^5A_1(3A^4 - A_1^4) + c^6A^4[4A_1^4A_3 + (A^2 + A_1^2)(3A^2A_3 - 16A_1^2A_3 - 9AA_1A_2)] + c^7A^4[3A_1A_4(A^2 + A_1^2) + A_1^2(A_1A_4 - AA_5) + 9A_1A_2(A_1A_3 + AA_2) + AA_2(A_1A_2 - AA_3) + A_1^3A_4 - 3AA_1A_3^2] + c^8A^4[A_2(AA_5 - A_1A_4) - A_4(A_1A_2 - AA_3) + 3A_2(A_2A_3 - A_1A_4)],$$

$$b_3 = 6c^5A^6A_1^2(A^2 + A_1^2) + 3c^6A^5[(A^2 + 2A_1^2)(AA_2 + A_1A_3) + 4AA_1(AA_3 - A_1A_2)] + 6c^7A^5A_3(AA_3 - A_1A_2).$$

Výrazy tyto uspořádány dle mocností c, aby bylo možno snáze vyhledati stejné mocniny A, jelikož výrazy $A^2 + A_1^2$, $AA_2 + A_1A_3$, $AA_3 - A_1A_2$, $A_2^2 + A_3^3$, $AA_5 - A_1A_4$ nezávisí na A.

Rovnice (10) nemizí identicky. Vypočteme-li na př. člen neobsahující A, obdržíme po příslušné redukci

$$0 = \begin{vmatrix} 3A_3\varrho, & \varrho(5cA_1A_4 - 12A_1^2A_3 - 3cA_2A_3), & 6cA_1A_2A_3 - 2c^2A_2A_4 \\ 4c^2A_2A_4 - 12cA_1A_2A_3, & 6A_1^5A_3 - 4c^2A_1^2A_2A_4 + 18c^2A_1A_2^2A_3 - 4c^3A_2^2A_4, & \varrho(5cA_1A_4 - 12A_1^2A_3 - 3cA_2A_3) \\ 9A_1A_3 - 5cA_4, & 4c^2A_2A_4 - 12cA_1A_2A_3, & 3A_3\varrho \end{vmatrix}$$

Rozvineme-li tento determinant, obdržíme rovnici

$$(11) \quad \begin{aligned} &1350A_1^9A_3^3 - c(1800A_1^8A_3^2A_4 + 3240A_1^7A_2A_3^3) + \\ &+ c^2(3870A_1^6A_2A_3^2A_4 + 1809A_1^5A_2^2A_3^3 + 825A_1^7A_3A_4^2) - \\ &- c^3(1557A_1^4A_2^2A_3^2A_4 + 125A_1^6A_4^3 + 378A_1^3A_2^3A_3^3 + \\ &+ 1680A_1^5A_2A_3A_4^2) + c^4(573A_1^3A_2^2A_3A_4^2 + 216A_1^2A_2^3A_3^2A_4 + \\ &+ 250A_1^4A_2A_4^3 + 27A_1A_2^4A_3^3) - c^5(54A_1A_2^3A_3A_4^2 + 9A_2^4A_3^2A_4 + \\ &+ 85A_1^2A_2^2A_4^3) + 8c^6A_2^3A_4^3 = 0, \end{aligned}$$

v níž ovšem dlužno podržeti jen členy neobsahující A. Rovněž koëfficient při prvé mocnosti A nemizí, leč výraz ten jest příliš rozsáhlý, a v dalším

jej potřebí nebude. Součinitelé při nejvyšších 2 mocninách A v rovnici (10) identicky vymizí.

Dle vztahů (8) patrno, že výrazy

$$\frac{U'\,U'' + U_1'\,U_1''}{U'^2 + U_1'^2}, \quad \frac{U'\,U_1'' - U_1'\,U''}{U'^2 + U_1'^2}, \quad \frac{U'\,U''' + U_1'\,U_1'''}{U'^2 + U_1'^2}, \quad \frac{U'\,U_1''' - U_1'\,U'''}{U'^2 + U_1'^2} \tag{12}$$

jsou konstanty, jakmile 4 ze součinitelů mocnin A v rovnici (10) identicky nemizí. Abychom konstanty tyto nalezli, použijeme cesty jiné, jelikož vypsání součinitelů uvedených jest příliš dlouhé.

Označme čtverec lin. elementu

$$d\,s^2 = e\,d\,u^2 + 2\,f\,d\,u\,d\,v + g\,d\,v^2.$$

Pak obdržíme z rovnic pro geodetické křivosti a křivost totální

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{e\,g - f^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\,v}\,\frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{\partial\,\sqrt{g}}{\partial\,u}\right),$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{e\,g - f^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\,u}\,\frac{f}{\sqrt{e}} - \frac{\partial\,\sqrt{e}}{\partial\,v}\right),$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{e\,g - f^2}}\left(\frac{\partial^2\,\omega_1}{\partial\,u\,\partial\,v} + \frac{\partial}{\partial\,u}\,\frac{\sqrt{g}}{c} + \frac{\partial}{\partial\,v}\,\frac{\sqrt{e}}{c_1}\right)$$

vzhledem k podmínkám problému

$$e = g = \varepsilon^2, \quad f = \varepsilon^2 \cos\omega_1 = \varepsilon\,t, \quad c = c_1, \quad K = 0,$$

tyto relace, v nichž ω_1 značí úhel souřadný

$$\frac{\varepsilon\,\sqrt{\varepsilon^2 - t^2}}{c} = \frac{\partial\,t}{\partial\,v} - \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,u}, \quad \frac{\varepsilon\,\sqrt{\varepsilon^2 - t^2}}{c} = \frac{\partial\,t}{\partial\,u} - \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,v}, \quad \frac{\partial^2\,\omega_1}{\partial\,u\,\partial\,v} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,u} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,v} = 0. \tag{13}$$

První dvě rovnice dávají

$$\frac{\partial\,(t+\varepsilon)}{\partial\,u} = \frac{\partial\,(t+\varepsilon)}{\partial\,v},$$

tudíž

$$t + \varepsilon = F\,(u + v).$$

Zavedeme-li nové proměnné vztahy

$$u_1 = u + v, \quad v_1 = u - v,$$

dává rovnice první (13)

$$\frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - t^2}}{c} = \frac{\partial}{\partial u_1} (F - 2\varepsilon) ,$$

tedy pro

$$t = F - \varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (2\varepsilon - F) = -\frac{1}{c} \varepsilon \sqrt{F}\ \sqrt{2\varepsilon - F} .$$

Substitucí

$$z^2 = 2\varepsilon - F$$

přejde poslední rovnice do tvaru rovnice Riccati-ovy

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} = -\frac{1}{4c} (F + z) \sqrt{F} ,$$

jejíž řešení jest tvaru

$$z = f_1(u_1) + \frac{f_2(u_1)}{f_3(u_1) + \varphi_1(v_1)} ,$$

při čemž funkce zde vystupující vázány jsou relacemi

$$f_1' = -\frac{1}{4c} \sqrt{F} (f_1^2 + F), \quad f_2' = -\frac{1}{4c} 2 f_1 f_2 \sqrt{F} , \quad f_3' = \frac{1}{4c} f_2 \sqrt{F} .$$

Jelikož pak

$$\cos \omega_1 = \frac{F - z^2}{F + z^2} , \quad \sin \omega_1 = \frac{2z\sqrt{F}}{F + z^2} , \quad \varepsilon = \frac{F + z^2}{2} , \quad t = \frac{F - z^2}{2} ,$$

dává rovnice třetí (13)

$$F'^2 z (3F + z^2) - 2 z F F'' (F + z^2) + 2 F F' (z^2 - F) \frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$+ 2 F F' (z^2 - F) \frac{\partial z}{\partial v} - 8 F^2 z \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + 4 F^2 (F + z^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} +$$

$$+ \frac{2}{c} F^{3/2} (F + z^2)^2 \left[F' + z \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] = 0,$$

neb pro

$$\frac{1}{f_3 + \varphi_1} = x , \quad \frac{\partial z}{\partial u} = f_1' + x f_2' - x^2 f_2 f_3' - x^2 f_2 \varphi_1' ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_1' + x f_2' - x^2 f_2 f_3' + x^2 f_2 \varphi_1' ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = f_1'' + x f_2'' - 2 x^2 f_2' f_3' - x^2 f_2 f_3'' + 2 x^3 f_2 f_3'^2 + \\ + x^2 f_2 \varphi_1'' - 2 x^3 f_2 \varphi'^2 ,$$

$$m + 4 m_1 \varphi_1'' - 8 m_2 \varphi'^2 = 0 , \tag{14}$$

kde m značí polynom 7-ho stupně v x, s koefficienty závislými jen na f_1, f_2, f_3, F a jich derivacích

$$m_1 = x^2 f_1 F^3 + x^2 f_1^2 f_2 F^2 + 2 x^3 f_1 f_2^2 F^2 + x^4 f_1^3 F^2,$$
$$m_2 = x^3 f_1 F^3 + x^3 f_1^2 f_2 F^2 + x^4 f_1 f_2^2 F^2.$$

Při $f_1 \neq 0$ jest též $m_2 \neq 0$, rovnici (14) pak lze psáti

$$\frac{m}{m_2} + 4 \frac{m_1}{m_2} \varphi_1'' - 8 \varphi_1'^2 = 0 ,$$

což dává derivací dle $(u + v)$

$$\left(\frac{m}{m_2}\right)' + 4 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)' \varphi_1'' = 0 .$$

Rozvineme-li $\left(\frac{m}{m_2}\right)'$, obdržíme jako součinitele při nejvyšší mocnině x^9

$$\frac{12}{c} f_1 f_2^8 f_3'^2 F^{7/2} ,$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)' (F + f_1^2 + x f_1 f_2)^2 = f_1 f_2' F + f_2 f_1' F + f_1^3 f_2' + f_3' F^2 + \\ + 2 f_1^2 f_3' F + f_1^4 f_3' - f_1^2 f_2 f_1' - f_1 f_2 F' + x (2 f_2 f_2' F + 2 f_1^2 f_2 f_2' + \\ + 2 f_1 f_2 f_3' F + 2 f_1^3 f_2 f_3' - 2 f_1 f_2^2 f_1' - f_2^2 F') ,$$

neb pomocí vztahů mezi f_1, f_2, f_3

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)' = - \frac{f_2 F' (f_1 + x f_2)}{(F + f_1^2 + x f_1 f_2)^2} .$$

Výraz tento jest nullou jen pro $f_2 = 0$ neb $F' = 0$, tedy vzhledem na $\left(\frac{m}{m_2}\right)'$ jen pro $F = 0$ neb $f_2 = 0$. $F = 0$ dává $\cos \omega_1 = -1$, tedy případ illusorní, $f_2 = 0$ jest pak proti předpokladu.

Ponecháme-li v rovnici

$$\left(\frac{m}{m_2}\right)' + 4 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)' \varphi_1'' = 0$$

jen nejvyšší mocniny x, obdržíme vzhledem k $\left(\frac{m_1}{m_2}\right)' \neq 0$ z výrazu

$$\left[\left(\frac{m}{m_2}\right)' : \left(\frac{m_1}{m_2}\right)'\right]' = 0$$

jako součinitele při nejvyšší mocnině x

$$+ \frac{20}{c} f_1 f_2^8 f_3'^3 F'^{1/2} F'.$$

$f_3' = 0$ není možno, jelikož by dle dřívějších relací bylo i $f_2 = 0$, rovněž $F' = 0$ nevyhovuje, jelikož by dle výrazu pro $\left(\frac{m}{m_2}\right)'$ bylo při $F \neq 0$ i $f_2 = 0$.

Zbývá tedy jen

$$f_2 = 0, \qquad \text{t. j.} \qquad z = f_1 (u + v),$$

$$d s^2 = \frac{F + f_1^2}{2} \left[d u^2 + 2 \frac{F - f_1^2}{F + f_1^2} d u d v + d v^2\right],$$

neb pro

$$u_1 = u + v, \quad v_1 = u - v$$

$$d s^2 = \frac{f_1^2 + F}{4} (F d u_1^2 + f_1^2 d v_1^2), \tag{15}$$

kde f_1 a F jsou vázány relací

$$f_1' = - \frac{f_1^2 + F}{4 c} \sqrt{F}.$$

Koëfficienty lin. elementu jsou funkce jen $(u + v)$. Tudíž položíme-li

$$c^2 \varphi_{u v} = c \Phi' (u + v), \quad \omega_1 = c \varphi_u + c \varphi_v$$

jest

$$c \varphi_u = \Phi + k_2 u, \quad c \varphi_v = \Phi + k_2 v,$$

kde k_2 značí libovolnou konstantu. Rovnice (2) lze pak psáti

$$U - V = c \cos (\Phi + k_2 v) - c \cos (\Phi + k_2 u),$$
$$U_1 - V_1 = - c \sin (\Phi + k_2 v) - c \sin (\Phi + k_2 u),$$

z nichž derivací dle u, resp. dle v jde

$$U' = c (\Phi' + k_2) \sin (\Phi + k_2 u) - c \Phi' \sin (\Phi + k_2 v),$$
$$U_1' = - c \Phi' \cos (\Phi + k_2 v) - c (\Phi' + k_2) \cos (\Phi + k_2 u),$$
$$V' = c (\Phi' + k_2) \sin (\Phi + k_2 v) - c \Phi' \sin (\Phi + k_2 u)$$
$$V_1' = c \Phi' \cos (\Phi + k_2 u) + c (\Phi' + k_2) \cos (\Phi + k_2 v),$$

z čehož obdržíme relace

$$U'^2 + U_1'^2 = c^2 (\Phi' + k_2)^2 + c^2 \Phi'^2 + 2 c^2 \Phi' (\Phi' + k_2) \cos k_2 [2 \Phi + k_2 (u + v)],$$
$$V'^2 + V_1'^2 = c^2 (\Phi' + k_2)^2 + c^2 \Phi'^2 + 2 c^2 \Phi' (\Phi' + k_2) \cos k_2 [2 \Phi + k_2 (u + v)].$$

Musí tudíž býti

$$U'^2 + U_1'^2 = k, \quad V'^2 + V_1'^2 = k. \tag{16}$$

Rovnice

$$c^2 (\Phi' + k_2)^2 + c^2 \Phi'^2 + 2 c^2 \Phi' (\Phi' + k_2) \cos k_2 [2 \Phi + k_2 (u + v)] = k$$

dává integrována substitucí nové proměnné za $\cos [2 \Phi + k_2 (u + v)]$

$$2 \Phi + k_2 (u + v) = \arccos \left[\frac{c^2 k_2^2 - k}{c^2 k_2^2} + \frac{k}{c^2 k_2^2} \sin k_2 (u + v) \right].$$

Jelikož pak

$$c k_2 \sin \frac{2 \Phi + k_2 (u + v)}{2} = \sqrt{\frac{k}{2}} \sqrt{1 - \sin k_2 (u + v)},$$

jest

$$U - V = 2 c \sin \frac{2 \Phi + k_2 (u + v)}{2} \sin \frac{k_2 (u - v)}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2 k}}{k_2} \sin \frac{k_2 (u - v)}{2} \sqrt{1 - \cos \left[\frac{\pi}{2} - k_2 (u + v) \right]} =$$
$$= \frac{\sqrt{2 k}}{k_2} \sin \frac{k_2 (u - v)}{2} \left[\cos \frac{k_2 (u + v)}{2} - \sin \frac{k_2 (u + v)}{2} \right] =$$
$$= \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{k}{2}} [\sin k_2 u + \cos k_2 u - \sin k_2 v - \cos k_2 v],$$

tedy až na additivní konstantu při u a v

$$U = k \sin k_1 u, \; U_1 = - k \cos k_1 u, \; V = k \sin k_1 v, \; V_1 = k \cos k_1 v. \tag{17}$$

Tím dokázáno, že rovnice (10) skytá pro výrazy v rovnicích (8) jen konstanty. Položíme-li totiž v rovnici první ze (16)

$$U' = k \sin \Phi_1, \qquad U_1' = - k \cos \Phi_1,$$

jest

$$U' U'' + U_1' U_1'' = 0, \quad U' U_1'' - U_1' U'' = k^2 \Phi_1',$$
$$U' U''' + U_1' U_1''' = - k^2 \Phi'^2, \quad U' U_1''' - U_1' U''' = k^2 \Phi_1'',$$

pro kteréžto hodnoty redukuje se rovnice (11) na

$$k^3 \Phi_1''^3 (8 c^3 k^3 \Phi_1'^3 - 85 c^2 k^2 \sqrt{k} \Phi_1'^2 + 250 c k^2 \Phi_1' - 125 k \sqrt{k}) = 0,$$

což dává pro Φ_1 jen $\Phi_1' =$ konst.

Není-li tudíž žádná souřadnice středů hledaných kružnic konstantou, obdržíme jako jediné řešení uvažovaného rhombického dělení roviny kružnicemi stejných poloměrů systém kružnic, jichž středy opisují kružnice téhož poloměru dle rovnic (17)

$$(x - k \sin k_1 u)^2 + (y + k \cos k_1 u)^2 = c^2,$$
$$(x - k \sin k_1 v)^2 + (y - k \cos k_1 v)^2 = c^2$$

v případě, že úhel souřadný jest funkcí $(u + v)$, a

$$(x - k \cos k_1 u)^2 + (y - k \sin k_1 u)^2 = c^2,$$
$$(x - k \cos k_1 v)^2 + (y - k \sin k_1 v)^2 = c^2,$$

je-li úhel souřadný funkcí $(u - v)$. Pro $k = c$ obdržíme pak systém kružnic, jdoucích počátkem soustavy, které transformací reciprokými průvodiči přecházejí v přímky, dotýkající se téže kružnice a dělící rovinu v infin. rhomby.

V případě, že jedna ze souřadnic středů kružnic jest konstantní, na př. $V_1 = 0$, dává rovnice (3)

$$(18) \quad \begin{aligned} &\sqrt{U_1^2 + (U - V)^2}\,[U'(U - V) + U_1 U_1' + (U - V) V'] = \\ &= \sqrt{4c^2 - U_1^2 - (U - V)^2}\,[(U - V) U_1' + U_1 V' - U_1 U']. \end{aligned}$$

Rovnici tuto lze psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} &V'[(U - V)\sqrt{U_1^2 + (U - V)^2} - U_1\sqrt{4c^2 - U_1^2 - (U^2 - V^2)}] + \\ &+ [U'(U - V) + U_1 U_1']\sqrt{U_1^2 + (U - V)^2} + [U_1 U' - \\ &- U_1'(U - V)]\sqrt{4c^2 - U_1^2 - (U - V)^2} = 0. \end{aligned}$$

Dělíme-li výraz tento součinitelem při V' a derivujeme dle u, obdržíme po uspořádání dle mocností $U - V$ koëfficienty při prvních dvou mocninách tohoto výrazu ve tvaru

$$U''^2 + U_1''^2, \quad U_1'(U_1' U'' - U' U_1'').$$

Nemá-li býti V konstantou, musí koëfficienty uvedené vymizeti jednotlivě, z čehož jde pro U a U_1

$$U = k u, \quad U_1 = k_1 u.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (18), dostaneme podmínečné rovnice pro konstanty k, k_1

$$k_1^2 (k^2 + k_1^2) = 0, \quad (U - V)^2 (U' + V') = 0,$$

tudíž

$$k_1 = 0, \quad V = -k v.$$

K hodnotám těmto náleží systém kružnic, jichž středy leží na ose x-ové

$$(x - k\,u)^2 + y^2 = c^2, \qquad (x + k\,v)^2 + y^2 = c^2,$$

a jichž úhel souřadný dán výrazem

$$\cos(c\,\varphi_u - c\,\varphi_v) = 1 - \frac{k^2}{2\,c^2}(u + v)^2.$$

Dělí tudíž rovinu v infinitesimální rhomby systémy kružnic stejných poloměrů, jichž středy probíhají pevnou kružnici nebo přímku.

Ke konci ukážeme, jakým způsobem možno obdržeti souřadnice středů hledaných kružnic ze tvaru lin. elementu daného rovnicí (15)

$$d\,s^2 = \frac{f_1^2 + F}{4}(F\,d\,u_1^2 + f_1^2\,d\,v_1^2),$$

při čemž platí

$$f_1' = -\frac{f_1^2 + F}{4\,c}\sqrt{F}.$$

Jelikož totální křivost jest nullou, plyne další podmínka pro F, f_1

$$\frac{\partial}{\partial\,u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\,u_1}\right) = 0,$$

kde kladeno

$$e = F\,\frac{F + f_1^2}{4}, \quad g = f_1^2\,\frac{F + f_1^2}{4}.$$

Položíme-li $\sqrt{e} = \varphi'(u_1)$, dává poslední rovnice

$\sqrt{g} = k\,\varphi + k_1$, kde k, k_1 značí integrační konstanty. Vyjádříme F, f_1 pomocí g a φ, při čemž g jest funkcí φ

$$4\,(g + \varphi'^2) = (F + f_1^2)^2, \qquad 16\,g\,\varphi'^2 = f_1^2\,F\,(F + f_1^2)^2 = 4\,f_1^2\,F\,(g + \varphi'^2),$$

z čehož jde

$$f_1^2 = \frac{2\,g}{\sqrt{g + \varphi'^2}}, \quad f_1^2\,F = \frac{4\,g\,\varphi'^2}{g + \varphi'^2},$$

což dosazeno do rovnice

$$f_1' = -\frac{f_1^2 + F}{4\,c}\sqrt{F}$$

dává

$$\frac{d}{d\,u_1}\,\frac{g}{\sqrt{g + \varphi'^2}} = -\frac{\varphi'\sqrt{g}}{c},$$

a integrací

$$\frac{g}{\sqrt{g+\varphi'^2}} = k_2 - \frac{1}{c}\int \varphi' \sqrt{g}\, d\, u_1, \text{ neb}$$

$$\varphi' = \sqrt{\frac{g^2}{k_2 - \frac{1}{c}\int \varphi' \sqrt{g}\, d\, u_1} - g}\,.$$

Další integrací obdržíme

$$u_1 = \int \frac{\left(k_2 - \frac{k}{2c}\varphi^2 - \frac{k_1}{c}\varphi\right) d\,\varphi}{(k\,\varphi + k_1)\sqrt{(k\,\varphi + k_1)^2 - \left(k_2 - \frac{k}{2c}\varphi^2 - \frac{k_1}{c}\varphi\right)^2}}\,,$$

$$\frac{(\varphi_1 + 2\,k_1)\sqrt{2\,c^2\,k\,k_1 + 2\,c^2\,k\,\varphi_1 - \varphi_1^2}}{(c^2\,k + 2\,k_1)(k_1 + \varphi_1)} = \sin 2\,c\,k\,u_1.$$

Při tom kladeno

$c\,k$ místo k, k_1 místo $2\,c\,k\,k_2 + k_1^2$, $k_1 - \frac{k}{2}\varphi^2 = -\varphi_1$.

Vypočteme-li $\cos 2\,c\,k\,u_1$, obdržíme

$$\cos 2\,c\,k\,u_1 = \frac{c^2\,k\,\varphi_1 - \varphi_1^2 + c^2\,k\,k_1 - 2\,k_1\,q_1 - 2\,k_1^2}{(c^2\,k + 2\,k_1)(k_1 + \varphi_1)}\,,$$

a z toho

$$\sqrt{k}\,\varphi = \sqrt{\frac{c^2\,k - (c^2\,k + 2\,k_1)\cos 2\,c\,k\,u_1 + 2\,k_1}{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{c^2\,k - (c^2\,k + 2\,k_1)\cos 2\,c\,k\,u_1 - 2\,k_1}{2}}$$

$$= \sqrt{c^2\,k + 2\,k_1}\,\sin c\,k\,u_1 \pm \sqrt{(c^2\,k + 2\,k_1)\sin^2 c\,k\,u_1 - 2\,k_1}\,.$$

Rozvineme-li plochu lin. elementu (15) do roviny, kladouce

$$x + \imath\, y = \varphi\,.\,e^{\imath\, c\, k\, v_1},$$

obdržíme jako rovnice hledaných křivek

$$x = \varphi\,(u + v)\cos c\,k\,(u - v) \quad , \quad y = \varphi\,(u + v)\sin c\,k\,(u - v).$$

Rovnice tyto jsou aequivalentní s rovnicemi

$$\left(x - \sqrt{\frac{c^2\,k + 2\,k_1}{k}}\sin 2\,c\,k\,u\right)^2 + \left(y + \sqrt{\frac{c^2\,k + 2\,k_1}{k}}\cos 2\,c\,k\,u\right)^2 = c^2\,,$$

$$\left(x - \sqrt{\frac{c^2\,k + 2\,k_1}{k}}\sin 2\,c\,k\,v\right)^2 + \left(y - \sqrt{\frac{c^2\,k + 2\,k_1}{k}}\cos 2\,c\,k\,v\right)^2 = c^2.$$

a tím přicházíme k výsledkům předchozím.

Anatomický podklad poklepového ztemnění slezinného.

Napsali

Prof. Dr. L. SYLLABA a Prof. Dr. K. WEIGNER.

S 34 obrazy textovými.

Předloženo dne 12. června 1914.

I.

Dějiny nauky o poklepu sleziny vykazují dvě doby. Prvá zavedla perkussi sleziny mezi vyšetřovací methody interně lékařské, obstarala první orientační srovnání mezi nálezem poklepovým a daty topograficko-anatomickými, ukázala již sice na obtíže methody, ale v celku přehodnotila její spolehlivost. Druhá si to uvědomila, slevila se svých požadavků a vytkla methodě užší cíle. Určitěji řečeno, badatelé prvé doby troufali si promítnouti poklepově celou slezinu na stěnu hrudníkovou, v její přední i v zadní části, v jejím nástěnném i v jejím hlubokém, plicemi přikrytém oddíle; naproti tomu badatelé druhé doby nahlédli nesnadnost a bezvýslednost takového počínání a omezili se na to, určovati poklepem jen onu část sleziny, která ke stěně tělesné přímo přiléhá, jinými slovy, hledati poklepem jenom povrchní, nikoli hluboké ztemnění slezinné. Piorry, který se všeobecně jmenuje jako první, kdo slezinu klepal, zahajuje řadu prvých badatelů. Věřil, že v největším počtu případů lze poklepem tak zv. nepřímým zjistiti polohu, formu a velikost, ba i tloušťku sleziny (la situation, la forme et le volume de la rate). A třeba na jiném místě doznával, že „ohraničiti poklepově slezinu do zadu jest nejčastěji nemožno", jsou všecky jeho spisy (od r. 1827 do r. 1866) proniknuty přesvědčením že dokonalý poklepový průmět sleziny v celé její kontuře na stěnu tělesnou jest nejen věcí možnou, nýbrž že jest to úkol, o který jest se pokusiti v každém případě. Stejný v celku názor zastávali písmem resp. slovem Mailliot, Siebert, Hamerník, Conradi, Bamberger, Jos. Meyer, Friedreich, Bartels, Jürgensen,

Quincke. Ale již obě svého času velice oblíbené příručky, Niemeyerova a Gerhardtova znamenají do jisté míry obrat. Nedávají mu sice výrazu přesnou a jasnou slovní formulací, ale i tak ze spojení vyplývá, že oba autoři před perkussí horního polu sleziny resp. před problemem poklepového průmětu sleziny in toto na stěnu tělesnou zjevně couvají. Co jest v obou těchto učebnicích jen naznačeno, jest rozvedeno v práci Schusterově (z r. 1866) a kriticky doloženo v knize Weilově (I. vyd. z r. 1877, II. z r. 1880), které znamenají konec prvé a počátek druhé doby v dějinách nauky o perkussi sleziny. Jmenovitě Weil, opíraje se jednak o vlastní klinickou a učitelskou činnost a o četné záznamy z kursu diagnostických, jednak o kritický rozbor stěžejních prací období prvého, t. j. prací Piorryových, Conradiových a posléze Meyerových, vystoupil rozhodně proti oprávněnosti tak zv. hlubokého ztemnění slezinného. Podle jeho názoru jest poklep horního zadního, plicemi přikrytého oddílu sleziny podnikem klamavým. Následkem toho není možno poklepem stanoviti ani podélný průměr sleziny, tím méně promítnouti ji v celé její kontuře na stěnu hrudníku. Najde-li se při dolním okraji levých plic nějaké ztemnění, není podle Weila se slezinou v nižádném vztahu a nezaslouží, aby bylo označováno jako hluboké ztemnění slezinné. Učení Weilovo setkalo se téměř s obecným souhlasem. Mosler v Ziemssenově, Litten v Nothnagelově souboru speciální pathologie vnitřních chorob, dále badatelé Oestreich a de la Camp, ještě později citovaní, jakož i autoři známých učebnic o vyšetřovacích methodách Eichhorst, Vierordt, Guttmann-Klemperer, Sahli, upustili vesměs od snahy, vyklepati slezinu in toto. I jest to po knize Weilově snad jediný Edlefsen, který ve své příručce (z r. 1899) tvrdí, že lze hluboké resp. relativní ztemnění sleziny ve většině případů zcela dobře určiti. Pokud víme, zustává jeho hlas ojedinělým a zvláště v posledních letech nebudí nikde ozvěny.

Avšak reakce jde dále. Ani to omezení, které poklepu sleziny doba dala ve smyslu právě naznačeném, neuspokojilo některých badatelův. Stále více se zdůrazňují potíže, se kterými jest methoda ta spojena (nejen pro sousedství plic, nýbrž i levé ledviny, žaludku, tlustého střeva, nad to pro tenkost sleziny samotné), nesnáze, o kterých se od počátku vědělo, ale kterých se nikdy nelze s dostatek doměřiti. Srovnává se dále význam perkusse sleziny jakožto methody vyšetřovací s významem starší její družky, palpace a srovnání vychází na prospěch palpace. Podle Vierordta jest pohmat „die weitaus wichtigste Untersuchungsmethode," jelikož jeho výsledek svádí méně snadno k falešnému výkladu, než výsledek perkusse sleziny. Podle Eichhorsta jest tato spojena s velkými potížemi, nezřídka prý soudíme na zvětšení sleziny, kde ho není, a je dobře, rozpoznati je jen tenkrát, kde lze orgán hmatati. Také Sahli shledává za všech okolností výsledky pohmatu sleziny spolehlivějšími než výsledky poklepu. Rovněž Leube považuje palpaci za methodu,

která jediná skýtá při vyšetřování sleziny výsledky opravdu spolehlivé. Porovnáváním obojích palpačních i poklepových poměrů s posmrtnými seznalo se na Leubeově klinice, že se nález palpační nesrovnává s anatomickým jen ca ve 20%, poklepový však ve 40% případů. Opíraje se o mnohaletou zkušenost, pokládá Leube zvětšení sleziny, které se dá stanoviti jen poklepem, ale pohmatu je nepřístupno, při nejmenším za pochybné. Též Litten s důrazem vytýká, že klade na perkussi sleziny pouze malou váhu. A nejnověji z anglické literatury Hutchison a Rainy označují pohmat jako „really the most important method of investigating the spleen"; a dále píší: „it is never safe to diagnose enlargement of the spleen unless it is palpable". Jaký to rozdíl od představ, které o ceně poklepu sleziny měl a ve svých knihách vykládá Piorry!

Stejný myšlenkový vývoj, jaký se podle právě podaného historického náčrtu odehrával v literatuře světové, lze postřehnouti na naší domácí půdě, na lékařské škole pražské. Citovali jsme svrchu Hamerníka jakožto jednoho z těch, kdož věřili, že lze vyklepati horní konec sleziny. Z jeho práce o tyfu břišním z r. 1846 vysvítá, že při normální velikosti sleziny páčí šířku oblasti s jasným plicním zvukem poklepovým mezi příslušnými trny a horním polem sleziny něco více než na 2 palce, u prudkého nádoru sleziny při tyfu jen na 1 až 1½ palce, ale teprve u enormně velkých, chronických nádorů sleziny že jej redukuje na nullu. Eiselt nás sice neučil perkussi horního, plicemi krytého oddílu sleziny, ale jinak, podobně jako Hamerník, cenil si perkussi sleziny, zvláště jako diagnostické vodítko u tyfu břišního, velice a dbal přísně toho, aby byla jeho žáky náležitě cvičena. Tradici Eiseltovu přejal Maixner. Naproti tomu Thomayer posuzoval ode vždy poklep sleziny zcela skepticky, ba možno říci, že jej systematicky téměř vůbec nekonal a nekoná a obrací všechen zřetel svůj i svých žáků jediné k pohmatu.

II.

Jako odchovanec Thomayerův a jako učitel nauky o poklepu položil si starší z nás otázku: *Jak dalece jest tato nedůvěra v perkussi sleziny oprávněna a jaký jest vlastně anatomický podklad ztemnění, které možno nalézti pod dolním okrajem levých plic v levém hypochondriu?* Otázka tato dala podnět k přítomné práci, kterou však dlužno posuzovati jen jako jednu část pracovního plánu, rozvrženého především za tím účelem, aby učitel nauky o poklepu nabyl o *základních pojmech topografické perkusse ztemnění orgánových* (jako jsou povrchní a hluboké ztemnění srdeční, ztemnění jaterní a slezinné) vlastní samostatné představy.*)

*) První prací sem spadající byla práce: Syllaba-Sieber, Poklep srdce ve světle orthodiagrafie ve XIV. (XVIII.) roč. Sborníku Lékařského. Další práce: Syllaba-Weigner budou následovati.

Ověřování poklepového nálezu v krajině sleziny jest a priori myslitelno na několikerý způsob (viz později). Způsobem nejdůležitějším jest *srovnávání jeho s nálezem topograficko-anatomickým na mrtvém těle.* Spojiti se k takovému nekroskopickému přezkumu s topografickým anatomem podporuje jistě objektivnost celého studia a může býti věci jen na prospěch. Není pak to, mimochodem řečeno, jen applikovaná nauka, která si z takovéhoto spojení odnáší podstatný zisk, nýbrž též věda theoretická, anatomie sama. Anatom naučí se znáti potřeby klinika i kam má ve svém povolání jako učitel medicinské mládeže obraceti hlavní její zájem a jak připraviti nejlépe půdu další její výchově klinické. Tímto duchem byli jsme vedeni při svém díle i my.

V literatuře existují již záznamy, které porovnávají poklepový nález v krajině sleziny na mrtvém těle zakreslený s nálezem topograficko-anatomickým po otevření těla. Dočítáme se o nich v knize Piorryově z r. 1827, v práci Jos. Meyera z r. 1876 a ve studii Oestreicha a de la Campa z r. 1905.

Piorry uvádí tyto pokusy:

První pokus. Nepřímým poklepem zjištěno na hubené mrtvole v krajině sleziny ztemnění zvýši 4 palců a zšíři 3 palců. Oblast ztemnění byla ohraničena nahoru poklepem plicním, navnitř a naven poklepem žaludečním, dolů poklepem střevním. Vbodly se čtyři jehly v bodech, kde byl znamenán rozdíl zvuků poklepových. Při pitvě se našlo, že je slezina oněmi čtyřmi jehlami přesně ohraničena („. . . genau umschrieben"). Vykazovala týž objem, který byl zvenčí určen, a orgány ji obklopující srovnávaly se s příslušnými rozdíly zvuku poklepového.

Druhý pokus. Na mrtvole tučné paní našli Piorry a Jules de Dervieu v krajině sleziny ztemnění zvýši 4 palců a zšíři 3 palců. Bylo ohraničeno shora plicním poklepem, s ostatních stran bubínkovým poklepem různého odstínu. Čtyři špendlíky zabodnuté kolem ztemnění ohraničovaly slezinu přesně („umschrieben . . .genau"). Její objem byl takový, jak byl před pitvou určen.

Třetí pokus. Piorry, Manec, Miquel odlišili ztemnění slezinné od méně vyznačeného, tuberkulosou podmíněného ztemnění plicního. Při pitvě se ukázalo, že čtyři jehly ohraničovaly slezinu přesně („umgaben . . . . genau") a že její rozměry byly a priori správně odhadovány („richtig geschätzt").

Čtvrtý pokus. Na mrtvole mladé ženy s ascitem nalezeno ve krajině sleziny ztemnění v rozsahu 4 palců shora dolů a 3 palců se strany na stranu. Oblast jeho byla vymezena čtyřmi jehlami, které, jak se při pitvě ukázalo, slezinu přesně ohraničovaly („genau . . . umgränzten"). V dutině břišní 1½ litru tekutiny.

Pátý pokus. Také za přítomnosti 3 litrů ascitické tekutiny v dutině břišní zjistila pitva, že byl objem sleziny poklepem správně posouzen („. . . . richtig . . . beurtheilt").

Na mnohých jiných mrtvolách provedl Piorry, jak dále píše, obdobné pokusy se stejným výsledkem, ať šlo o těla hubená nebo tučná, o slezinu velkou nebo malou. Několik chyb („einige Irrthümer") stalo se prý však přece. Ukázky dvou uvádí Piorry v kapitole jednající o poklepu ledvin.

Prvý pokus. Na mrtvole staré hubené ženy byl v místě obvyklého ztemnění slezinného poklep bubínkový; ztemnění nenašlo se nikde mimo krajinu levé ledviny a to zvýši 3½ palce a zšíři dvou palců. Ač Piorry hned poznamenal, že to není ani místo ani rozměry slezině příslušející a že, kdyby to byla slezina, musila by býti malá, zabodl kolem určeného ztemnění jehly v očekávání, že najde tam při pitvě slezinu. Byla tam však levá ledvina, jehlami přesně ohraničená. Slezina byla velmi malá a velmi tenká, od stěny tělesné kličkami střevními oddělená.

Druhý pokus. Také zde byla místo sleziny vyklepána levá ledvina, která prý byla posunuta výše než obyčejně, jsouc téměř zcela („fast ganz") uložena v krajině sleziny. Nad to byla slezina velmi malá, plíce infiltrované, v dutině břišní ascites.

Celkem podává tedy Piorry pouze sedm ukázek svých pokusů poněkud podrobněji. Ve dvou z nich selhala perkusse sleziny nadobro, místo sleziny byla vyperkutována levá ledvina. U ostatních pěti udává Piorry souhlasně, že oblast kontrolovaného ztemnění poklepového ohraničovala přesně slezinu resp. že se kryla s objemem sleziny, ač ve dvou z nich šlo o současné nahromadění volné tekutiny v dutině břišní, kterým se přece podle našeho dnešního nazírání (srv. Mosler str. 56, Guttmann-Klemperer str. 358, Maixner str. 151) poklep sleziny stěžuje. Než vzhledem k tomu, že ascitické tekutiny nebylo poměrně mnoho a že Piorry u vodnatelnosti břišní měl za pravidlo perkutovati při poloze na pravé straně nebo na břiše, nechceme udaje Piorryovy bráti v pochybnost a nechceme oba příslušné případy z průkazového materiálu Piorryova vylučovati. Neboť i tak jest materiál Piorrym protokolně doložený skrovný a všeobecnou větou, podle které „na mnohých jiných mrtvolách byly provedeny obdobné pokusy se stejným výsledkem", nenabývá v našich očích dostatečné opory. A to tím méně, ano dále chybí přesné a jasné udání o tom, jakým způsobem se verifikace po otevření mrtvoly dála, zda pohledem a hmatem do dutiny břišní v oblast jehlami vyznačenou nebo po vynětí sleziny z těla nebo methodou okénkovou anebo postupnou anatomickou praeparací celé příslušné krajiny zvenčí. Tato neúplnost není pak bez významu, jak později vysvitne.

Bohatším jest materiál, na kterém Jos. Meyer porovnával poklepový nález v krajině sleziny s nálezem nekroskopickým, ale tak, jak jest zpracován, nepodává nám rovněž uspokojivé odpovědi na otázku, jakou měrou spolehlivosti vyznačuje se perkusse sleziny. Meyer prováděl na mrtvolách pokusy dvojího druhu. Prvé konal na způsob Piorryův, vbodávaje na poklepových hranicích slezinného ztemnění do

hloubi jehly, a zjistil, že u řady případů zadní oddíl sleziny v délce 4—5½ *cm* poklepu uniká. Přes tento poznatek patří Meyer, jak již z historického úvodu víme, mezi ty, kteří uznávají oprávněnost hlubokého ztemnění slezinného. V hoření zkušenosti tkví prý sice podle něho zdroj chyby pro správné určení podélného průměru sleziny, chyby, které se nikdy nelze úplně vyhnouti, ale která prý přece nemá takového významu, jak by se předem dalo souditi. To podle mínění Meyerova dokazují pokusy druhé jeho serie pokusové. Na 50 mrtvých tělech měřil totiž kružítkem podélný a šířkový průměr ztemnění slezinného před otevřením těla na kůži zakresleného jakož i podélný a šířkový průměr sleziny z těla vyňaté a rozdíl z příslušného srovnání plynoucí zaznamenal ve zvláštní tabulce. Tabulka tato jest beze vší přehlednosti a chceme-li výsledky pokusů Meyerových jasně přehlednouti a posouditi, nezbývá, než abychom si jeho číslice sestavili sami.

Rozdíly mezi podélným resp. příčným průměrem slezinného ztemnění a podélným resp. příčným průměrem sleziny z těla vyňaté podle pokusů Jos. Meyera:

Rozdíl v *cm*	Průměru podélného				Průměru šířkového			
	—	+	dohromady		—	+	dohromady	
0	—	—	4		—	—	7	
do 0·5	1	4	5	17	3	3	6	18
do 0·75	4	4	8		—	5	5	
do 1	3	2	5		5	3	8	
do 1·5	—	4	4		1	3	4	
do 2	1	8	9		1	5	6	
do 2·5	2	2	4	33	—	3	3	32
do 3	—	6	6		1	8	9	
do 4	—	3	3		—	2	2	
do 4·25	—	2	2					
			50				50	

(Podotknouti dlužno, že v obou tabulkách udávají čísla označená kladným znaménkem (+) míru, o kterou jest příslušný průměr poklepového ztemnění slezinného větší než průměr sleziny z těla vyňaté, čísla pak označená záporným znaménkem (—) míru, o kterou jest průměr ztemnění menší než průměr sleziny.)

Jak máme na základě obou hoření tabulek posuzovati výsledky pokusů Meyerových? V práci, ve které jeden z nás s dr. Sieberem srovnával srdeční ztemnění s orthodiagrammem, byl prohlášen nezda-

řilým ten nález poklepový, kde difference mezi hranicemi ztemnění a orthodiagrammem přesahovala 0·75 *cm*. Kdybychom se stejným měřítkem posuzovali i číslice Meyerem zjištěné, shledalo by se, že podélný průměr sleziny byl nesprávně vyklepán v 33, příčný v 32 případech resp. v 66% a ve 64% daného materiálu. Jinými slovy shledalo by se, že se poklep sleziny v obou průměrech daří nepoměrně hůře než poklep srdce na levých jeho hranicích (zdařilý v 65%). S chybou sahající nad 2·5 *cm* do 4 resp. 4·25 *cm* byl J. Meyerem perkutován podélný průměr sleziny v 11 případech, příčný rovněž v 11 případech z 50, tedy ve 22%; kteréžto procento blíží se onomu, v jakém se chyba sahající nad 2·5 *cm* až 4 resp. 5 *cm* objevuje při perkussi pravostranných hranic srdečních (25%). Tedy i kdybychom uznali, že číslice Meyerovy stačí k tomu, aby mohly býti srovnány poklepové a anatomické poměry sleziny, nemůže jimi býti důvěra ve spolehlivost perkusse tohoto orgánu nikterak posilována. A nechápeme, mimochodem řečeno, jak se mohl Meyer na výsledky druhé své serie pokusové odvolávati, když chtěl seslabiti výsledky serie prvé.

Avšak upíráme dále pokusům Meyerovým vůbec všechen podstatnější význam pro řešení otázky, jakou měrou spolehlivosti vyznačuje se poklep sleziny. Z různých důvodů. Předem poloha, ve které slezina v těle leží a kterou se perkusse na povrch těla promítnouti snaží, jest jiná než poloha sleziny položené na stole pitevním; zde se slezina, abychom tak řekli, rozprostře a oba její poly se od sebe více oddálí než tomu jest v těle, kde se slezina přimýká k zaoblené ploše žeber resp. bránice. Dále! Srovnání anatomických průměrů s průměry poklepovými neříká nám ničeho o tom, v jakém bližším anatomickém vztahu jsou k sobě perkutovaný orgán a vyklepané ztemnění. Rozdíl v měrách může býti nepatrný nebo žádný a přece nemusí býti slezina správně vyperkutována: na jedné straně může býti totiž k jejímu ztemnění přidáno ztemnění od sousedního nějakého útvaru, na druhé pak může býti od něho zase ubráno jasným resp. bubínkovým poklepem ze sousedství; ba mohlo by se státi, že se míry vyklepaného ztemnění shodují s měrami sleziny, ale ztemnění leží jinde než kde leží slezina. Sem patří také poznámka Weilova. Weil shledával nápadným, že poklepová šíře sleziny byla v pokusech Meyerových nápadně často mnohem větší než šíře anatomická. V 13 z 50 případů obnášela difference více než + 2 *cm*, totiž 3krát 2·3 *cm*, 6krát 2·6 *cm*, 2krát 2·9 *cm*, 1krát 3·5 *cm* a 1krát 3·9 *cm*. Vykládal si to tím, že J. Meyer připočítával v těchto případech ke ztemnění slezinnému relativní ztemnění (resp. méně jasný poklep) nad dolním okrajem plic, které se tu ve střední a přední čáře pažní může naskytnouti i na místech, kde již za plicemi sleziny není.

Zkrátka znalost anatomických průměrů se nekryje se správnou anatomickou představou o poloze sleziny i jejího poklepového ztemnění a jen na základě té můžeme přece řešiti otázku o spolehlivosti perkusse daného orgánu.

Nejnověji spojili se za účelem studia této otázky internista d e l a C a m p a pathologický anatom O e s t r e i c h, z nichž prvý perkutoval, druhý obstarával anatomickou kontrolu. Podobným způsobem studovali i jiné otázky na př. ztemnění srdeční, jaterní atd. Ve příčině přítomného předmětu píší ve své knize: „Was nun die Ergebnisse der Milzperkussion betrifft, so erscheinen uns die verschiedenen Angaben der Untersucher über den Erfolg in Rückenlage, Seitenlage etc. so widerspruchsvoll, daß wir selbst zahlreiche Untersuchungen angestellt haben. Dieselben erstreckten sich auf viele Hunderte von Leichen und gestatten uns bezüglich der Perkussion in Rückenlage folgendes zu sagen: Die Perkussion der Milz in Rückenlage gelingt nicht nur leicht und ohne Mühe, sie liefert auch vorzügliche Resultate. Was über den Magen, Darm etc. und die störende Wirkung dieser Teile gesagt wird, trifft nicht im mindesten zu. Wir haben so oft exakt geprüft und unser Resultat so konstant gefunden, daß wir dafür einstehen können und nunmehr etwaige Fehler der Methodik des Untersuchers zur Last legen. Wir meinen natürlich die absolute Milzdämpfung (= wandständigen Theil der Milz). Die Lage der Milz und ihres vorderen Pols, durch die perkussorischen Ergebnisse festgestellt, stimmte stets genau mit dem Leichenbefund nach eröffnetem Abdomen überein, wie es genauer nicht verlangt und erreicht werden kann.“ . . . „Auch die Diagonallage lieferte uns gute Resultate. Der Füllungszustand des Magens störte bei der Perkussion der Milz uns nicht im mindesten, viel eher könnte einmal das Colon hinderlich sein.“ Podrobné protokoly pokusné nebyly nikde uveřejněny. Rovněž nikde není do podrobna udán způsob, jakým kontrola prováděna. Za těch okolností nezbývá nám, než vzíti svrchu citované vyjádření O e s t r e i c h a a d e l a C a m p a na vědomost, respektovati v něm osobní dovednost perkutujícího i subjektivní přesvědčení obou autorů, ale zároveň dáti výraz lítosti, že není doloženo materiálem, jehož rozbor by mohl každý a každé chvíle objektivně předsevzíti.

Vůbec pak z celé naší úvahy o příslušných pracích P i o r r y h o, J. M e y e r a, O e s t r e i c h a a d e l a C a m p a vyplývá, že otázka spolehlivosti poklepu sleziny nebyla dosud řešena způsobem objektivně úplně ji objasňujícím a uspokojujícím. Materiál P i o r r y ů v jest číselně příliš skrovný; materiál M e y e r ů v nepoučuje nás o hlavní věci t. j. o topograficko-anatomických vztazích mezi ztemněním a orgánem; materiál pak O e s t r e i c h a a d e l a C a m p a jest sice číselně imponující, ale nikde není do detailu uveřejněn a objektivní kritice přístupen. Je zjevno, že, má-li býti otázka spolehlivosti poklepu sleziny uspokojivě řešena, nutno při studiu jejím zachovávati direktivu, která plyne z práce předchůdců. A to: materiál použitý musí býti číselně bohatší než P i o r r y ů v; v každém jednotlivém pokuse musí býti získána přesná anatomická představa o topografických vztazích mezi ztemněním a orgánem i jeho okolím; konečně v každém jednotlivém případě musí býti nález, vyjádřující poměr mezi ztemněním a orgánem, nakreslen. Neboť jenom tak docílí se toho, aby

každý jednotlivý nález byl pro paměť badatelovu do budoucna pokud možno nesetřeně zachován, jakož i aby také čtenáři byl učiněn názorným a jeho objektivní kritice přístupným.

Ale ani na okamžik nechceme pouštěti s mysli to, co jeden z nás vytkl již v práci porovnávající poklepový nález srdce s orthodiagrammem t. j. nechceme zapomínati na *subjektivní povahu perkusse*. Shledáme-li tedy při pokusech kontrolujících poklep sleziny, že se perkutující dopouští takových a takových pozorovacích chyb, padají tyto i zde především na jeho vlastní vrub. A opakujeme, co jsme napsali již v práci svrchu citované: „Jiný, kdo ovládá perkussi lépe t. j. kdo má jemnější sluch a hmat a vtipněji kombinuje, může pracovati s menšími chybami." A dále: — „Má tedy každá práce, která se snaží nějak objektivně ověřiti výsledky poklepu, sama o sobě cenu nikoliv absolutní pro všechny, nýbrž jen poměrnou. V prvé řadě pro toho, kdo ji sám dělal, v druhé řadě pro ty, kdož poklep jako methodu aspoň přibližně stejně ovládají. Nejspíše tedy asi pro žáky jedné školy." To platí a priori. A posteriori ukážeme ještě, že se platnost poznatků naším studiem získaných rozšiřuje přece i na další kruhy.

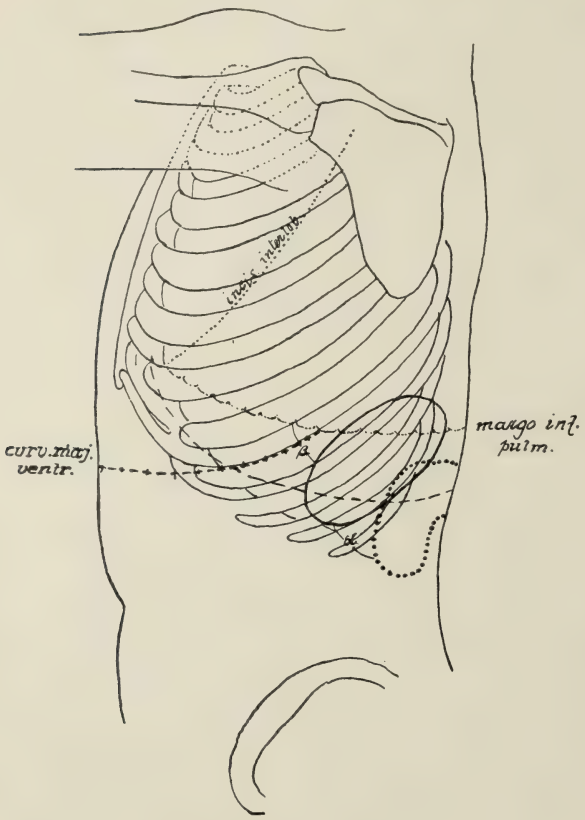
III.

Pro řešení dané otázky byla v předešlé kapitole zdůrazněna důležitost správné anatomické představy o topografických vztazích mezi ztemněním a orgánem. Než tedy přejdeme k podrobnému rozboru vlastního materiálu, dlužno si na mysl přivésti data o topografické anatomii sleziny.

Se zřetelem k poklepu zajímá nás tu ze tří ploch sleziny jediné facies diaphragmatica a z obou jejích polů pol dolní, extremitas inferior. Facies diaphragmatica jest největší plocha slezinná, spočívající na 9.—11. žebru a svou nejdelší osou rovnoběžná se žebry; slezina směřuje totiž svou podélnou osou shora a mediálně dolů a laterálně, sledujíc tak směr žeber. Na povrch těla promítá se největší průměr slezinný od articulatio costotransversaria X. žebra ventrálně v délce 13 *cm* směrem svrchu řečeným až do středobodu šířkového rozměru X. mezižebří (Testut-Jacob). Jinými slovy: z obou polů sleziny jest u articulatio costotransversaria X. žebra umístěn pol horní, extremitas superior, ventrálně pak od něho ve vzdálenosti 13 *cm*, měřené podle průběhu IX.— XI. žebra, zakončuje slezinu pol dolní, extremitas inferior. V poměru k obvyklým, při poklepu užívaným čarám orientačním říká se také, že horní pol sleziny je vzdálen od zadní střední čáry 3—3½ *cm*,*) dolní pol pak že přesahuje střední čáru

*) Udání anatomů o vzdálenosti horního polu sleziny od zadní střední čáry nechce jíti Edlefsenovi na rozum. Uvažuje takto. Největší šířka a tudíž střed ztemnění slezinného dá se konstatovati v zadní nebo ve střední čáře pažní anebo v čáře uprostřed mezi oběma. Zadní čára pažní jest 16 až 20 *cm*, střední 19 až 23 *cm* vzdálena od čáry vertebrální. Možno prý tudíž říci, že střed slezinného ztemnění u dospělé osoby jest od zadní střední čáry vzdálen 18 až 21 *cm*, dorsální pak okraj tohoto ztemnění že jest od téže čáry vzdálen 12 až 15 *cm*. Na základě těchto číslic

pažní ventrálně o $1\frac{1}{2}$—3 *cm* (T e s t u t) a že pravidlem nepřesahuje tak zv. čáry kostoklavikulární nebo sternokostální t. j. čáry vedené od articulatio sternoclavicularis ke hrotu XI. žebra.) Od oblouku žeberního jest dolní pol sleziny vzdálen 4—6 *cm*. Kraniálně sahá slezina svým předním okrajem, margo anterior, k hornímu okraji IX. žebra nebo až k dolnímu okraji VIII. žebra, kaudálně sleduje její zadní okraj, margo posterior, v celku XI. žebro. Šířka sleziny t. j. největší vzdálenost mezi předním a zadním okrajem obnáší 8 *cm*.



I. Schema podle W e i l a.
α = Milznierenwinkel, β = Milzlungenwinkel.

Z celé facies diaphragmatica přiléhá *dolní* její oddíl přímo ke stěně hrudní, jsa od ní oddělen pouze bránicí, resp. chobotem pohrudnicovým, sinus phrenicocostalis, jehož hranice jsou dány horizontálou taženou od hlavičky XII. žebra; *horní* oddíl jest kromě mocné vrstvy svalů zádových zakryt plicemi, jejichž dolní okraj vystupuje od hlavičky XI. žebra lehce šikmo vzhůru vpřed. Vzájemný poměr těchto dvou oddílů, nástěnného a hlubokého, pokud jde o velkost jejich plochy, závisí na hloubce pohybů dýchacích (resp. na tom, jak daleko jest vyplněn sinus phrenicocostalis plicemi). Při klidném, lehkém dýchání jest podle odhadu W e i l o v a facies diaphragmatica (obr. I) asi ze dvou třetin nástěnná, z jedné třetiny plicemi kryta; podle T e s t u t a je facies diaphragmatica ze dvou pětin plicemi kryta. Zakryty jsou plicemi horní pol, značná část předního a menší část zadního okraje sleziny. Zadní okraj sleziny vykazuje mimo to ještě jiný důle-

představuje si E d l e f s e n, že jest horní pol sleziny od páteře vzdálenější, než učí anatomové. A chybuje při tom potud, pokud poměry týkající se poklepového průmětu sleziny na stěně tělní přenáší na orgán sám. Zcela správně poznamenává v té příčině G e r h a r d t (III. vyd. str. 150): „Bei Messung der Percussionsgrenzen von Milztumoren oder der normalen Milz sind die Maasse nur sehr vorsichtig zu beurtheilen, da die Dicke und Biegung der Costalwand einen sehr großen Einfluß auf dieselben hat und stets mitgemessen wird." Nad dlouhý výklad poučí nás o tom prostý pohled na anatomický praeparát, představující horizontální průřez příslušnou krajinou.

žitý vztah topografický; spočívá totiž na vnějším okraji levé ledviny a to v rozsahu od horního polu ledviny až do prostřed laterálního jejího okraje. Ostrý úhel, který svírá přední okraj sleziny s dolním okrajem plic, byl nazván *Leichtensternem* „Milzlungenwinkel"; jeho vrchol při stoji spadá asi do zadní čáry pažní, při poloze na pravém boku sune se téměř až do přední čáry pažní (dolní okraj levých plic sestoupí tu níže); v úhlu tom jsou uloženy žaludek a flexura coli lienalis. Úhel, který svírá zadní okraj sleziny s laterálním okrajem ledviny, byl od téhož badatele pojmenován „Milznierenwinkel", v něm pak má svou polohu colon descendens. Poblíž dolního polu sleziny jakož i podél předního okraje jejího bývá uloženo omentum majus, mnohdy silně tukem prorostlé a objemný chuchvalec v uvedených místech představujíc (*Luschka, Braune*).

Slezina jest orgán dosti pohyblivý, neboť jest ve své poloze udržována toliko řasami peritoneálními (lig. gastrolienale, lig. phrenicolienale, vlastní to lig. suspensorium lienis, lig. colicolienale, lig. pancreaticolienale). Není tedy s podivem, že se poloha sleziny mění: při inspiraci klesá až o šířku mezižebří, naplněný žaludek ji táhne do polohy vodorovné, roztažené colon ji vytlačuje nahoru; samozřejmě závisí její poloha i na poloze těla.

Předeslaná topograficko-anatomická data činí nám pochopitelným historický vývoj nauky o poklepu sleziny i připravují nás na obtíže, se kterými bude také nám při našem studiu počítati. Při skrytém uložení horního polu a vůbec celého horního oddílu sleziny a při poměrné tenkosti orgánu, který co do tloušťky neměří více než $2\frac{1}{2}$—4 *cm*, dalo se vlastně předem čekati, že se stroskotá snaha těch, již usilovali vyperkutovati i horní oddíl sleziny t. j. určiti poklepem slezinu celou. Musilo se dále postupem času přijíti k názoru, že také na těch místech, kde se stýká slezina s ledvinou a kde ztemnění slezinné přechází ve ztemnění lumbální, není vůbec možno vyklepati hranice sleziny. A v důsledcích toho musila se ukázati jako pochybnou i snaha těch, kteří jako na př. Guttmann omezovali se sice při poklepu sleziny na povrchní ztemnění slezinné, ale dokreslovali je i vzadu v obrazec uzavřený, v uzavřený ovál. Schuster r. 1866, Weil r. 1874 a Gerhardt r. 1876 (III. vyd.) spokojili se proto při perkussi sleziny vyklepati *ztemnění do zadu otevřené* (Schuster: ... einen von drei Seiten eingeschlossenen Raum, der nach hinten offen ist; Weil: ... eine nach hinten offene Dämpfungsfigur; Gerhardt: obr. 14 a 16 ze III. vydání jeho příručky). Tím způsobem byl znenáhla úkol poklepu sleziny omezen na určení dolního jejího polu a k němu nejblíže přiléhajících částí předního a zadního okraje (Mosler str. 53).

Jest zajímavo sledovati na udajech číselných, kterak se cíle dané methody nenáhle súžovaly. Z orgánu, který si troufali Piorry, Hamerník, Bamberger a j. vyklepávati in toto, u kterého si však již Gerhardt a Niemeyer netroufají výslovně stanoviti, jak velký jeho díl poklepově určují, vymítá Weil jednu třetinu z poklepového určení a limine, ze zbývajících pak dvou třetin považuje ještě hodný kus

za nezjistitelný t. j. zadní okraj, pokud spočívá na ledvině. Na to Mosler pokládá jen polovinu sleziny za přístupnou perkutujícímu prstu. Seitz pak se již vyslovuje, „. . . daß etwa nur das untere Drittel der Milz in seinem unteren Umfange percutirbar ist."

A to vše platí o případech pro perkussi sleziny ***příznivých***. Již a priori dalo se však se stanoviska topografické anatomie očekávati a klinická zkušenost to také plně potvrdila, že dosti často se naskytují poměry pro perkussi sleziny ***nepříznivé***. Ztemnění slezinnému jakožto průmětu sleziny na stěnu tělesnou může býti totiž ze sousedství poklepem buď *přidáno* nebo *ubráno*.

Přidáno za těchto okolností: a) je-li žaludek naplněn potravou, b) colon skybaly, c) je-li mocněji vyvinuto resp. silně tukem prorostlé omentum majus, nač upozorňují Leichtenstern, Mosler, Meyer, Weil, Eichhorst, Vierordt, d) je-li levý lalok jaterní zvětšen, e) jsou-li při hranicích sleziny s plicemi změny na plicích podmiňující ohraničené ztemnění (adhaese pleurální, ohraničené infiltráty ve tkani plicní), f) jsou-li obdobné, k ohraničenému ztemnění vedoucí změny při dolních hranicích sleziny (nádory vycházející z ledviny, z colon descendens). Prvé tři okolnosti (a, b, c) mohou se vyskytovati u lidí zcela zdravých. Vierordt, uváděje je jako příčiny, pro které i při normální slezině zdravých lidí bývá ztemnění slezinné zvětšeno, dodává, že se tak někdy stává i „ohne dass derartiges vorliegt."

Ubráno může býti ztemnění slezinnému předem tenkrát, vsune-li se mezi slezinu a bránici colon nebo jiná část roury střevní; Sahli s touto možností počítá, podle zkušeností Oestreichových dochází k ní však vzácně.*) Podruhé, a to jest okolnost častější, může býti ubráno ztemnění slezinnému při meteorismu, kde jednak bývá slezina rozedmutým žaludkem a colem zatlačena dozadu a vzhůru, jednak se otřes poklepový tenkou její vrstvou šíří k velkým, vzdušným prostorám, v jichž hlučném a jasném zvuku bubínkovém lehké ztemnění od sleziny úplně zaniká. Ba stává se někdy za těchto okolností, že se ztemnění slezinné vůbec dokázati nedá; Schuster to zaznamenal v 5 případech z 80, Weil ještě častěji.

Máme-li na mysli všecky tyto okolnosti, právě řečené a pro perkussi sleziny nepříznivé, a *jejich poměrně časté vyskytování*, musíme při práci srovnávající poklepový nález sleziny s nálezem topograficko-anatomickým býti předem připraveni, že jest mnoho předpokládáno i těmi, kdož, jako Seitz, snížili cíle methody na poklepové určení dolní třetiny orgánu.

---

*) Mezi 7000 pitvami pozoroval Oestreich pouze dvakrát, že leželo colon před slezinou resp. mezi jejím dolním koncem a bránicí: jednou bylo colon k dolnímu konci sleziny zánětlivě fixováno, podruhé šlo prý asi o kongenitální anomalii závěsného apparátu. V obou případech byla slezina zvětšena. (Berl. Klin. Woch., r. 1905 Ewald's Festnummer.)

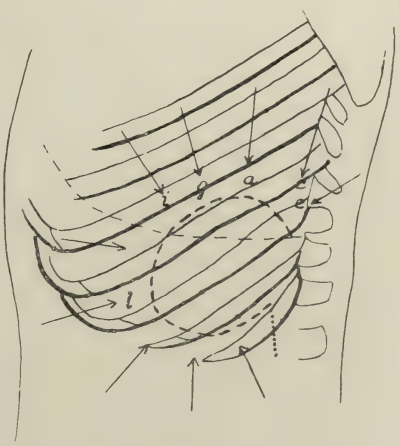
IV.

Opírajíce se o data, která nám podává topografická anatomie, stavíce na zkušenostech, které vyplývají z běžného klinického poznání a řídíce se direktivou, kterou nám ukazují obdobné pokusy Piorryovy, Jos. Meyera, Oestreicha a de la Campa, podjali jsme se práce, jejíž program jsme na počátku druhé kapitoly vytkli a jejíž výsledky v přítomné kapitole předkládáme.

Předem několik slov o methodice.

Perkutováno bylo v poloze diagonální.*) Jeť v klinické praxi považována buď vůbec za nejlepší nebo za rovnocennou se stojem, který ovšem při pokusech na mrtvém těle odpadá. Jen tam, kde byl perkutován dolní okraj levých plic v celém rozsahu, dála se perkusse jak v poloze diagonální tak v poloze na pravém boku. Podotknouti dlužno, že Oestreich a de la Camp perkutovali při svých pokusech jednak v poloze na zádech, jednak v poloze diagonální; prvá poskytovala jim, jak svrchu citováno, výsledky výborné, ale také druhá dávala jim výsledky dobré.

Prvá orientační perkusse byla konána pomocí plessimetru, dále však při přesném stanovení poklepových hranic bylo, v souhlase s radou Edlefsena a j., perkutováno prstem na prst, *úhoz pak poklepový byl co možná slabý* (Sahli, Guttmann). Byla tedy technika naše podstatně různá od techniky na př. Meyerovy, kterýžto autor užíval, podobně jako jiní, poklepového kladívka a silně klepal, tvrdě, že „die Fingerperkussion und die Berücksichtigung des Widerstandes die Milz an ihrem vorderen Theile um 3—5 *cm* zu groß erscheinen läßt."



II. Schema podle Edlefsena.
-------- dolní hranice plic,
– – – – – ztemnění slezinné,
..... ztemnění ledvinné.

Určiti poklepem horní, plicemi krytý oddíl sleziny se perkutujícín epokoušel. Jen ve dvou případech užil k tomu cíli methody (obr. II) udané Edlefsenem,**) chtěje se zvlášť přesvědčiti o její vhodnosti a spolehlivosti. Ve všech ostat-

*) Podle Schustera může se perkusse sleziny díti v 5 polohách: *a*) při poloze na zádech, *b*) při poloze na pravém boku, *c*) při poloze diagonální t. j. střední mezi polohou na zádech a na pravém boku, *d*) při sedu, *e*) při poloze na břiše; v. Ziemssen zavedl a nad jiné cenil perkussi sleziny při stoji. Naproti tomu Schuster a Niemeyer považují polohu diagonální za lepší a Weil, Mosler, Eichhorst, Vierordt, Edlefsen doporučují, aby za účelem vzájemné kontroly bylo perkutováno jak v poloze diagonální, tak při stoji.

**) Postup při methodě Edlefsenově jest tento: 1. V poloze diagonální nebo v stoji perkutuje se nejprve slabě v čáře probíhající uprostřed mezi střední

ních případech omezil se na určení povrchního ztemnění slezinného. V menší řadě případů pokusil se vyklepati je ve formě uzavřeného obrazce, uzavřeného oválu, ve větší řadě spokojil se na způsob Weilův s figurou do zadu otevřenou.

Postup, kterým se perkutující bral, byl dvojí. Buď určeny nejprve kraniální, pak kaudální hranice a na konec poloha dolního polu. Anebo napřed poloha dolního polu a pak hranice kraniální a kaudální. Hranice nazad, ač byly-li vubec určovány, byly určovány naposled. Směr při perkussi byl sledován jak centripetální tak centrifugální t. j. podobně jako u srdce začal vyšetřující klepati v oblasti jasného zvuku (ať bubínkového ať plicního) a z ní postupoval v oblast temného zvuku slezinného; z míst úplného ztemnění se vrátil do oblasti zvuku jasného a znovu zpět; až, ustáliv své přesvědčení o tom, kde se počíná prvé ztlumení jasného zvuku, kladl tam hranice sleziny, resp. udělal tam na kuži dermografem bod (nikoliv čáru). (Ve příčině ostatních podrobností techniky poklepové viz práci Syllaba-Sieber, Poklep srdce ve světle orthodiagrafie, Sborník Lékařský roč. XIV. (XVIII.) str. 196 a 197.)

Dbáno přísně, aby se kůže na poklepávaném terrainu neposouvala. Za tím účelem musila býti držena horní levá končetina stále ve stejné poloze.

Když perkusse skončena a ztemnění slezinné na stěnu tělesnou nakresleno, byly hranice jeho promítnuty do hloubi jehlami kolmo k povrchu tělesnému zabodávanými. Srovnávání poklepového nálezu s nálezem topograficko-anatomickým konal pak anatom na několikerý způsob:

A) Předem prostě tak, že po otevření dutiny břišní přesvědčil se *hmatem*, zda, která a jak velká část sleziny jest zaujata v oblast jehlami ohraničenou resp. zda v ni zavzat některý sousední útvar. Po případě vyňal slezinu z těla ven, měřil její rozměry a vzájemným srovnáváním jejím, jak v těle ležela, s obrazcem poklepovým, jakož i vzájemným srovnáváním rozměrů anatomických s rozměry poklepovými doplňovali jsme si představu o tom, jak velká část sleziny byla vyperkutována.

B) V další řadě pokusů nebyla otevřena dutina břišní obvyklým řezem v čáře bílé, nýbrž užito okénkové methody Roserovy t. j. v obvodu ztemnění odpraeparována stěna tělová po případě i se žebry, abychom mohli vzájemný vztah mezi orgánem a ztemněním in situ přímým *názorem* zjistiti. Methoda ta se nám ukázala instruktivnější předešlé.

---

a zadní čarou pažní asi od VI. žebra počínaje směrem kolmým, až se dojde k oblouku žebernímu. Eventuálně se tato orientační perkusse opakuje podobným způsobem v přední, resp. v zadní čáře pažní. 2. Po této orientační perkussi, která má zhruba ukázati, kde je největší šíře ztemnění slezinného, určí se *slabým* úhozem průběh dolního okraje plic od páteře až k přednímu okraji ztemnění slezinného. 3. Po té se určí *relativní* ztemnění *silným* úhozem ve směru šipky *a*, *c*, *e*, o něco *méně silným* úhozem ve směru šipky *g* a *ještě slabším* ve směru šipky *i*, proto slabším, aby nepůsobil rušivě poklepový zvuk od žaludku. 4. Konečně se vyklepe dolní a zadní okraj *absolutního* ztemnění *zcela slabou* perkussí ve směru šipek na schem. II. naznačených a z jasného zvuku žaludečního resp. střevního v temný zvuk slezinný mířících.

C) Ale největšího poučení a nejsprávnější anatomické představy jsme se dopracovali, když byla na stěně tělové nejen v obvodu ztemnění, ale i daleko mimo ně (hlavně za ně) vypraeparována mezižebří s případnou resekcí některého žebra, tak že jsme měli celé pole nás zajímající otevřené před očima a přístupné přesnému vyšetření jak *zrakem* tak *hmatem*. Byly to hlavně pokusy posledního druhu, které nám zjednaly jasnou anatomickou představu o tom, jak velká část sleziny určení poklepovému vůbec uniká.

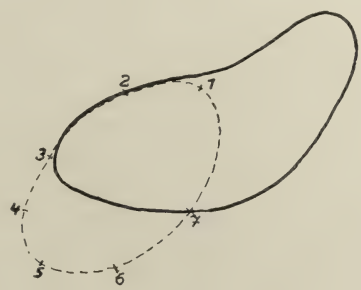
Velikou výhodou bylo pro nás, že si anatom nálezy naše ihned sám kreslil, z počátku na způsob jednoduchého schematu, později ve formě obrázku, na kterém byl reprodukován vztah ztemnění, sleziny i všech ostatních útvarů v daném případě v úvahu přicházejících. Důležitost tohoto počínání byla námi již svrchu vytčena.

Studie naše se celkem vztahují na 32 těla, která nám byla k disposici v ústavech dvor. rady prof. *Hlavy*, prof. *Janošíka* a prof. *Slavíka*.

Případy studované methodou A.

Případ č. 1 (obr. 1.).

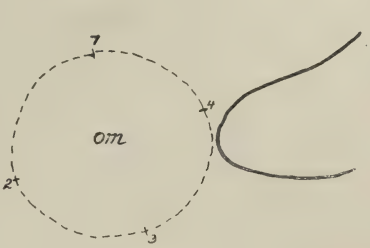
Ztemnění ve formě uzavřeného oválu mezi dolním okrajem VIII. a horním okrajem X. žebra. Je posunuto ventrálně a kaudálně od sleziny tak, že se jen jeho zadní část kryje s dolní částí sleziny. Horní část sleziny se táhne daleko do zadu za ztemnění. Poklepem jest určena ventrální část předního okraje sleziny, ale je prodloužena falešně vpřed a dolů, není určen dolní pol sleziny a dolní okraj. Celkový výsledek nezdařilý.



Obr. 1.

Případ č. 2 (obr. 2.).

Ztemnění ve formě uzavřeného kruhu, jehož zadní část vyklepával perkutující s nejistotou; sahá od horního okraje VII. k dolnímu okraji IX. žebra. Jest vůbec mimo slezinu ve směru ventrálním. V jeho rozsahu jest omentum silně tukem prorostlé. Dolní pol sleziny se začíná teprve u zadních hranic ztemnění, kde si nebyl perkutující dosti jist. Odtud se prostírá slezina nazad. Neurčeno ze sleziny vůbec nic. Celkový výsledek úplně nezdařilý.

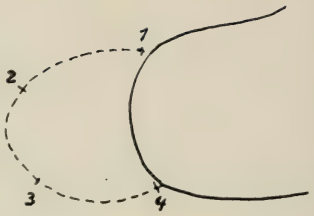


Obr. 2.

Případ č. 3 (obr. 3.).

Ztemnění ve formě oblouku nazad otevřeného prostírá se mezi VI. a VII. žebrem. Jest mimo slezinu ve směru ventrálním. V jeho roz-

sahu omentum a prázdná kontrahovaná flexura coli lienalis. Slezina se začíná svým dolním polem tam, kde se končí obě ramena oblouku. Neurčeno ze sleziny vůbec nic. Celkový výsledek úplně nezdařilý.



Obr. 3.

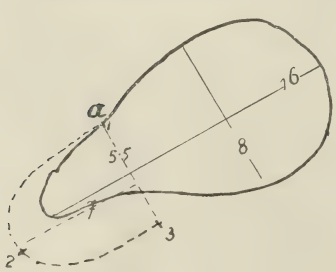
Případ č. 4 (obr. 4.).

Ztemnění ve formě uzavřené, kruhovité jest uloženo po obou stranách X. žebra. Jest z největší části mimo slezinu a to ventrálně a kaudálně, zabírajíc jen malý segment dolního jejího polu do své dorsokraniální partie. V rozsahu ztemnění jest *a*) omentum, které je silně tukem prorostlé a kryje kontrahovanou, k dolnímu polu sleziny se přimykající flexuru coli lienalis a *b*) kličky jejuna při kaudálním okraji ztemnění. Dolní pol sleziny, zavzatý úzkým segmentem do ztemnění, jest od oblouku žeberního ve směru průběhu X. žebra 9 *cm* vzdálen. Při poklepu bylo sice konstatováno v místech vlastní sleziny ztemnění nápadnější než v zakresleném obrazci, ale bez ostrých hranic do okolí. Topografický vztah mezi ztemněním a slezinou tedy nepatrný. Celkový výsledek úplně nezdařilý.

Obr. 4.

Případ č. 5 (obr. 5.).

Ztemnění na způsob oblouku dozadu otevřeného; rozměry : *d* = 7 *cm*, *š* = 5·5 *cm*. Objímá dolní pol sleziny, v úzký jazyk vybíhající, a to tím způsobem, že hranice ztemnění jsou od samotného polu o 2 *cm* dále směrem ventrálním a kaudálním, od zadního okraje o 2½ *cm* níže a že se kraniálně k okraji sleziny přibližují, až na nejvyšším bodě ztemnění *a* s ním splývají. Hlavní massa sleziny je položena nazad, dorsálně od ztemnění. Tumor lienis venostaticus; rozměry: *d* = 16 *cm*, *š* největší = 8 *cm*, *š* jazykovitého dolního konce = 3 *cm*. Z toho zabráno do ztemnění: na šířku jazykovitý dolní konec cele, z podélného průměru slezinného 5 *cm*. Celkem tedy představuje část sleziny do ztemnění zavzatá přibližně asi šestinu sleziny celé. Poloha dolního polu určena s chybou + 2 *cm*. Splynutí poklepových a anatomických hranic sleziny v bodě *a* nelze považovati za správné určení předního okraje. Výsledek nelze považovati za zdařilý.

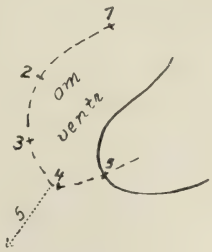


Obr. 5.

Případ č. 6 (obr. 6.).

Ztemnění na způsob oblouku dozadu otevřeného sahá od dolního okraje VII. k dolnímu okraji IX. žebra; je vzdáleno od oblouku žeberního

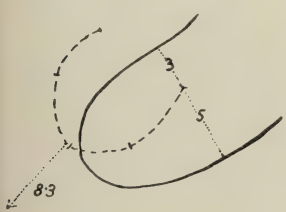
5 *cm*. Je posunuto od sleziny ventrálně tím způsobem, že se jen malá kaudálně dorsální část jeho kryje s kranioventrální částí sleziny. Při tom jest vzdálenost mezi ztemněním a orgánem v krajině dolního polu 2—3 *cm*. Tam, kde není slezina, jest jednak omentum, jednak žaludek s obsahem. Hlavní část sleziny sahá nazad, dorsálně od ztemnění. Celkový výsledek nezdařilý.



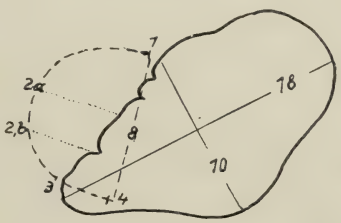
Obr. 6.

Případ č. 7 (obr. 7.).

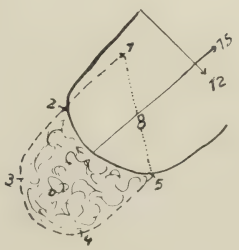
Ztemnění slezinné nazad otevřené sahá od horního okraje VII. k dolnímu okraji IX. žebra; rozměry: $d = 7$ *cm*, $š = 7$ *cm*; je vzdáleno od oblouku žeberního 8·3 *cm*. Je posunuto asi o 2·5 *cm* kraniálně od sleziny. Rozměry sleziny: $d = 12$ *cm*, $š = 8$ *cm*, $tl = 3$ *cm*. V délce asi 5 *cm* sahá slezina dorsálně za ztemnění. Příčný průměr ztemnění jest sice jen o 1 *cm* menší než příčný průměr sleziny, ale polohou se spolu nikterak nekryjí. Poloha dolního polu jakž takž určena se zmíněnou úchylkou kraniální. Celkový výsledek nelze nazvati zdařilým.



Obr. 7.



Obr. 8.



Obr. 9.

Případ č. 8 (obr. 8.).

Ztemnění jest uzavřené a má tvar segmentu ellipsy o basi 8 *cm* a výšce 6 *cm*. Jest posunuto většinou ventrálně od sleziny, zabírajíc do sebe jen pruh předního okraje sleziny v jeho ventrální polovině. Tumor lienis; rozměry: $d = 18$ *cm*, $š = 10$ *cm*, $tl = 3{\cdot}5$ *cm*. Až na řečený pruh svého předního okraje prostírá se slezina nazad od ztemnění. V těch místech našel sice perkutující ztemnění, ale neodlišné od okolí. Celkový výsledek úplně nezdařilý.

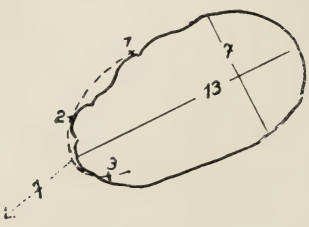
Případ č. 9 (obr. 9.).

Ztemnění dozadu otevřené, jazykovitě protáhlé, kraniální jeho hranice zdéli = 10 *cm*, kaudální kratší, vzdálenost obou konečných bodů jazyku ve směru dorsálním = 8 *cm*; prostírá se od dolního okraje VIII. k dolnímu okraji X. žebra. Je posunuto od sleziny ventrálně a kaudálně tím způsobem, že jest teprve do jeho dorsální části zavzat trojhranný segment dolního oddílu sleziny s polem; výška tohoto segmentu jest 5 *cm*, což znamená, jak nejdále zabíhá ztemnění v podélném směru v oblast

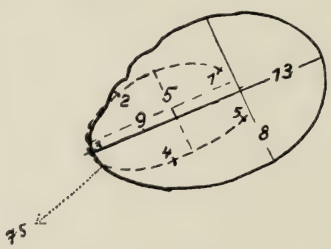
sleziny. Tam, kde v obvodu ztemnění není slezina, t. j. ve ventrálním jeho oddíle jest omentum a obě ramena flexurae lienalis. Slezina zvětšena; rozměry: $d = 15$ *cm*, $š = 12$ *cm*. Tumor lienis acutus; typhus abdominalis. Vyperkutovaná část sleziny odpovídá stěží čtvrtině až třetině orgánu, který se ostatně prostírá na zad od ztemnění. Poloha dolního polu neurčena. S differencí — 1 *cm* určena poloha ventrální části předního okraje, ale prodloužena falešně vpřed a dolů. Zadní okraj sleziny počíná se tam, kde se končí zadní okraj ztemnění. Celkový výsledek nezdařilý.

Případ č. 10 (obr. 10.).

Ztemnění do zadu otevřené má tvar segmentu ellipsy o šířce 5 *cm*; saháod horního okraje VIII. k hornímu okraji X. žebra; je vzdáleno od oblouku žeberního 7 *cm*. Ztemnění se kryje s dolním segmentem sleziny v rozsahu asi jedné čtvrtiny celého jejího objemu. Omentum tuku prosté. Slezina zdéli = 13 *cm*, zšíři 7 *cm*; asi třemi čtvrtinami svého objemu saháá dorsálně od ztemnění. Určena správně poloha dolního jejího polu a přilehlých částí předního a zadního okraje. V tom směru výsledek zdařilý.



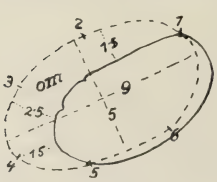
Obr. 10.



Obr. 11.

Případ č. 11 (obr. 11.).

Ztemnění nazad otevřené má tvar jazyku; rozměry: $d = 9$ *cm*, $š = 5$ *cm*; saháod horního okraje VIII. k hornímu okraji X. žebra; je vzdáleno od oblouku žeberního 7·5 *cm*. Ventrální segment ztemnění (od jehly č. 2 a až za jehlu č. 3) souhlasí s polohou dolního polu resp. přilehlé části sleziny, ostatně spadá ztemnění ve střední oddíl sleziny tak, že přední i zadní její okraj leží mimo oblast temného poklepu: v nákresu jest ztemnění objato orgánem. Slezina zdéli = 13 *cm*, zšíři 8 *cm*. Vyperkutovaná část její odpovídá více než třetině celkového objemu. Horní pol sleziny saháš ještě 4—5 *cm* dorsálně mimo ztemnění. Určena správně poloha dolního polu a přilehlé části sleziny. Neurčena poloha předního a zadního okraje. Omentum tuku prosté. Výsledek tedy jen co do určení dolního polu a přilehlé části zdařilý.



Obr. 12.

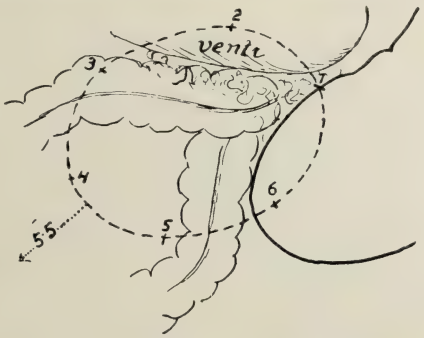
Případ č. 12 (obr. 12.).

Ztemnění ve formě uzavřeného oválu; rozměry: $d = 9$ *cm*, $š = 5$ *cm*; prostírá se od dolního okraje VII. žebra do středu IX. mezižebří; dosahuje čáry kostoklavikulární. Je posunuto kraniálně a ventrálně od sleziny. Ventrální pol ztemnění je vzdálen od

dolního polu sleziny 1½ *cm*; ke slezině přiléhá tu kontrahovaná flexura lienalis coli a omentum tukem prorostlé. Přední okraj jest na ztemnění posunut výše než je na slezině a to o 2½ *cm* vpředu, o 1½ *cm* vzadu; vpředu tu přilehá ke slezině fundus žaludku (jehla č. 3). Zadní okraj ztemnění jest též posunut výše; hranice ztemnění a orgánu se tu kříží (jehla č. 5). Poprvé bylo poklepem vystiženo, jak daleko dorsálně sahá horní pol sleziny. Celkem však nelze nazvati výsledek zdařilým.

Případ č. 13 (obr. 13.).

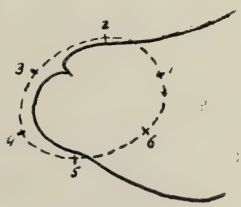
Ztemnění ve formě uzavřeného oválu; rozměry: $d = 7$ *cm*, $š = 5½$ *cm*; sahá od středu VII. mezižebří k hornímu okraji X. žebra; vzdáleno od oblouku žeberního 5½ *cm*. Jest posunuto ventrálně od sleziny, jejíž dolní pol jen nepatrným kranioventrálním segmentem jest zabrán do dorsální části ztemnění. Jinak zaujímají oblast temného poklepu *a*) flexura coli lienalis naplněná skybaly, *b*) fundus ventriculi naplněný tekutinou, *c*) z nepatrné části vpředu omentum. Slezina až na nepatrný segment dolního polu sahá dorsálně od ztemnění. Výsledek naprosto nezdařilý.



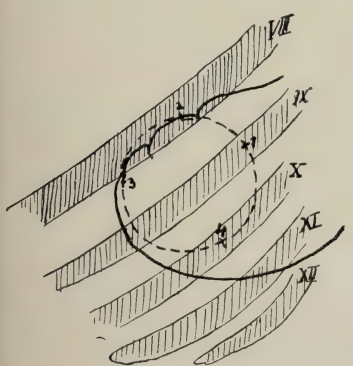
Obr. 13.

Případ č. 14 (obr. 14.).

Ztemnění uzavřené tvaru skoro kruhovitého sahá od horního okraje VII. k dolnímu okraji IX. žebra. Jest jím správně určena poloha dolního polu sleziny a přilehlých částí předního a zadního okraje jejího. Na vyňaté slezině viděti však, že dolní pol sleziny tvoří úzký výběžek, od něhož se ostatní nevyperkutované těleso sleziny hruškovitě rozšiřuje. Vyklepaný segment sleziny představuje asi pětinu celkového jejího objemu. Ostatní asi čtyři pětiny prostíraly se v těle dorsokaudálně mimo okrsek poklepový. Výsledek zdařilý jen co do určení dolního polu a části přilehlé.



Obr. 14.



Obr. 15.

Případy studované methodou B.

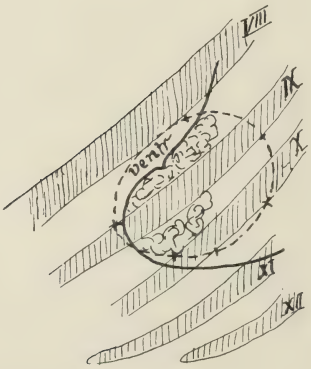
Případ č. 15 (obr. 15.).

Ztemnění uzavřené tvaru kruhovitého sahá od středu VIII. do středu X. žebra. V okénku vzniklém odpraeparováním kůže, svalů mezižeberních a bránice lze viděti v VIII. mezižebří omentum tukem prorostlé, v IX. mezižebří slezinu; odpraeparuje-li se omentum, je celé okénko vyplněno slezinou, ovšem jenom segmentem jejím. Jeť správně

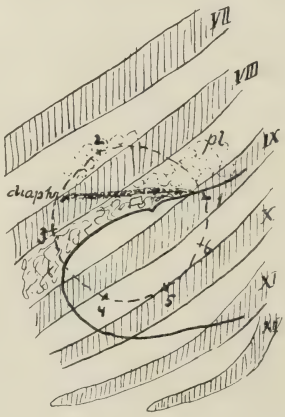
určena poloha dolního polu a přilehlé k němu části, celkem asi čtvrtina celkového objemu sleziny. Ostatní asi tři čtvrtiny sahají kraniodorsálně od ztemnění. Výsledek zdařilý co do určení dolního konce sleziny.

Případ č. 16 (obr. 16.).

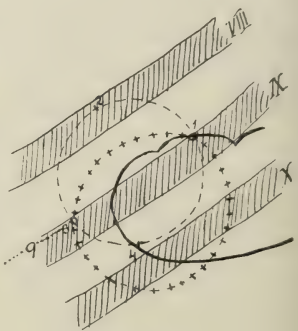
Ztemnění uzavřené tvaru ellipsového sahá od dolního okraje VIII. žebra do X. mezižebří. Ve vypraeparovaném okénku jsou: *a*) slezina, ve ventrální části okénka omentem krytá, ostatně volná, *b*) v VIII. mezižebří při kraniálním okraji okénka úzký pruh fundu žaludečního. To, co jest v okénku ze sleziny viděti, jest extremitas inferior sleziny a segment středního jejího oddílu, celkem asi čtvrtina celého objemu. Dolní pol sleziny vyklepán správně, ventrální část předního jejího okraje jakož i ventrální část okraje zadního s nevelkou chybou, ostatní však slezina táhne se mimo ztemnění, dorsálně od okénka, představujíc asi tři čtvrtiny celého objemu. Co do určení polohy dolního konce je tedy výsledek zdařilý.



Obr. 16.



Obr. 17.



Obr. 18.

Případ č. 17 (obr. 17.).

Perkutováno po insufflaci plic. Ztemnění uzavřené tvaru kruhovitého, se vzdáleností od jehly č. 1 k jehle č. 4 šest *cm*; prostírá se ze VII. mezižebří k hornímu okraji X. žebra. Okénkovou methodou zjištěno, že v oblasti ztemnění jsou ve směru shora dolů podle sebe uloženy: *a*) dolní okraj plic, *b*) omentum, *c*) polokruhovitý výsek sleziny z krajiny jejího dolního polu a předního okraje. Ostatek sleziny táhne se jednak kaudálně jednak dorsálně od ztemnění. Poklepem vystihnuto nanejvýš, jak daleko zůstává dolní pol sleziny od čáry kostoklavikulární resp. od oblouku žeberního. Jinak jest výsledek nezdařilý.

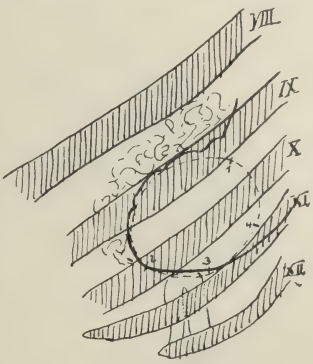
Případ č. 18 (obr. 18.).

Perkutováno před insufflací plic a po ní, vztah mezi ztemněním a slezinou sledován jen vzhledem ke stavu po insufflaci plic. Ztemnění uzavřené ve formě kruhu prostírá se před insufflací plic (čárkováno) od horního okraje VIII. k hornímu okraji X. žebra, po insufflaci (křížkováno)

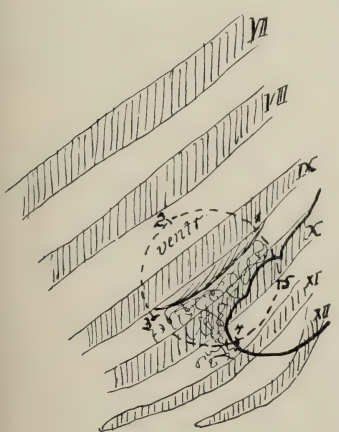
je posunuto o šířku žebra níže, sahajíc od středu VIII. mezižebří k hornímu okraji XI. žebra. Rozměry ztemnění před insufflací: podle průběhu IX. žebra = 6 *cm*, kolmo na ně = 7 *cm*; vzdálenost od oblouku žeberního = 9 *cm*. Insufflací se tyto číselné poměry mnoho nezměnily. Ztemnění — po insufflaci plic vyklepané — objímá v pásu asi 2 *cm* širokém jazykovitý dolní konec sleziny se tří stran: kraniální, ventrální a kaudální, nepoměrně větší část sleziny táhne se dorsálně od ztemnění. Výsledek nezdařilý.

Případ č. 19 (obr. 19.).

Ztemnění uzavřené, ve formě ellipsovité, sahá od horního okraje IX. k hornímu okraji XI. žebra. Ve vypraeparovaném okénku jest až na uzounký pruh při ventrokaudálním oddíle periferie viděti všude slezinu; v jmenovaném uzounkém pruhu jest patrna klička tenkého střeva. To, co jest v okénku ze sleziny viděti, jest její extremitas inferior a oddíl ventrální, celkem asi třetina celé sleziny. Ostatek se táhne kraniodorsálně od ztemnění. Správně je vyklepán dolní pol a zadní okraj (až na onu bezvýznamnou addici střevní kličky), s nepatrnou — differencí přední okraj. Podle něho jest uloženo omentum, které zde nepůsobilo na nález poklepový. Celkový výsledek zdařilý.



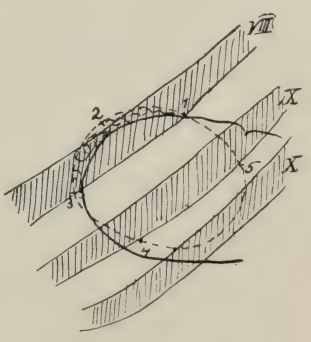
Obr. 19.



Obr. 20.

Případ č. 20 (obr. 20.).

Ztemnění uzavřené, formy kruhovité, sahá od středu VIII. mezižebří do středu X. mezižebří. V odpraeparovaném okénku jest viděti: *a*) v dorsokaudální jeho části nepatrný kus předního okraje sleziny s dolním jejím polem, *b*) uprostřed omentum, *c*) kraniálně fundus ventriculi. Celé ztemnění je tedy posunuto ventrálně od sleziny a zabírá jen nepatrnou její část do své oblasti. Slezina je uložena svým předním okrajem až u X. žebra, táhne se skoro celá kaudodorsálně od ztemnění. Celkový výsledek nezdařilý.

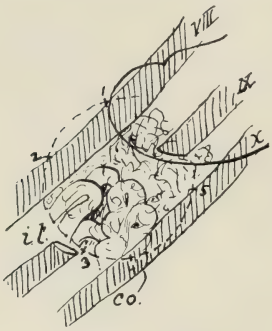


Obr. 21.

Případ č. 21 (obr. 21.).

Ztemnění uzavřené, tvaru ellipsovitého, sahá od horního okraje VIII. pod horní okraj X. žebra. V odpraeparovaném okénku viděti: *a*) hlavně slezinu, *b*) dopředu pak při jejím ventrálním konci

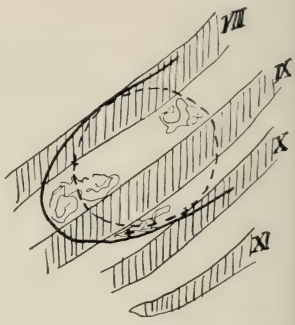
omentum tuku prosté jako srpovitý pás právě u polu ca. 1 *cm* široký. Celé ztemnění jest zrovna ve směru dolního polu posunuto o 1 *cm* kranioventrálně od sleziny, při čemž jsou určeny přední a zadní okraj dolního oddílu sleziny dosti dobře (jehlami č. 1 a 4). To, co jest ze sleziny vyklepáno, tvoří asi třetinu její; ostatek se prostírá nazad od ztemnění. Celkem zjištěna poklepově poloha dolního konce sleziny, a to s chybou + 1 *cm* při samém polu, s menší chybou při jeho předním a zadním okraji. Celkový výsledek dosti zdařilý.



Obr. 22.

Případ č. 22 (obr. 22.).

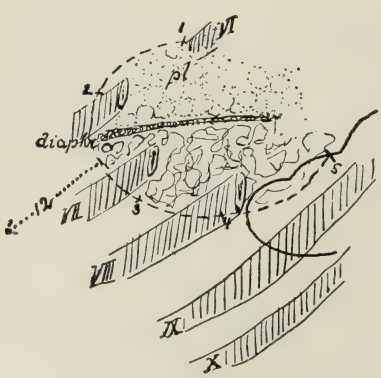
Ztemnění nazad otevřené sahá od horního okraje VIII. skoro k dolnímu okraji X. žebra. V odpraeparovaném okénku lze viděti omentum, jež pokrývá vpředu *a*) kličky tenkého střeva a kontrahovanou flexuru coli lienalis s hojnými appendices epiploicae, *b*) vzadu pak nevelký úsek dolního konce sleziny. Toť také vše, co ze sleziny do ztemnění zasahá. Ztemnění je tedy posunuto ventrokaudálně od sleziny, tato pak se prostírá od zadního otevřeného konce poklepového obrazce směrem dorsokraniálním. Celkový výsledek naprosto nezdařilý.



Obr. 23.

Případ č. 23 (obr. 23.).

Ztemnění uzavřené, ve formě ellipsovité; rozměry: $d = 8\ cm$, $š = 7\ cm$; sahá od horního okraje VIII. k hornímu okraji X. žebra. V odpraeparovaném okénku viděti jenom slezinu krytou z části omentem. (V omentu na místě křížkem označeném uložena pod IX. žebrem malá kulovitá přídatná slezina zvící vlašského ořechu.) To, co jest ze sleziny v okénku viděti, tvoří něco více než třetinu a méně než polovinu celého jejího objemu. Dolní konec sleziny přesahuje obvod okénka o dosti značný kus ventrokaudálně, horní konec přesahuje jej o ještě větší kus dorsokraniálně. Za to jest poklepem správně vystižen směr předního a zadního okraje sleziny. Jinými slovy jest poklepem správně určena šířka sleziny. V tom směru jest výsledek zdařilý.



Obr. 24.

Případ č. 24 (obr. 24.).

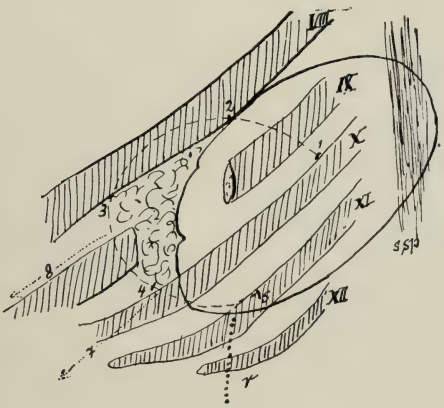
Ztemnění nazad otevřené sahá značně vysoko t. j. od horního okraje VI. žebra do VIII. mezižebří; od oblouku žeberního je vzdáleno 12 *cm*. V odpraeparovaném okénku táhne se uprostřed prořízntá bránice, nad ní je dolní okraj

plic, pod ní omentum pokrývající kontrahovaný žaludek a kontrahovanou flexuru coli lienalis; nad dolní periferií okénka v zadní jeho části táhne se úzký pruh předního okraje sleziny až k dolnímu jejímu polu. Jinak jest slezina uložena kaudodorsálně od ztemnění; vyznačuje se tím, že jest její dolní konec velmi úzký, jazykovitý. Celkový výsledek naprosto nezdařilý.

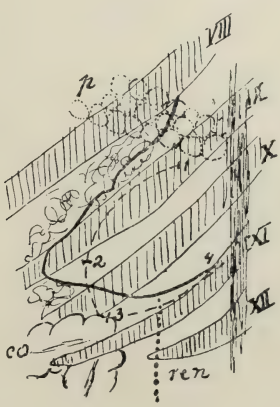
Případy studované methodou C.

Případ č. 25 (obr. 25.).

Ztemnění nazad otevřené; tam, kde se otvírá, jest 4·5 *cm* široké; sahá od středu VIII. k hornímu okraji XI. žebra; je vzdáleno od oblouku žeberního 7 resp. 8 *cm*. V oblasti ztemnění shledáno: *a*) ventrálně omentum, *b*) dorsálně slezina. Ze sleziny zasahuje do ztemnění dolní její část, a to tak, že přední okraj jest uvnitř ztemnění, jsa od jeho hranic oddělen svrchu zmíněným pásem omenta, zadní pak okraj jest mimo ztemnění,



Obr. 25.



Obr. 26.

ale jest určen dobře s nepatrnou jen odchylkou; také Milznierenwinkel jest určen s nepatrnou odchylkou. Celkem tvoří vyperkutovaná část sleziny něco více než třetinu celé facies diaphragmatica; ostatek sleziny jest uložen dorsokraniálně od ztemnění. Obrázek ukazuje také poměr sleziny k m. sacrospinalis. Zdařilým možno nazvati výsledek jen, pokud jde o určení úhlu mezi slezinou a ledvinou a přilehlé části zadního okraje sleziny až k dolnímu polu.

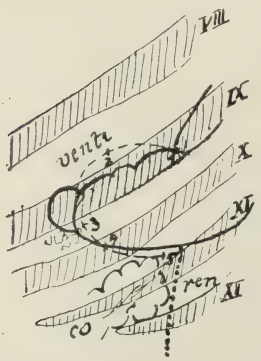
Případ č. 26 (obr. 26.).

Ztemnění nazad otevřené sahá od horního okraje IX. k hornímu okraji XI. žebra. V oblast ztemnění jest zaujata dolní část sleziny až na samotný pol, který jest vytažen v uzounký jazyk a leží ventrálně od ztemnění, a až na přední okraj, který probíhá něco málo nad ztemněním. Milznierenwinkel jest kladen poklepem více nazad, než kde vskutku jest. Slezina táhne se ještě hluboko kraniodorsálně za ztemnění směrem k pá-

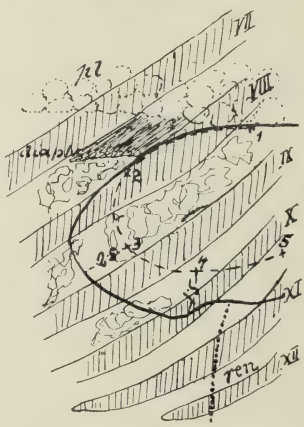
teři. Vyperkutovaná část představuje něco více než třetinu celého orgánu. Poklepem určena tedy dosti správně poloha ventrálního oddílu sleziny. Výsledek zdařilý.

Případ č. 27 (obr. 27.).

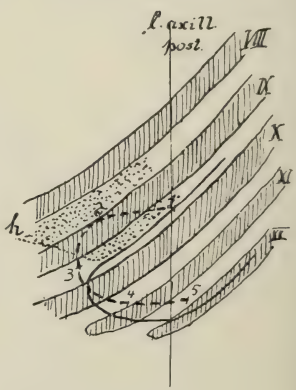
Ztemnění nazad otevřené; rozměry $7 \times 6\frac{1}{2}$ *cm*; prostírá se od horního okraje IX. k hornímu okraji XI. žebra. Do okrsku ztemnění zaujata extremitas inferior sleziny až na malý lalůček na samém dolním polu, který leží ventrálně od ztemnění. Přední okraj vyklepané části sleziny jest určen s differencí o málo větší než + 1 *cm*, zadní s differencí menší než + 1 *cm*. Milznierenwinkel určen správně. Blíže předního okraje sleziny zavzat do ztemnění úzký pruh žaludku, k zadnímu okraji přimyká se omentum a flexura coli lienalis. Hlavní část sleziny jde kraniodorsálně za ztemnění. Poklepem tedy určena poloha ventrální části sleziny. Výsledek zdařilý.



Obr. 27.



Obr. 28.



Obr. 29.

Případ č. 28 (obr. 28.).

Ztemnění nazad otevřené; rozměry $7\frac{1}{2} \times 6$ *cm*; prostírá se od horního okraje VIII. k dolnímu okraji X. žebra; zadní čáru pažní přesahuje $4\frac{1}{2}$ *cm* směrem ventrálním. V oblasti temného poklepu jest uložena slezina, valnou měrou krytá omentem. Přední okraj sleziny až po Milzlungenwinkel úplně souhlasí s kraniálním okrajem ztemnění, za to dolní pol sleziny přesahuje ztemnění ventrokaudálně o $2\frac{1}{2}$ *cm* a zadní její okraj o $1\frac{1}{2}$ *cm*; obdobně se chová Milznierenwinkel. Nazad od ztemnění sklání se slezina do hloubky až k páteři. Poklep tedy správně zjistil průběh kraniálního okraje sleziny až po Milzlungenwinkel; v tom směru jest výsledek zdařilý, jinak ne.

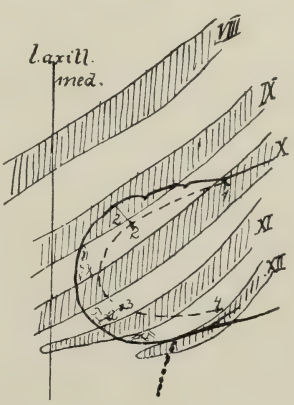
Případ č. 29 (obr. 29.).

Ztemnění nazad otevřené; rozměry $6\frac{1}{2} \times 5$ *cm*; sahá od horního okraje IX. až k dolnímu okraji XI. žebra; přesahuje z většího dílu zadní čáru pažní směrem ventrálním a dosahuje čáry kostoklavikulární. Po praeparaci lze viděti v mezižebřích: *a*) okraj zvětšeného levého

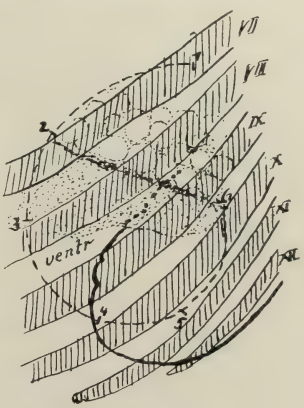
laloku jaterního, který sahá skoro k hornímu okraji X. žebra, *b*) ventrální část sleziny stlačené játry až pod horní okraj XII. žebra. Prostírá se tu tedy slezina od IX. mezižebří až do středu XII. žebra, za ztemněním pak nazad sahá skoro až k páteři. Není tedy poklepem správně určen ani přední ani zadní okraj sleziny, za to *a*) dolní její pol jest ve skutečnosti jen s nepatrnou úchylkou níže než na ztemnění a *b*) zcela správně je poklepem vystižen vztah k čáře kostoklavikulární. V těchto dvou směrech je výsledek zdařilý, jinak ne.

Případ č. 30 (obr. 30.).

Ztemnění nazad otevřené; rozměry $6 \times 5\frac{1}{2}$ *cm*; sahá od IX. mezižebří k hornímu okraji XII. žebra; jeho přední konec jest $2\frac{1}{2}$ *cm* nazad za střední čarou pažní. Po praeparaci lze sice viděti v otevřených mezižebřích pouze slezinu, ale jenom zadní horní konec ztemnění (u jehly č. 1) souhlasí s anatomickými hranicemi sleziny, a to při předním jejím okraji. Všude jinde přesahuje slezina okrsek temného poklepu, ventrálně asi o 2 *cm*, při dolním zadním konci ztemnění o 1 *cm*, dorsálně ovšem nejvíce. Milznierenwinkel je tedy také níže, než by byl podle obrazce poklepového. Z řečeného dále vyplývá, že šířka ztemnění při jeho zadním konci jest o 1 *cm* menší než šířka orgánu v těchto místech, vpředu je rozdíl o mnoho větší. Poklep nás poučil nanejvýše v tom směru, že nemůže býti slezina obzvlášť zvětšena, ano ztemnění nedosahuje ani střední čáry pažní. Jinak je výsledek nezdařilý.



Obr. 30.



Obr. 31.

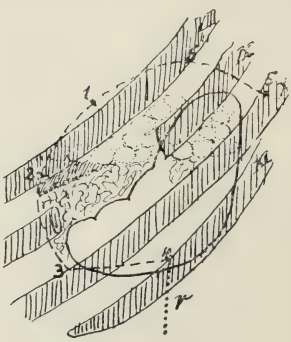
Případ č. 31 (obr. 31.).

Perkutováno podle methody Edlefsenovy, která má za účel vyklepati i oddíl sleziny plicemi krytý. Ztemnění nazad otevřené; sahá od VI. k X. mezižebří. Z celého ztemnění má okrsek ohraničený jehlami č. 1, 2 a 6 představovati hluboké ztemnění slezinné, ostatek ztemnění povrchní; čára spojující jehly č. 2 a 6 má určovati dolní okraj levých plic. Po praeparaci lze viděti v okrsku mezi jehlami č. 1, 2, 6 plíce, jejichž dolní okraj jest jehlami č. 2 a 6 zcela přesně stanoven; oblast povrchního ztemnění obsahuje: *a*) pod bránicí játra a pod nimi *b*) vpředu žaludek, *c*) vzadu slezinu. Ze sleziny jest ve ztemnění zavzat segment dolní její části s předním okrajem. Dolní pol sám o sobě jest již mimo ztemnění, podobně zadní

okraj, který zasahuje až pod dolní okraj XII. žebra. Slezina jest tu zase stlačena játry dolů, podobně jako v případě č. 29. Dorsální část sleziny sune se kraniodorsálně pod játra. Tato sahají v hloubi, v klenbě bráničí téměř k jehle č. 1. Tím způsobem hluboké, podle methody Edlefsenovy určené ztemnění pochází od jater. Vzhledem ke slezině jest celkový výsledek nezdařilý. K úsudku o methodě Edlefsenově se případ nehodí pro komplikaci se zvětšenými játry.

Případ č. 32 (obr. 32.).

Perkutováno podle methody Edlefsenovy. Ztemnění nazad otevřené; sahá od horního okraje VIII. k hornímu okraji XI. žebra. Z celého ztemnění má okrsek ohraničený jehlami č. 1, 5, 6 představovati hluboké ztemnění slezinné, ostatek ztemnění povrchní; čára spojující jehly č. 1 a 5 má určovati průběh dolního okraje plic. Po praeparaci je viděti, že se prostírají plíce mnohem níže, než bylo poklepem stanoveno, zasahujíce tak do oblasti ztemnění povrchního; v dolní části této oblasti lze pod okrajem plic viděti: *a*) v předu omentum, *b*) vzadu slezinu. Slezina malá: $d = 9\frac{1}{2}$ *cm*, $š = 5$ *cm*, $tl = 2$ *cm*, jest celá zavzata do ztemnění; zasahá dolním polem tam, kde přechází v obrazci poklepovém ventrální okraj ztemnění v kaudální, a prostírá se odtud mezi dolním okrajem IX. a dolním okrajem XI. žebra směrem kraniodorsálním pod plíce, nedosahujíc jehly č. 5. Je tedy z ní poklepem s malou — úchylkou určen zadní okraj dolní části, zcela dobře je pak určen Milznierenwinkel; také vztah k čáře kostoklavikulární jest poklepem vystižen. Hluboké ztemnění naprosto nesouhlasí s rozlohou horní části sleziny; v oblasti ohraničené jehlami č. 1, 5, 6 vůbec totiž sleziny není; jehla č. 6 určuje výši klenby bráničné. Celkový výsledek lze tedy jen co do určení zadního okraje dolní části sleziny nazvati zdařilým. Zároveň je vidno z pokusu, jak může methoda Edlefsenova perkutujícího svésti.



Obr. 32.

V.

Jak se nám jeví výsledky našeho bádání v přehledě?

V 18 případech jest výsledek *nezdařilým*. A to tak, že ve 2 jest ztemnění úplně mimo slezinu (č. 2 a 3), v 7 skoro (č. 4, 6, 8, 13, 20, 22, 24), v 9 pak jest sice do okrsku ztemnění zaujata jistá část sleziny (č. 1, 5, 7, 9, 12, 17, 18, 30, 31), kterou jsme ve případě č. 5 odhadovali na šestinu a v případě č. 9 na čtvrtinu až třetinu celé facies diaphragmatica, ale hranice poklepové a anatomické naprosto nesouhlasí: dolní pol ztemnění jest jinde než dolní pol orgánu, kraniální okraj ztemnění jinde než kraniální

okraj orgánu a konečně kaudální okraj ztemnění jinde než stejnojmenný okraj orgánu. Při tom se v 8 z těchto 9 případů obojí hranice navzájem křižují (obdoba: dva protínající se výstředné kruhy), v jednom (č. 30) jest obrazec poklepový cele uložen dovnitř obrazce, kterým jsou anatomické obrysy orgánu promítnuty na stěnu tělní (obdoba: dva soustředné kruhy). Co do orientace směrové dlužno uvésti, že je ztemnění posunuto od orgánu v 7 případech ryze ventrálně (č. 2, 3, 6, 8, 13, 18, 20), v 5 kaudoventrálně (č. 1, 4, 5, 9, 22), ve 3 kranioventrálně (č. 12, 24, 31), ve 2 ryze kraniálně (č. 7, 17). (Toť 17 z 18 nezdařilých případů; osmnáctý případ (č. 30) má v této příčině, jak před chvílí vytčeno, postavení zvláštní.)

Zdařilo-li se poklepem něco na slezině určiti, byla to nejčastěji poloha dolního polu. Ten byl v 6 případech určen i s přilehlými partiemi předního a zadního okraje (5krát přesně t. j. č. 10, 11, 14, 15, 19 a jedenkrát s malou odchylkou t. j. č. 21); ve 3 případech určen jen s přilehlou částí zadního okraje (č. 16, 26, 27), po případě až po Milznierenwinkel (č. 27); v 1 případě určen dolní pol sám o sobě (č. 29). *Celkem byla tedy poloha dolního polu resp. dolního konce sleziny zjištěna poklepem v 10 případech.*

Ve dvou případech byl dobře stanoven jen zadní okraj sleziny až po Milznierenwinkel (č. 25, 32). (Milznierenwinkel pokoušeli jsme se vyklepati v 6 případech: 3krát se zdarem t. j. u č. 25, 27, 32; 3krát s nezdarem t. j. u č. 26, 28, 30). *V 1 případě byl správně určen jen přední okraj až po Milzlungenwinkel* (č. 28). *Konečně v 1 případě* nalezen poklepem směr předního i zadního okraje ventrální části sleziny resp. *určena správně šířka její v těchto místech* (č. 23).

Ve třech případech, z nichž jeden čítáme jinak mezi nezdařilé, bylo poklepem vystiženo, jak daleko zůstává dolní pol sleziny od čáry kosto-klavikulární resp. od oblouku žeberního (č. 17, 29, 32). V jednom případě, jinak nezdařilém, poučila nás perkusse aspoň potud, že nemůže býti slezina zvětšena, ano nedosahuje ztemnění ani střední čáry pažní (č. 30).

Přehled výsledků.

A) Neúspěch byl:

1. naprostý (ztemnění úplně mimo slezinu) ve 2 případech (čís. 2 a 3),
2. skoro naprostý ..... v 7 případech (čís. 4, 6, 8, 13, 20, 22, 24),
3. slezina a ztemnění se sice jistou měrou kryjí, avšak tak, že hranice anatomické a poklepové se neshodují ..... v 9 případech (čís. 1, 5, 7, 9, 12, 17, 18, 30, 31)

Celkem .... v 18 případech.

B) Zdar byl:

1. *a*) s určením *dolního polu* a přilehlých částí *předního* a *zadního okraje*
   α) přesným ..... v 5 případech (čís. 10, 11, 14, 15, 19),
   β) s nepatrnou chybou ..... v 1 případě (čís. 21),
   b) s určením *dolního polu* a přilehlé části *zadního* okraje ..... ve 3 případech (čís. 16, 26, 27),
   c) s určením *dolního polu* samotného... v 1 případě (čís. 29),
2. s určením *zadního* okraje ..... ve 2 případech (čís. 25, 32),
3. s určením *předního* okraje..... v 1 případě (čís. 28),
4. s určením *šířky* slezinné ..... v 1 případě (čís. 23)

Celkem....ve 14 případech.

Zjevem téměř souhlasným ve všech našich případech bylo, že se nepoměrně větší část sleziny prostírala mimo oblast ztemnění dorsálně směrem k páteři. Výjimku činí pouze dva případy našeho materiálu, kde byla slezina malá (č. 12 a 32; rozměry v posledním případě $9\frac{1}{2} \times 5 \times 2$ *cm*). Podle historického přehledu v prvé kapitole je to v posledních patnácti letech snad jediný Edlefsen, který tvrdí, že pomocí jeho methody lze ve většině případů správně vyperkutovati i dorsální oddíl sleziny t. j. zjistiti hluboké ztemnění slezinné. Užili jsme methody Edlefsenovy ve dvou posledních případech naší sbírky (č. 31 a 32); náhodou nehodil by se dobře ani jeden ani druhý sám o sobě k úsudku o tom, zda lze touto methodou opravdu vyklepati hluboké ztemnění slezinné, jeden pro komplikaci se zvětšenými játry (č. 31), druhý proto, že byla slezina nápadně malá (č. 32). Případ poslední nanejvýš demonstruje, jak může methoda Edlefsenova perkutujícího zavésti; tak zv. hluboké ztemnění nesouhlasilo tu s rozlohou horní části sleziny, nýbrž ukazovalo jen, jak vysoko sahá klenba bráničná. Než my a priori v methodu Edlefsenovu a v její spolehlivost vůbec nevěříme. Jeť zbudována na falešném předpokladě. Jak totiž výše vyloženo, učil Edlefsen, že de norma jest horní pol sleziny od zadní střední čáry vzdálen 12 až 15 *cm*! Udání toto je v naprostém odporu s anatomickými nálezy našimi vlastními i cizími. Vyjma oba případy svrchu zmíněné dohmatali jsme se horního konce sleziny vždycky v bezprostřední blízkosti páteře. Dorsální oddíl sleziny důkazu poklepovému nadobro uniká. Učení o hlubokém ztemnění slezinném bylo bajkou, kterou dlužno považovati na dobro a na vždy za odbytu.

Abychom si učinili nějaký konkretnější názor o tom, jak poměrně velká je ta část sleziny, která se prostírá mimo oblast ztemnění nazad k páteři, snažili jsme se na vyňatém orgánu resp. na její facies diaphragmatica odhadnouti velikost plochy vyklepané a nevyklepané. Odhad, jak se samo sebou rozumí, mohl býti pouze přibližný, ale pro naše účele

stačí. Učinili jsme tak celkem ve 12 případech, z nichž 10 jest jich v hořením přehledě zařazeno mezi případy zdařilé a 2 mezi případy nezdařilé. Z obou nezdařilých byla vyperkutována, jak už svrchu řečeno, v jednom ca. šestina (č. 5), v druhém ca. čtvrtina až třetina (č. 9). Ze zdařilých byla vyperkutována v 1 ca. pětina (č. 14), ve 3 ca. čtvrtina (č. 10, 15, 16), ve 2 ca. třetina (č. 19, 21), ve 4 o něco více než třetina (č. 11, 23, 25, 26). *Prostírají se tedy v nejpříznivějším případě asi dvě třetiny, v méně příznivém asi tři čtvrtiny až čtyři pětiny sleziny nazad mimo okrsek slezinného ztemnění — celkem mnohem více, než soudil sám Seitz, který, jak ze třetí kapitoly víme, snížil bez toho cíle perkusse na poklepové určení dolní třetiny orgánu.* I tam, kde jako ve případech č. 10, 11, 14, 15, 16, 19, 21, 26 zjišťujeme poklepem zcela dobře polohu dolního konce sleziny, jsme ještě daleci toho, vystihnouti ztemnění povrchní t. j. dvě třetiny facies diaphragmatica. A *je-li naším přesvědčením, že hluboké ztemnění slezinné spadá v obor nemožnosti, jest na základě předeslaných zkušeností neméně naším přesvědčením, že povrchní ztemnění in toto dá se zjistiti jen zřídka, mnohem řidčeji, než by se mohlo souditi podle četby příruček i nejreservovanějších.*

Z hořeních poznámek plyne také přirozeně nutnost toho, uznati naprosto správným stanovisko formulované po prvé Schusterem a Weilem v ten rozum, že ztemnění slezinné nutno nechávati nazad otevřené. Dodáváme a podškrtáváme: *široce* otevřené. Sami jsme tak nečinili napořád, nýbrž celkem v 17 případech, v ostatních 15 jsme vyklepávali ztemnění uzavřené tak, jak jsme se tomu učili za let studentských, chtějíce se očitě přesvědčiti o anatomické oddůvodněnosti resp. neoddůvodněnosti tohoto počínání.

Velice často bylo v našich pokusech ke ztemnění slezinnému připočteno ztemnění způsobené některým útvarem sousedním. Tímto útvarem bylo:

a) 13krát *omentum* (č. 2, 3, 4, 6, 9, 12, 17, 20, 21, 22, 24, 25, 32), až na jediný případ (č. 21), vesměs tukem prorostlé; víme již, že podle souhlasných zkušeností četných badatelů dovede takové tučné omentum určitě zvuk ztemňovati; nápadná je však poměrná častost, se kterou se to v našich pokusech dálo; v onom jediném případě, kde bylo omentum tuku prosté (č. 21), nezbývá než podle Oestreicha a de la Campa předpokládati „dämpfende Wirkung des unteren vorderen Milzpoles"; v případě č. 2 bylo celé ztemnění tvořeno pouze tučným omentem;

b) 3krát *plíce* (č. 17, 24, 32) svým patrně méně vzdušným a tudíž ztemnění zvuku podmiňujícím dolním okrajem;

c) 2krát zvětšený a ke slezině bezprostředně se přimykající *levý lalok jaterní* (č. 29 a 31);

d) 2krát *žaludek s obsahem*, tekutinou (č. 6 a 13);

e) 1krát *flexura coli lienalis* naplněná skybaly (č. 13).

Oba orgány posléze jmenované, jakož i kličky jejuna nalezli jsme ještě vícekráte v okrsku ztemnění slezinného (tak žaludek 6krát, flexuru

coli lienalis 6krát, kličky jejuna 2krát), ale až na dva případy (č. 16 a 27) byly útvary tyto kryty omentem, které vlastně asi samo zvuk ztemňovalo; v oněch pak dvou případech č. 16 a 27, kde omentum této svrchní krycí vrstvy netvořilo, zasahal do ztemnění žaludek jen úzkým svým pruhem.

Konečně dlužno vytknouti okolnost, že ve dvou z našich případů šlo o nádor sleziny, jednou o nádor prudký u tyfu břišního (č. 5, rozměry sleziny 16×8 *cm*), podruhé o tumor venostaticus (č. 9, rozměry 15×12 *cm*) a že výsledek poklepový v obou těchto případech byl nezdařilý. Zvětšení objemu sleziny nečinilo perkussi její spolehlivější.

* * *

Jest otázka, *jsme-li oprávněni přenášeti na živé tělo zkušenosti, kterých jsme nabyli na těle mrtvém?* Jinými slovy zní tato otázka: jest poloha sleziny za živa tatáž jako po smrti? Nemění se agonií nebo postmortálně? Není slezina za živa posunuta více dopředu a tím učiněna poklepu přístupnější? Ač se Oestreich a de la Camp, kteří si zvláště všímali změn agonií v těle způsobených i topografických vztahů mezi nálezy učiněnými na orgánech za živa a post mortem, o této věci nezmiňují, dali jsme si přece otázku právě formulovanou.

Jest myslitelný trojí způsob, jakým by se dalo zjistiti, zda anatomická představa získaná o poloze sleziny na mrtvém těle platí také o její poloze na těle živém. Předem přesvědčiti se o tom při operativních výkonech, které činí krajinu slezinnou přímé kontrole za živa přístupnou. Podruhé porovnávati poklepový nález v posledních hodinách života získaný s poklepovým nálezem posmrtným. Potřetí informovati se na živém o poloze sleziny pomocí paprsků roentgenových.

Starší z nás pokoušel se s Dr. Sieberem o tento třetí způsob kontroly. V jedné řadě případů (více než 20) jsme slezinu skiaskopovali, v jiné pokoušel se Sieber o její roentgenogramm. Snaha naše není beze zájmu, vzpomeneme-li si, že se za posledních dnů začíná i na jiných stranách o roentgenologii sleziny hovořiti (Löffler, Meyer-Betz z kliniky Schittenhelmovy). Neboť až do té doby se ani velká díla roentgenologická na př. Albersovo-Schönbergovo (IV. vydání z r. 1913) o reontgenologii sleziny nezmiňují.

Dosavadní naše pokusy v této příčině nevedly k cíli. Na štítě není sleziny vůbec viděti, na roentgenogrammu zřídka. A když, tož jest obrys její velice neurčitý, zamlžený a nepodává nám dosti jasné představy o všech topografických vztazích sleziny pro nás důležitých. Také roentgenogrammy Meyer-Betzovy nás v tom směru lépe nepoučují.

Tím méně jest pak možno kontrolovati věrohodnost ztemnění slezinného orthodiagraficky, jak to lze činiti u poklepového nálezu srdečního. I o to jsme se u sleziny se Sieberem pokoušeli, ale bezvýsledně. Snad

zdokonalená technika umožní svým časem takovouto kontrolu poklepu sleziny, snad spíše povede k cíli prvá nebo druhá methoda svrchu naznačená (na př. kontrola při výkonech operativních). Zatím nutno se spokojiti tím, že postmortální změny v poloze sleziny nejsou zaznamenány ani těmi, kdož si, jako Oestreich a de la Camp, těchto zjevů zvláště všímají.

* * *

Jak spolehlivou se jeví na základě našeho bádání perkusse sleziny jakožto methoda vyšetřovací?

Poklep sleziny jest methodou nespolehlivou. Často svádí k hrubým omylům. Zdaří-li se poklepem určiti ze sleziny něco podstatnějšího, je to nejspíše poloha dolního polu s přilehajícími částmi předního a zadního okraje, celkem ve velikosti ca. pětiny, čtvrtiny až ca. třetiny celé plochy facies diaphragmatica; tu a tam je to okraj přední nebo zadní bez dolního polu, jindy úhel mezi slezinou a plicemi nebo mezi slezinou a ledvinou, konečně také šířka sleziny. Tato však mnohem vzácněji, než by se podle knih souditi mohlo. Zjistiti povrchní ztemnění in toto t. j. zjistiti dvě třetiny celého orgánu podaří se asi velmi zřídka, zase mnohem řidčeji, než by se podle četby příruček i nejreservovanějších očekávalo. Hluboké vůbec nikdy, leda kdyby byla slezina malá. Hlavní massa sleziny prostírá se za ztemnění směrem nazad k páteři; v nejpříznivějším pro perkussi případě jsou to asi dvě třetiny, v méně příznivém tři čtvrtiny až čtyři pětiny celého orgánu. Snadno se připočítává ke ztemnění slezinnému ztemnění podmíněné některým sousedním útvarem, nejčastěji tučným omentem. Může se státi, že oblast domnělého poklepu slezinného je zcela tvořena jen omentem.

Jak již výše řečeno, vztahujeme výsledky svého badání především na svou vlastní perkussi resp. na perkusssi školy. Ale kritické hlasy cizích badatelů, které jsme o ceně dané methody v prvé kapitole citovali, zvláště na př. statistika Leubeova podpírají naše poznatky a rozšiřují jejich platnost i na kruhy širší.

Na živém jsou ovšem podmínky pro poklep sleziny o to příznivější, že lze porovnávati výsledky získané *a*) v různých polohách těla, hlavně v poloze diagonální a při stoji, *b*) za různého stavu tlustého střeva (před stolicí a po ní), jakož i žaludku (za syta i na lačno). Srovnávajíce, resp. zakreslujíce si při onemocnění na břišní tyf podezřelém nález poklepový ze dne na den, můžeme na tomto základě i perkussí upevniti jistou měrou svůj úsudek o tom, jak se slezina chová.

Nepoměrně cennější služby jak v posledním tak i ve všech jiných případech koná palpace sleziny. Je-li slezina pod obloukem žeberním určitě hmatna, aniž by byla prostě dislokována, je jistě zvětšena, čímž ovšem není řečeno, že každá zvětšená slezina musí býti hmatna. I zvět-

šená bývá někdy nehmatná, podle zkušeností Thomayerových tenkrát, je-li posunuta ve směru dorsálním.

Obdobně formulují Hutchison a Rainy své stanovisko ve příčině hmatné sleziny slovy: „If one can exclude dislocation, then a spleen which is palpable may safely be pronounced to be enlarged". K této a k obdobné naší hoření formulaci dlužno přičiniti poznámku. Slezina může býti *dislokována*: *a*) je-li současně zvětšena, *b*) je-li tlačena ze sousedství, *c*) jestliže se při normální její velikosti a beze všeho tlaku ze sousedství uvolní její závěsný apparát. V obou posledních případech sub *b*) a *c*) bývá však dislokace velice zřídka anebo vůbec sotva toho způsobu a toho stupně, aby se stala slezina pod levým obloukem žeberním hmatnou. Tak na př. ad *b*): V našich případech č. 29 a 31 byla slezina stlačena zvětšeným levým lalokem jaterním ke XII. žebru resp. pod ně, ale dolní její pol byl hodně vzdálen od oblouku žeberního. Stejně pak četné jiné stavy pathologické mohou sice vytlačovati slezinu z jejího místa, ale nečiní ji hmatnou pod obloukem žeberním. A ad vocem *c*): Kdyby ochablost závěsného apparátu přicházela v přítomné otázce platněji do počtu, musila by býti slezina především často hmatna u žen při enteroptose, čemuž podle zkušeností naší školy nikterak není. A tak, prakticky vzato, reservace přihlížející k dislokaci sleziny a obsažená v hořením ocenění pohmatu sleziny ať našem ať anglických autorů neseslabuje podstatně významu této methody pro poznání, zda je slezina zvětšena nebo ne.

Při poměrně malé spolehlivosti poklepu sleziny a při poměrně větší jistotě palpace jest pochopitelno a oddůvodněno počínání těch, kdo perkussi sleziny nedůvěřují a obracejí svůj zřetel hlavně k jejímu pohmatu.

LITERATURA.

R. 1828 — Piorry, Die mittelbare Perkussion und die dadurch erhaltenen Zeichen in den Krankheiten der Brust und des Unterleibs, aus dem Französ. übersetzt, Würzburg.

R. 1837 — Piorry, Traité de diagnostic et de séméiologie, vyd. druhé, Bruxelles.

R. 1843 — Mailliot, Traité prat. de percussion, cit. podle Jos. Meyera.

R. 1846 — Hamerník, Zur Pathologie und Diagnose des Typhus, Prager Vierteljahrschrift für die prakt. Heilkunde, roč. III. sv. 2. (celé řady sv. 10.).

R. 1848 — Conradi, Ueber die Lage und Größe der Brustorgane, der Leber und Milz beim gesunden Manne und ihre Bestimmung durch die Percussion, Inaug.-Dissert., Gießen, cit. dle Weila.

R. 1855 — Siebert, Diagnostik der Krankh. des Unterleibes, Erlangen.

R. 1855 — Bamberger, Krankh. des chylopoët. Systems, Virchow's Handbuch der spec. Path. u. Ther. sv. VI. č. 1.

R. 1866 — Schuster (z kliniky Seitzovy), Die Perkussion der Milz, Inaug. Dissert., Gießen.

R. 1866 — C. Gerhardt, Lehrbuch der Ausc. und Perc., vyd. prvé.

R. 1868 — Niemeyer, Handb. der theor. u. klin. Perc. und Ausc., sv. I.

R. 1873 — Leichtenstern, Physik.-diagn. Bemerk. zu H. v. Luschka's Lage der Bauchorgane des Menschen, Göschen's Deutsche Klinik č. 26 a 27.

R. 1874 — Weil, Ueber das Vorkommen des Milztumors bei frischer Syphilis, nebst Bemerkungen über die Percussion der Milz, Deutsches Arch. f. klin. Med. sv. XIII.

R. 1875 — Mosler, Krankheiten der Milz, Ziemssen's Handbuch der spec. Path. u. Ther. sv. VIII. č. 2.

R. 1876 — C. Gerhardt, Lehrbuch der Ausc. und Perc., vyd. třetí.

R. 1876 — J. Meyer, Ueber Milzperkussion, Charité-Annalen, ročník I.

R. 1879 — Niemeyer's Lehrbuch der spec. Path. u Ther. neu bearbeitet von Seitz, vyd. desáté, sv. I.

R. 1880 — Weil, Handbuch und Atlas der topographischen Percussion, vyd. druhé

R. 1892 — Maixner, Přír. kniha spec. path. a ther. vnitř. nem., odd. III.

R. 1896 — Eichhorst, Lehrbuch der klin. Untersuchungsmeth., vyd. čtvrté.

R. 1897 — O. Vierordt, Diagnostik der inner. Krankh., vyd. páté.

R. 1898 — Leube, Specielle Diagnose der inner. Krankh., vyd. páté, sv. I.

R. 1898 — Litten, Die Krankh. der Milz, Nothnagel's Spec. Path. u. Ther. sv. VIII. č. 3.

R. 1899 — Edlefsen, Lehrbuch der Diagnostik der inner. Krankh.

R. 1904 — Guttmann's Lehrbuch der klin. Untersuchungsmeth., herausgeg eben von Klemperer, vyd. deváté.

R. 1905 — Oestreich a de la Camp, Anatomie u. physik. Untersuchungsmeth., Berlín.

R. 1905 — Oestreich, Die Ueberlagerung der vergrösserten Milz durch den Dickdarm, Berl. Klin. Woch., Ewald's Festnummer.

R. 1913 — Sahli, Lehrbuch der klin. Untersuchungsmeth., vyd. šesté, sv. I.

R. 1913 — Syllaba-Sieber, Poklep srdce ve světle orthodiagrafie, Sborník Lékařský XIV. (XVIII.).

R. 1913 — Albers-Schönberg, Röntgenologie, vyd. čtvrté.

R. 1913 Hutchison a Rainy, Clinical Methods, vyd. páté.

R. 1914 — Löffler, Leber und Milz im Röntgenbild, Münch. med. Woch. č. 14.

R. 1914 — Meyer-Betz (z kliniky Schittenhelmovy), Meth. und klin. Bedeutung der Darstellung der Leber im Röntgenbild, Münch. med. Woch. č. 15.

Holarktické Anthaxie

(Coleoptera-Buprestidae.)

Napsal JAN OBENBERGER.

Část specielní.

I.

Revise kratomeroidních Anthaxií.

(S 10 obrazci v textu.)

Předloženo dne 12. června 1914.

Druhy rodu *Anthaxia* Eschsch. byly staršími autory (de Marseul etc.) roztřiďovány do dvou velikých skupin v sbg. *Cratomerus* Sol. (obsahující druhy typu *A. hungarica* Sc. vyznačující se nápadnými, stluštěnými tykadly a stehny většinou též odlišně zbarvených samečků) a v Anthaxie vlastní. V novější době Reitter (Fauna germanica III.) utvořil z druhů skupiny *millefolii* F. a *cichorii* Ol. nový subgenus *Haplanthaxia*. Ve skutečnosti, přihlédneme-li k druhům *celého světa* a nikoli k druhům oblasti omezené, jak to činili badatelé starší, shledáme, že rozdělení toto jest neudržitelné a že existuje taková řada tak význačných *přechodů*, jež tak různým způsobem spojují *skupiny na první pohled velmi určitě ohraničené*, že není možno nalézti přesné hranice, jež by dělila tyto podrody. Anthaxie rozpadají se ve skutečnosti ve dvě velké skupiny, z nichž jednu chci jmenovati *Anthaxie kratomeroidní* (jež obsahuje druhy podrodu Cratomerus i Haplanthaxie) a v *Anthaxie vlastní*, širokokrové. Mezi těmito skupinami, jež skládají se opět z menších, více méně přesně ohraničených, dosti neustálených celků, leží několik skupin, jež můžeme stejným právem zařaditi do obou jmenovaných oddělení; to jsou právě ony skupiny přechodní, jež znemožňují přesné rozdělení v podrody u celého tohoto rodu.

V studii této podávám analytický klíč Anthaxií kratomeroidních a skupin přechodních. Diagnosy a poznámky k jmenovaným druhům jakož i část všeobecná budou obsahem studií dalších.

Podkladem mých prací byl obrovský materiál rodu tohoto, zahrnující v sobě četné druhy neobyčejně vzácné, jenž průběhem času jednak se nashromáždil v mé vlastní sbírce, jednak byl mi k revisi svěřen vynikajícími firmami entomologickými (Dr. O. Staudinger & Baug-Haas, Paganetti, Winkler & Wagner etc.), jednak Musei (Wiener Hofmuseum, Deutsches Ent. Museum etc.), jednak čelnými sběrateli českými i zahraničními.

Všem, kteří se přičinili o uskutečnění mého plánu, zrevidovati obsáhlou tuto skupinu, budiž vzdán můj nejvroucnější dík.

Původně chtěl jsem uvésti zde všechny známé druhy světové této skupiny; od plánu tohoto musil jsem ustoupiti pro nepřístupnost exotického materiálu, začasté jen v ojedinělých kusech známého a pro neobyčejnou kusost příslušné literatury. Oddíl, zahrnující exotické druhy, vydati hodlám později ve specielních poznámkách.

* * *

Anthaxia Eschsch.

A'''' Válcovité, rovnoběžné, štíhlé druhy. Struktura štítová jest ponejvíce rovnoměrně tvořená; sestává velmi často z t. zv. ocell (kruhovité nebo pětihranné, síťkovité buňky s vyvinutým, zřetelným středním zrnkem) nebo z buněk jednoduchých (bez středního zrnka), zřídka z vrásek. Na stranách štítových nevyskytuje se zpravidla podélné vráskování. ♂♂ jsou často odchylní zbarvením nebo odchylnou úpravou tykadel, stehen nebo holení. Jestliže jest druh opýřen, *jest opýření toto vždy bílé nebo žlutavé.* (*Cratomerus* Sol. *Haplanthaxia* Rtt.)

Anthaxiae Cratomeroïdes.

1''' Zadní stehna ♂♂ jsou ztluštělá, nebo tykadla ♂♂ jsou silně rozšířena a často dvojbarvá. Krovky jsou hedvábitě zelené až modrofialové, na švu často černavé. Přední část těla (zvl. hlava a kraje štítové) jsou často bíle, dlouze opýřené. Často ♂ odchylně zbarveni. (= *Cratomerus auct.*)

I. Skupina A. hungarica Sol.

2'' Štít jest dosti krátký a široký, na stranách dosti značně *zaokrouhleně rozšířený*; čelo jest krátce opýřeno. Druh tento jest uveden ještě jednou na jiném místě.

8. nupta Ksw. (= Krüperi Gnglb. = duo Sem.)

2' Štít jest na stranách mírně nebo jen málo zaokrouhlen, v zadní polovině většinou dosti rovnoběžný, k předním rohům více zúžen.

3″ Struktura štítová pozůstává též ve středu z normálních ocell, jež *netvoří žádných příčných vrásek*; tedy síťování štítové na ploše *nesplývá* a všechny „buňky" jsou zřetelně oddělené. (Viz též *scorzonerae var. Juno* Obenb.!)

4″ Čelo jest zřetelně opýřené.

5″ Vnější strana předních stehen ♂ má lesklou, purpurově červenou skvrnu podél vnitřního okraje stehna. Tři poslední tykadlové články jsou na apikálním vnitřním konci žlutočerveně zbarveny. Dosti robustní druh z Alžíru.

6‴ Krásně zelený; bez černé pásky na ploše štítové.

7. Bonvouloiri Ab. ♂

6″ Štít nese dvě, více méně zřetelné, černavé podélné pásky. Okraj krovek a šev jsou modře zabarveny. Spodek jest rovněž tak jako svršek zelený. **7. Bonvouloiri Ab. ♀**

6′ Spodní strana jest, rovněž tak jako čelo a strany štítové nádherně, *leskle purpurově červená*. Střed štítu (mezi více méně zřetelnými zelenavými temnými páskami) jest červenavý, avšak daleko slaběji než okraje štítové. Okraje krovečné jsou rovněž tak jako šev normálně modře zabarveny. Rudé zbarvení jest poněkud variabilní — jest někde dosti světlé. Alžír (Téniet el Haad).

7. Bonvonloiri Ab. ♀ var. amabilis Obenb.

5′ Vnější strana předních stehen ♂ jest bez rudé skvrny. Čelo jest krátce a spoře žlutě opýřeno. Tykadla jsou krátká a silná, temně zelená. Úzký, podlouhlý; základní barva krovek jest více měďověhnědá. (Druh tento jest opakován ještě jednou na jiném místě.) Turkestan. **13. Fedtschenkoi Semen.**

4′ Čelo jest lysé, beze stopy po opýření, uprostřed ploše vtisklé.

7″ Struktura štítová jest jemná; ocelly jeví na stranách sklon ku tvoření příčných vrásek. Štít jest často ozdoben dvěma podélnými skvrnami. Opýření prsou a břišních článků jest sporé a nenápadné.

8″ Zadní stehna jsou ztluštělá. Jednobarevně zelený. Krovky jsou více zúžené. Zadní holeně jsou v distální pětině zahnuté, krátké; v apikální polovině jsou krátce a hustě opýřené, na apikální, vnitřní straně nesou několik zrnkovitých zoubků (viz vyobr. 1.). Rusko etc. **11. Diadema Fischer ♂**

Obr. 1. A. Diadema Fisch. Tibia posterior ♂

8′ Zadní stehna jsou štíhlá. Spodek těla a strany štítové rovněž tak jako čelo jsou krásně purpurové. Krovky jsou robustnější, kratší. Zadní holeně jsou úzké a neohnuté, v apikální vnitřní polovině bez zrnkovitých zoubků. Rusko etc. **11. Diadema Fischer ♀**

7′ Štít jest zřetelně stejnoměrně ocellován, méně jemně tečkován, bez černých pásek. Krovky jsou méně zřetelně zúžené než u diadema ♂;

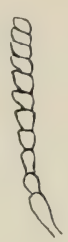
1*

na prsou a na břišních článcích hustěji a silněji opýřen. Turkestan.
12. Fariniger Kraatz.

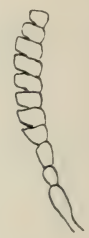
3′ Ocelly štítové jsou alespoň ve středu splynulé ve více méně zřetelné příčné vrásky.

9′ Čelo jest lysé, neopýřené, jamkovitě vtisklé.

10‴ Zelený; štít jest okrášlen dvěma černavými páskami. Na stranách a uprostřed jest často zlatorudý. Též strany zadku jsou zlatové. Strany krovečné a šev jsou zelenomodré; šev jest za středem černavý. Italie, Balkán. (Viz vyobr. 2, 3.)
10. Scorzonerae Friv. ♂ ♀



Obr. 2. A. scorzonerae Friv. Antenna ♀♀



Obr. 3. A. scorzonerae Friv. Antenna ♂♂

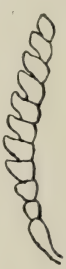
10″ Krovky a štítek jsou modré. Štít (vyjma černavé podélné pásky) a spodní strana jsou rudozlaté. Amasia.
10. Scorzonerae var. ♀ Euphrosyne Gnglb.

10′ Podobně zbarvena jako *Euphrosyne*; ale štít jest i ve středu temně modrozelený, témě jest temněmodré, čelo jest jako u Euphrosyne zlatově rudé. Na štítě jest toto krásné zlatorudé zbarvení silně redukováno, jen v zadních rozích jest rozšířenější. Krovky jsou temně modré. *Struktura štítová sestává ze stejných ocell, jež netvoří žádných vrásek.* Velmi nápadná svým zbarvením i strukturou štítovou. Anatolie.
10. Scorzonerae var. ♀ Juno Obenb.

9′ Čelo jest zřetelně opýřeno.

11″ Struktura štítová jest uprostřed plochy proměněna v systém více méně hustě stlačených a jemných příčných vrásek. Tyto jsou jemné a hustě k sobě přiřazené; mezi nimi není ani stopy po původní ocellaci, jež zmizela úplně. Tykadlové články jsou většinou od třetího nebo čtvrtého článku silně příčné; povrch krovek jest jednobarvý nebo dvojbarvý. Struktura čelní pozůstává ze zaokrouhlených *buněk* (ne ocell! tedy bez zrnka!), v nichž zrnko schází, jest ale často (ač velmi nezřetelně!) naznačeno.

Obr. 4. A. Diana Kerr. Antenna.



Obr. 5. A. dives Obenb. Antenna.

12‴ Smaragdově modrozelená. Příčné vrásky štítové jsou četnější, jemnější a hustější, tykadla jsou *od třetího* článku počínaje rozšířená. (Viz vyobr. 4.) Jednobarvá. Něm. vých. Afrika, Egypt již.? **(1. Diana Kerr.?)**

12″ Smaragdově zelená. Příčné vrásky jsou méně husté a jemné, tykadla jsou teprve od *čtvrtého článku* rozšířená. (Viz vyobr. 5.) Jednobarvý nebo dvojbarvý druh.

13″ Povrch jest zelený. Za středem krovek leží nádherná, rumělkově červená příčná skvrna. Turkestan. **2. Dives Obenb.**

13. Povrch jest jednobarevně zelený. **2. Dives ab. unicolor Obenb.**

12′ Zlatově bronzový. Tykadla jsou temně modrá, od třetího článku rozšířená, články 4, 5 a 6 jsou stejně dlouhé, ostatní jsou téměř kvadratické a hustě sestavené. Štít jest po délce stran široce vmáčklý. Na břišních segmentech leží na stranách místa hustěji opýřená. 12·5 *mm*. Habeš. **3. abyssinica Théry.**

11′ Struktura štítová jest normálně vytvořena; příčné vrásky vystupují tu i tam silněji, avšak zpravidla jsou mezi nimi patrna zrnka; nejsou nikdy tak jemné a zaujímají většinou celý povrch štítový. Tykadla jsou normální, ne nápadně rozšířená; povrch krovek jest vždy jednobarevný. Čelo a témě není čárkovitě vtisklé.

14″ Velké druhy. Zadní stehna ♂♂ jsou zpravidla ztluštěná.

15″ Větší (délka 10—15 *mm*), štíhleji stavěná. Tykadla jsou silně příčná; poslední tykadlové články ♂ jsou na apikálním vnitřním okraji rudočerveně zbarveny. (Viz vyobr. 6.)

Obr. 6. A. hungarica Sc. ♂♂. Tibia posterior.

a) Zelená. Štít jest ozdoben dvěma černavými podélnými páskami. Zadní stehna jsou silně ztluštěná. **4. hungarica Scop. ♂**

b) Zelená. Zadní stehna jsou jednoduchá; ♀. **4. hungarica var. ♀ sitta Kün.**

c) Zelená. Postranní kraje štítové a spodek těla jest krásně purpurově zbarven. **4. hungarica Scop. ♀**

d) Krásně modrofialová. Prostora mezi oběma páskami na štítě jest zelená nebo modrá. Spodek, čelo a postranní kraje štítové jsou nádherně rudě zbarveny. Alžír, Syrie. **4. hungarica ab. ♀ subviolacea Obenb.**

e) ♂; jednoduchá stehna, poslední tykadlové články jsou jednobarevné; zelené. Povrch jest někdy fialový. Z Alžíru. Z mnohých ohledů velmi zajímavý druh tento není mi bohužel in natura znám. **4. hungarica var. ♂ simplicipes Rey.**

f) Abeille de Péririn přiřadil k druhu *hungarica* Sc. formu, jež jest mi neznáma a jež se liší od *hungarica* typické následujícími znaky:

1. Jest menší než normální hungarica — jen 6½—8½ *mm* dlouhé.
2. Zadní stehna ♂ jsou jen velmi nezřetelně ztlustlá.
3. Tykadla jsou zelená a ne modrá.
4. Rudě zbarvené části těla ♀ jsou méně ohnivě zbarveny.
5. Holeně ♀ jsou štíhlejší a méně zahnuté.

Zdá se, že dle všeho jest to spíše nějaká varieta druhu *Eugeniae* Gnglb. nebo samostatný druh. Syrie.

4. hungarica v. iuvenilis Abeille.

15′ Menší (8·5 *mm* dlouhá, 3·25 *mm* široká), zavalitá, širší. Tykadla ♂♂ jsou štíhlá, jednoduchá; poslední tykadlové články jsou zelené, beze skvrn. Intramarginální lištna při okraji krovek jest zřetelně vyvinuta. Mně neznámý druh. Malá Asie. **5. illustris K. Dan.**

14′ Zadní stehna ♂♂ nejsou ztlustlá. Menší druhy.

16″ Vnější strana stehen ♂♂ jest podél vnitřního okraje okrášlena zlatorudým, purpurovým pruhem. Poslední tykadlové články jsou už od čtvrtého nebo pátého počínaje rudě skvrnité ve vnitřních rozích. Štít nese dvě normální pásky, jež jsou více méně silně vyvinuty. Holeně jsou uprostřed poněkud rozšířené a v tomto místě zřetelně zrnitě zoubkované.

17‴ Povrch, spodní strana a většinou též i tykadla jsou zelená. Šev krovečný jest zelený. Malá Asie. (Viz vyobr. 7.)

6. Eugeniae Gnglb. ♂

17″ Hlava, postranní části štítové a spodek jsou purpurově rudé. Témě, předoprsí, tykadla, nohy a krovky jsou zelenomodré až modré; střední páska na štítě (mezi oběma tmavými) jest modrozelená až zlatozelená. Černavé dvě normální pásky na ploše štítové zpravidla nechybí. **6. Eugeniae Gnglb.** ♀

17′ Samička, zbarvená jako ♂♂, zlatozelená. Tykadla jsou modrozelená, štít jest ozdoben dvěma tmavými páskami, šev krovečný jest černavý. 8—9 *mm*. Malá Asie. **6. Eugeniae var.** ♀ **Thalia Gnglb.**

Obr. 7. A. Eugeniae Gnglb. ♂♂. Tibia posterior.

16′ Vnější strana předních stehen jest bez purpurové skvrny. Tykadla jsou jednobarevně, kovově zbarvena. Poslední břišní článek ♀ jest nevykrojený, celistvý.

18″ Plocha štítová jest vyplněna jemným, vespolek splývajícím síťováním, jehož mezery jsou posázeny jemnými „ocellami“. Tyto mezery jsou jakoby uhlazeny. Hustá struktura krovečná tvoří nepravidelné příčné (jen naznačené!) vrásky, jež rovněž činí dojem, jakoby byly uhlazeny.

19″ Zelená. Dvě temné pásky podélné na štítě. Strany štítové jsou zlatové (♂); ♀♀ jsou více zlatozelené, ale jinak stejně zbarveny, jako ♂♂. Štít bývá po stranách často značně zaokrouhlen. Malá Asie etc. **8. nupta Ksw.**

19′ Štítek a krovky jsou modré. Tykadla a nohy jsou modrozelené; též úzká zelená střední páska na štítě a spodek těla jest zelený. Postranní části štítu jsou zlatorudé, hlava jest zlatozelená. Smyrna.

8. nupta var. ♀ **Aglaia Gnglb.**

18′ Štít jest na ploše opatřen hrubými, příčně vrásčitě splývajícími ocellami. Mezi vráskami leží všude hrubé ocelly. Krovky jsou hrubě vrásčité, zrnité. Šev a kraje krovečné jsou u některých kusů nápadně černavé.

20‴ Spodek i svrch těla jest zelený. Řecko, Kavkaz, Malá Asie.
9. Sponsa Ksw. ♂

20″ Předoprsí jest modré nebo modrozelené, ostatek spodní strany jest purpurově zlatový; témě, dvě pásky na plošině štítové a štítek jsou černavé, krovky jsou zelené. **9. Sponsa Ksw. ♀**

20′ Samičky, jež jsou podobně zbarveny jako ♂♂ (tedy zelené — vespod i svrchu). **9. Sponsa var. ♀ Adaliae Gnglb.**

1″ Zadní stehna a tykadla ♂♂ jsou jednoduchá. Dosti stlačené druhy. Struktura štítová jest ostrá, střed štítu jest téměř úplně *bez tečkování, uhlazen,* lesklý. Struktura pozůstává na stranách z více méně zřetelných, malých ocell, jež ke středu se mění v ostré, jakoby vpíchnuté tečky s hladkým lesklým okrajem; *uprostřed plošiny mizí i tyto tečky téměř úplně.* Šev jest za štítkem v dosti značném rozsahu *uhlazen,* takže dosti široký pásek po obou stranách švu *jest lesklý, bez teček.* Krovky často nesou slabě naznačená podélná žeberka, jež jen nenápadně vystupují. Africké druhy svérázného vzhledu.

II. Skupina A. aegyptiaca Obenb.

21″ Větší, 12·25 *mm* dlouhá, lesklá, smaragdově zelená. Tečkování na stranách štítu jest hrubší. Uhlazený, lesklý šev jest zlatorudý, ostře oddělený od ostatní zrnité plochy kroveční. Ke špičce přechází zbarvení ponenáhlu v zelený tón; přesné rozmezí barvy zelené a červenavé jest tam méně určité. Na temeni leží malá, jemná, zvýšená čárka. Spodek těla jest smaragdově zelený. Horní Egypt.
14. Aegyptiaca Obenb.

21′ Menší, temně zbarvená. Spodek jest temně mosazně hnědý.

22″ Celé tělo jest černohnědé; spodek těla jest světlejší. Šev krovek jest stejně zbarven jako ostatek těla. Na krovkách jsou na konci naznačena 2—3 slabě zvýšená žebérka. Horní Egypt.
16. Isis Obenb.

22′ Dvojbarevná. Spodek těla jest temně měďový, lesklý, střed štítu a uhlazený šev krovečný jest stejně zbarven. Zrnité strany krovečné rovněž tak jako tečkované postranní části štítové jsou měďově rudé. Horní Egypt. **15. Pharao Obenb.**

1′ Zadní stehna ♀♀ i ♂♂ jsou zpravidla normálně vyvinuta, neztlustlá (viz též *Arabs* ♂ Mars.!). Střed štítu není nikdy úplně uhlazen a lesklý; vždy ocellován nebo chagrinem pokryt. Struktura štítová nikdy nesestává z ostrých, „vbodnutých" teček. Tykadlové články jsou vždy jednobarevné.

23‴ Ocelly na ploše štítové jsou v přední části plošiny *splynulé, proměněny ve více méně zrnité příčné vrásky, jež jsou hustě nakupeny. Struktura jest zde značně zrnitá.* (Jen u *obockiana* Frm. jest celá plošina stejnoměrně ocellována — a v tom případě jest tělo *černo-*

hnědé a protáhlé.) Mezi zrnitou strukturou nebývá často v přední části štítové žádných zřetelných ocell. (Typus: *millefolii* F.) *Vlastní spodina* štítová jest ale vždy více méně lesklá, bez mikroskopického chagrinování; postranní ocelly nejsou nikdy ve spodině chagrinovány. Centrální zrnka ocell jsou na plošině štítové často rudimentní.

24″ Štít jest jen nepatrně nebo mírně klenutý. Krovky jsou *protáhlé*, svrch těla jest *temně*, bronzově až černě zabarven, jednobarevný (až na dvě černavé pásky štítové, jež někde přicházejí). Větší druhy.

III. Skupina Kiesenwetteri Mars.

25″ Štít je i na přední části plošiny stejnoměrně ocellami pokryt; ocelly tedy *nesplývají zde* ve příčné vrásky nebo zrnkování. Čelo jest *žlutavě* opýřeno. Štít jest 1½krát širší než dlouhý před zadními rohy mělce a ploše, široce vtisklý. Černohnědý, veliký, protáhlý druh; spodní část těla jest světleji zbarvena; strany zadku jsou měďovější, rovněž tak jako celá spodní strana hnědožlutě opýřeny. Erythraea, Obock. **21. obockiana Frm.**

25′ Struktura štítová mění se na přední části plošiny štítové v jemnou granulaci nebo v příčné vrásky. (Viz též *Fedtschenkoi* Sem.!)

26″ Zadní holeně ♂ jsou *velmi prohnuté*; přední holeně jsou na apikální vnitřní straně ozbrojeny *silným zubem*. Stehna ♂ jsou *rozšířená a ztlustlá*. Protáhlý, měďově bronzový, veliký druh (10 *mm*). Štít jest ocellami pokryt, uprostřed ploše vtisklý, před zadními rohy vmáčklý. Strany prsou a zadku jsou bíle opýřeny. Arabie. **24. Arabs Mars.**

26′ Zadní stehna jsou normální, zadní holeně nejsou nápadně prohnuté; přední holeně jsou jednoduché. Menší druhy.

27‴ Štít je mírně klenutý.

28″ Čelo je ozdobeno třemi příčnými páskami, jež se skládají z bílého opýření. Tykadla jsou téměř delší než štít. Větší, měďový druh z Egypta. 8 *mm*. **20. Congregata Klug.**

28′ Čelo bez opýřených pásek, jednoduše chloupkované.

29″ Tykadla jsou silná a krátká; nedosahují až do poloviny délky štítové. Štít jest téměř kvadratický, na ploše též před středem ještě zřetelně ocellami pokrytý, před zadními rohy mělce vtisklý. Základní zbarvení jest zeleně bronzové, na krovkách více měďové. Mně neznámý druh z Turkestanu, jenž snad patří do skupiny *hungarica* Scop., kde již byl uveden. **13. Fedtschenkoi Sem.**

29″ Tykadla jsou delší a štíhlejší, ocelly jsou aspoň uprostřed středního kraje splynulé v příční zřetelné vrásky. Jinak zbarvená.

30″ Štít jest na ploše okrášlen dvěma špatně ohraničenými černavými páskami. Bronzová.

31′ Štít jest uprostřed více méně zřetelně vtisklý; jest okrášlen dvěma tmavými, podélnými skvrnami, jež u prostřed jsou oválnější; v přední třetině délky trochu zaokrouhleně rozšířen. Krovky jsou ku konci protáhlé, svrchu dosti sploštělé. Tykadla jsou zelená. V Mezopotamii. **17. Kollari Mars.**

31′ Štít jest bez vtisku uprostřed, a uvnitř zadních rohů mělce vmáčklý jinak (dle popisu!) úplně jako předešlý druh stavěná. Jest velice pravděpodobno, že druh tento představuje pouze varietu *Kollari*, nebo že dokonce s ní jest totožný. Persie-Širaz. **18. Starcki Gnglb.**

30′ Štít jednobarevný, krovky jsou krátce ale velmi zřetelně (zvláště při švu) sporými vlásky opýřené. Temně zbarvená.

32″ Fialová. Tykadla jsou modrozelená. Epistom jest zelený. Oči jsou velké, na temeni dosti sblížené. Zadní rohy štítové jsou vtisklé. Povrch jest dosti plochý. Krovky jsou vzadu zřetelně ozubeny. Jinak druhu *Kiesenwetteri Mars* značně podobna. 6 *mm*. Syrie. **19. Cupriventris Mars.**

32′ Povrch černavý (často s přídechem fialovým).

33″ Menší (5—5·6 *mm*), štíhlejší. Struktura štítová jest dosti hrubá, poměrně *hrubější* než u následujícího *většího* druhu, velmi zřetelná. Pozůstává ze silně vyvinutých ocell, jež na plošině přecházejí v silné, příčné vrásky mezi, kterýmiž není možno pozorovati žádných už ocell. Štítek jest lehce klenutý. Krovky jsou poměrně jemněji zrnkovány než u *Kiesenwetteri*. Snad jen menší severnější rassa následujícího druhu. Bulharsko. **23. Rambouseki Obenb.**

33′ Větší (9·5—11 *mm*), zavalitější. Struktura štítová jest dosti *jemná*, poměrně jemnější než u *menší Rambouseki*. Ocelly jsou též ve středu plošiny štítové dobře patrny; příčné vrásky nejsou nápadně zvýšeny; struktura celého štítu propůjčuje mu vzhled jemnější, stejnoměrnější. Krovky jsou zavalitější, hruběji zrnkovány; štítek jest vydutý. Řecko, Malá Asie atd. **22. Kiesenwetteri Mars.**

27″ Štít jest značně silně klenutý, před zadními rohy, před základnou mělce vtisklý. Krovky rovněž tak jako spodek jsou klenuté, tykadla jsou modrá, dlouhá a štíhlá. Přední kraj štítu jest jen velmi mělce vykrojen, čelo jest klenuté, bělavě opýřené. Štít jest na stranách mírně zaokrouhlen, zadní kraj jest uhlazen, před štítkem leží zcela malá ku hlavě obrácená s ostatním uhlazeným zadním krajem spojená, hladká trojúhlá ploška. Povrch, rovněž tak jako spodek jest jasně měďově zbarven, dosti málo lesklý. Turkestan: Údolí řeky Illi. **25. Illiensis. Obenb.**

27′ Předchozímu druhu podobná; čelo jest více zúžené, vnitřní okraje očí na temeni silněji sbíhavé, štít jest protáhlejší rovnoběžný, struktura jest daleko ostřejší. Ve spodině jest štít *velmi lesklý*; oráměn

jest vyšší a méně husté. Povrch těla, jež jest daleko lesklejší, jest jasně mosazně kovový se zelenými odstíny, daleko menší, připomíná *Inculta v. aerea Rey*. Alžír. **26. Kabyliana Obenb.**

24′ Štít jest více klenutý. Postava jest *kratší*, často zavalitější, krovky nejsou na špičce nikdy dlouze zúženy.

IV. Skupina A. millefolii F.

34″ Povrch jest konstantně zelený, zlatozelený až mosazně zelený. Epipleury krovečné jsou poměrně *široké a tlusté*. Poslední břišní článek jest na každé straně hluboce krátce čárkovitě vtisklý. Krovky jsou na špičce více přiostřené než u normální *millefolii* F. Spodina těla jest na stranách bíle skvrnitě opýřena.

35″ Povrch a spodek těla jsou stejně zeleně zbarveny. Zadek jest normálně dosti ploše klenutý. V Alžíru značně rozšířená. (Anthemidis auct.) **27. pleuralis Farm.**

35′ Povrch jest zelený, spodek jest zlatový. Zadek jest velmi zavalitý, klenutý a nápadně vysoký. Struktura štítová jest méně zrnitá. Alžír (Lambessa). **27. pleuralis v. robustior Obenb.**

34′ Pokud se barvy týče, variabilní, zelená, mosazně zlatová, až černě fialová. Epipleury jsou normální, užší.

36‴ Poslední břišní článek jest u špičky opatřen dvěma hlubokými, šikmými, postranními, krátkými vtisky.

a) Větší. Štít jest rovnoběžný bez ostře projádřených vtisků. V barvě variabilní, avšak vždy jednobarevný. Mediterranea etc. **28. millefolii Fab.**

b) Větší 5·5—6 *mm* dlouhá. Hlava a přední části štítové jsou téměř černé, ostatní tělo jest temně bronzově hnědé (var. *a*. Marseul). **28. millefolii a. Budtzi Bickh.**

c) Prostředně veliká. Štít jest často vtisklý — často rovný. Povrch jest zeleně zbarven, zbarvení toto přechází na krovkách za štítkem do bronzova. **28. millefolii a. polychloros Ab.**

d) Malá, jen 4 *mm* dlouhá. Štít jest k základně poněkud zúžen; zadní rohy štítové jsou vtisklé. Hlava jest smaragdově zelená nebo fialově rudá. Západomediterranní rassa. **28. millefilii v. smaragdifrons. Mars.**

e) Štít jest od $^2/_3$ délky k základně rovnoběžný, do předu *silně zúžený*, klenutý, čelo jest klenuté, černavé, rovněž tak jako štít. Malá Asie. Taurus. **28. millefolii v. scutellaris Obenb.**

36″ Poslední břišní článek jest bez vtisku, jasně zelená, podobná *aberr. polychloros Ab.* 5 *mm*. Ježto udané znaky dosti jsou variabilní, jest dle všeho jen jedna z četných forem rozšířené *millefolii*. Jižní Rusko. **29. rossica K. Dan.**

36′ Poslední břišní článek jest na špičce jednoduše vtisklý, konstantně bronzově zbarvená; čelo jest zbarveno jako ostatní povrch na krovkách velmi jemně stejnoměrně zrnitá.

37″ Zavalitá, tlustá, méně lesklá; poměrně velmi jemně zrnitá na plošině krovečné. Jižní Evropa. **30. inculta Germ.**

37′ Štíhlejší, rovnoběžnější, hladší, lesklejší, hruběji, méně pravidelně zrnitá. Struktura štítová jest zmatenější, zřetelnější, silnější. Temnější forma. Jižní Evropa. **30. inculta v. aerea Rey.**

23″ Ocelly na plošině štítové jsou též *uprostřed přední poloviny štítové zřetelné*; někdy jsou úplně zahlazené (pumilla Klug!) — potom jest plošina klenutého štítu velmi jemně zrnitě chagrinovaná. *Ocelly netvoří příčných vrásek.* Jsou ve spodině *bez jakéhokoli chagrinu*, lesklé.

38‴ Hlava více méně silně vyčnívá. Jest často nápadně široká, oči po stranách často dosti značně vystupují; zadní rohy štítové jsou více méně pravoúhlé až často *ostroúhlé*, jemně zrnité, válovité, nápadné měďově až zlatově zelené zbarvení, ponejvíce severoafrické druhy.

V. **Skupina A. stupida Mars.**

39″ Zlatozelená. Plocha štítu jest často ozdobena dvěma tmavými skvrnami. Hlava jest pokryta jemnými kruhovitými ocellami.

40″ Větší. Štít jest 1½kráte širší než dlouhý, ocelly jsou kulatější. Vnitřní okraje očí se na temeni sbíhají. Hlava jest široká. Šev jest dosti lesklý, avšak ne přihlazený. 5 *mm.* Senegal. Sev. Afrika (západní část). **31. binotata Chevr.**

40′ Menší. Štít jest téměř dvakráte delší než širší, ocelly, zvláště na základně stávají se hranatými a silně příčnými. Šev jest za středem přihlazen, zde na přihlazené, dosti rozsáhlé plošce mosazně kovový; jinak jest barva krásně smaragdově zelená. Ocelly štítové jsou pětiboké, s jemnými středními zrnky. 4·5 *mm.* Severní Afrika (východní část). **32. Hauzeri Kerr.**

Obr. 8. A. clavata Obenb. Antenna.

39′ Kovově měďové druhy, bez skvrn na štítě, jehož ocelly jsou okrouhlé, nikdy příčné nebo hranaté.

41″ Tykadla jsou nápadně zavalitá, silná, jednotlivé články jsou silně příčné, rozšířené. Čelo jest dosti dlouze bíle opýřeno. Mosazně kovová, protáhlá, tykadla a čelo jest smaragdově zelené. 7 *mm.* Habeš, Erythraea. (Viz vyobr. 8.!) **34. clavata Obenb.**

41′ Tykadla jsou normální, nikdy nápadně ztlustlá, kratší.

42″ Ocellace štítová jest ve spodině *zrnitá*, chagrinovaná, velmi nízká, jako by setřelá, avšak přece zřetelně patrná; proto

jest štít *matný, méně lesklý*. Štít jest 1½kráte širší než dlouhý, krovky jsou dosti ploché a prodloužené. 5 *mm*. Mesopotamia.

35. Semiramis Obenb.

42′ Ocellace jest zřetelnější, ostrá, ve spodině *hladká*, bez chagrinu, štít jest proto *lesklejší*.

43″ Štít není k základně příliš nápadně zúžený. Struktura štítová jest též na plošině více méně zřetelná.

44″ Větší africké druhy. Zadní rohy štítové nevyčnívají nápadně špičatě.

45″ Štít jest dvakráte širší než dlouhý, do zadu nepatrně, do předu jen slabě zúžen, ocellován. Ocelly splývají po stranách *v několik podélných vrásek*; na ploše jsou jen jemné; před základnou štítovou jeví sklon k vytváření příčných vrásek; v okolí předního kraje jsou okraje ocell vymizelé a jen jich střední zrnka zůstávají stále zřetelna. Struktura štítová jest vůbec nízká, jakoby polosetřelá. Čelo jest široké, měďově rudé. Krovky jsou na ramenách širší o něco nežli štít, zavalité, dosti krátké. Senegal; snad i v Marokku. 6·5 *mm*.

33. aenea Cast. G.

45′ Štít jest jen 1½kráte širší než dlouhý, k přednímu kraji značně zúžený, zadní rohy jsou ostré; za středem jest na stranách jemně vykrojený, všude velmi stejnoměrně, velmi zřetelně ocellován. Stěny ocell jsou dosti zvýšené; proto jest struktura štítová velmi zřetelná. Hlava jest krásně zelená, menší než u *aenea C. G.* Krovky jsou delší, jen tak široké jako štít. Velký, lesklý druh, barvou připomínající značně *inculta Germ.* Alžír.

36. stupida Mars.

44′ Menší (3·5—5·5 *mm*). Čelo jest zelené, široké. Oči čnějí dosti značně po stranách hlavy. Strany štítu jsou rovnoběžné, zadní rohy jsou ostře pravoúhlé a těsně ve špičce vmáčklé a sploštělé. Struktura plošiny štítové jest oné druhu *inculta Germ.* podobná, jest jakoby setřená a zmizelá; pozůstává z kulatých ocell.

Forma zadních rohů štítových jest neobyčejně charakteristická. Druh tento připomíná velmi podobná *A. Winkleri* m. ze Syrie, jež ale patří mezi Anthaxie širokokrové (planipennes). Bývá ve sbírkách pode jménem *„stupida Mars“*. Řecko: Attika.

37. Minerva Obenb.

43′ Štít jest k základně zúžen, bez jakékoli síťovité nebo kroužkovité struktury na ploše, značně klenutý, Egypt.

Druh tento uveden jest na jiném místě ještě jednou, ježto neznaje jej, leč dle popisu, nemohu jej s jistotou zařaditi.

38. pumilla Klug.

38″ Hlava jest normální, nenápadně rozšířená. Zelené, zlatové, černomodré nebo jednobarevné druhy. Krovky jsou jednobarevné, bez jakékoli skutellární, obraničené skvrny. V zadních rozích štítových jest často plochý, jen zřídka ostřejší a zřetelnější vtisk (*berytensis*

Ab.!). Centrální zrnka ocellová vystupují většinou *velmi ostře*, kdežto stěny ocell jsou často jen velmi slabé a nízké. Prostředně velké druhy.

VI. Skupina A. cichorii Ol.

46‴ Krovky jsou za středem poněkud rozšířeny. Zeleně bronzová. Štít jest opatřen čtyřmi vtisky. Trochantery jsou chráněny konickým zoubkem. Kaspická oblast. **43. spinosa Ab.**

46″ Krovky jsou více přišpičatělé, nerozšířené; tělo jest tedy *štíhlejší, méně zavalité*. Trochantery jsou nechráněné. Kovově zbarvené, lesklé druhy. Štít jednobarevný, bez příčné červené pásky.

47″ Velmi protáhlá, velmi štíhlá, zlatozelená, lesklá. Krovky jsou více méně ohnivě rudé, základní vyjímaje. Opýření hlavy jest bělavé. Plocha štítu jest pokryta širokými ocellami, jež ku špičce se poněkud sbíhají, jež ale nevytvořují žádných vrásek. Na krovkách jsou naznačeny nezřetelné stopy po podélných řadách, jako na př. u *praeclara* Mannh. Poslední břišní článek ♂ jest na špičce přehnut, ale bez jakýchkoliv vtisků uprostřed. Persie. **39. Schach Abeille.**

47′ Méně protáhlá, zavalitější. Krovky bez naznačené, v řadách sestavené struktury, stejnoměrně zrnité.

48″ Čelo jest žlutě opýřeno, uprostřed ploše vtisklé. Tykadla jsou černavě zelená; zlatový, velmi lesklý druh. Poslední břišní článek ♂ jest uprostřed vtisklý; opýření vnější strany zadních tibií jest žlutavé.

a) Celá zlatozelená. (♂ jest dle Abeillea de Perrin červenější, avšak moji tři ♂♂ jsou úplně zlatozelení.) Spodek jest zelený. Kavkaz. **40. flavicomes Ab.**

b) Krovky, strany štítu a spodek jsou nádherně rumělkově červené, silně lesklé; jen téměř hladké čelo a plocha štítu jsou zlatozelené. Eriwan. **40. flavicomes var. (♀?) eriwana Obenb.**

48′ Čelo jest bíle opýřeno. V celku matnější, méně lesklá.

49″ Střední holeně jsou na konci zahrnuté a hustě opýřené. Skulptura těla (a zvláště štítu) jest setřelejší. Jinak podobná druhu *Cichorii* Ol. (♂). Malá Asie. Mně neznámá. **41. serena K. Dan.**

49′ Střední holeně jsou jednoduché. Struktura těla jest normální.

50″ Hlava jest velmi široká, velmi značně klenutá, oči jsou velmi veliké; čelo jest síťkováno, ale nikoliv ocellováno (tedy: retikuly bez středových zrnek!). Štít jest parallellní, s pravoúhlými rohy; plocha jest ocellována; zrnka ocell jsou zřetelnější než síťkování kolem nich. Krovky jsou dosti lesklé. Na povrchu i vespod rudě bronzová. Morava (???). Mně neznámá. **42. laticeps Abeille.**

50‘ Hlava a štítová struktura jest normálně vytvořena.

51″ Massivnější, zlatovější, více hedvábitě lesklá. Ocelly jsou málo patrné; často jest štít více zlatový. ♂ má přední holeně prohnuté; poslední břišní článek ♂ jest na stranách a na konci přehnut; konec annálního článku jest hluboce vykrojen. Alžír (Monts Aurès). Mně neznámá. **43. domina Abeille.**

51′ Štíhlejší, méně hedvábitá. Štítová struktura jest zřetelná. Méně zavalitá. Annální článek a přední tibie ♂♂ jsou normální. Střední a jižní Evropa, Alžír, Malá Asie. **44. Cichorii Oliv.**

A″ Zadní tibie jsou na vnější straně zřetelně *temně* opýřeny. Více méně matnější.

α″ Dosti zavalitá, krovky jsou dosti protáhlé, avšak přece dosti široké, zřetelně krátce bíle opýřené. Na temeni lze pozorovati velmi zřetelnou vtisklou podélnou čárku. Krovky jsou mosazně měďové nebo zelené. Větší, zelenější a silnější nežli forma základní. Persie (Hauser). **44. cichorii var. parthica Obenb.**

α′ Méně zavalitá, protáhlejší a více zašpičatělá.

β‴″ ♂♂; nahoře i vespod zelení, často s přídechem do modra. Forma typica. **44. cichorii Oliv. ♂♂**

β‴ ♀♀; krovky více méně temně rudě bronzové, štít a okolí štítku z části zelenavé. Forma typica. **44. cichorii Oliv. ♀♀**

β″ ♀♀; nahoře i vespod zelené. **44. cichorii ab. ♀ chamomillae Mnnh.**

β′ ♂♀; štít jest klenutější, hladší, na přední straně lesklejší. Spodní strana jest bronzově černá. Lyon. **44. cichorii var. gibbicollis Rey.**

A′ Zadní tibie jsou na vnější straně světle opýřeny. Lesklá. Štít jest na ploše černomodrý, štítek jest modrofialový, témě jest modré. Anatolia. **44. cichorii var. nigrithorax Obenb.**

46′ Krovky jsou téměř až *za střed paralellní, poměrně značně široké*; proto tyto druhy omylem byly kladeny mezi „široké" Anthaxie. Strany štítu jsou *značně zaokrouhleny*, v zadních rozích ploše vtisklé. Malá skupinka následujících druhů tvoří jakýsi přechod k velké skupině *Anth. širokých* a připomíná v mnohém ohledu skupinu *A. flammifrons* Sem. Trochantery jsou jednoduché.

52‴ Krovky jsou fialově modré, delší, více přišpičatělé. Štít jest více protáhlý, na předním okraji méně vykrojen, ocelly jsou dosti nezřetelné. V zadních rozích jest štít vmáčklý. Poslední břišní článek ♂ jest uprostřed podélně, rýhovitě vtisklý. Před temnou základnou jest štít ozdoben v přední polovině světlou, růžovou příčnou páskou, za níž leží na základně příčný pruh černý. Jinak podobná druhu *hypomelacna* Ill. ale delší. Syrie. **45. berytensis Abeille.**

52″ Krovky jsou zelené.

53″ Štít jest rovněž tak jako čelo rudý nebo zlatový, s černou příčnou páskou podél předního kraje. Jižní Evropa, etc. **46. hypomelaena Ill.**

53′ Štít jest jednobarevný. **46. hypomelaena ab. nitidicollis Lap.**

52″ Krovky jsou černofialové až modrofialové, velmi tmavé, štít jest na ploše černý a matný, jen po stranách dosti úzce zlatozeleně nebo zlatožlutě obrouben. Hlava jest zlatožlutá nebo zlatozelená. Štít jest na plošině posázen zřetelnými ocellami, jež nejsou příliš vysoké. Rhodos. **47. Olivieri Lap.**

38′ Hlava jest normální. Štít jest mnohdy na místě ocellace pokryt jen velmi zřetelným, dosti hrubým síťkováním, kde jednotlivé buňky nemají středních zrnek (na př. *praeclara* Mannh.). Povrch jest vždy dvojbarevný, krovky jsou purpurově červené až červenohnědé, štít jest černomodrý nebo modrý, často s tmavými skvrnami. Často jest více méně světlá, více méně ostře obraničená trojúhlá skutellární skvrna přítomna. Štít jest na stranách často modře nebo růžově obrouben.

VII. **Skupina A. olympica Ksw.**

54″ Struktura štítová pozůstává ponejvíce z ostře vystupujících mnohostěnů (nejčastěji nepravidelných pětistěnů nebo čtyřstěnů), jest síťovitá; zmíněné mnohostěny jsou bez středního zrnka nebo toto jest rudimentní, téměř neznatelné, velmi slabě naznačeno. Štít jest ve spodině silně lesklý. Krovky nesou často stopy slabě naznačených řádek; skutellární trojúhelník, barvou odlišný od ostatních krovek, bývá jen naznačen.

55″ Hlava jest dosti klenutá, se zřetelnou podélnou rýhou na čele. Strany štítové jsou zaokrouhleny; zadní rohy jsou otupené; štít sám jest velmi krátký, velmi široký, širokými a velkými mnohostěnnými „buňkami“ pokryt. Středová zrnka chybí. Předek těla jest temně zelený, krovky jsou bronzové, krátké, klenuté, na základně zelenavé; povrch krovek jest velmi stejnoměrně zrnitý. „Orient“. Mně neznámá. **48. truncata Abeille.**

55′ Hlava jest široká, dosti plochá, bez podélné rýžky. Strany štítové jsou normální, rovnoběžné, štít jest přiměřeně krátký, $1^2/_3$kráte širší než dlouhý, s téměř pravoúhlými zadními rohy. Hlava a štít, rovněž tak jako základna krovečná a krátká skvrna podél švu krovečného jsou zelené. Štít jest na plošině okrášlen dvěma více méně vystupujícími podélnými skvrnami. Krovky jsou ruděbronzové, s naznačenými podélnými řadami. Jižní Evropa (východní část), Malá Asie, Syrie etc. **49. praeclara Mannh.**

54′ Struktura štítová sestává z malých *kulatých ocell*, jež, zvláště na předním okraji, velmi zhusta splývají. Štít jest ve spodině zhusta nelesklý. Krovky jsou delší, vždy bez zřetelněji naznačené, řádkové struktury. Oči méně po stranách vyčnívají. Často jsou zrnka uprostřed *kulatých* ocell méně zřetelná; pak činí struktura více síťovitý

dojem — tehdy jsou ale okraje ocell jen slabě zvýšeny a spodina ocell jest matná, nelesklá.

56″ Zelená štítková skvrna jest velmi pravidelná, od červené základní barvy krovek *velmi ostře* oddělená, bez barevných přechodů; nekryje celé základny krovečné. Krovky jsou podlouhlé, nádherně karmínově červené, lesklé.

57″ Štítková skvrna jest velmi dlouhá, zaujímá polovinu délky krovečné; jest nádherně zlatozelená, se zlatými okraji. Krovky jsou dosti ploché a krátké, temně karmínově fialové, na špičce široce zaokrouhlené, krátce a spoře žlutě opýřené. Štít jest asi dvakráte širší než dlouhý, k přednímu kraji a k základně mírně zúžený, před zadními rohy ploše vtisklý, na plošině ozdoben dvěma temnými skvrnami (dosti neurčitými). Struktura sestává z vícestranných, hranatých ocell, s nezřetelnými, polozmizelými středními zrnky; stěny ocell jsou nízké. 5·25 *mm*. Kašmír. **50. bivulnerata Obenb.**

57′ Skutelární trojúhelník jest krátký.

58″ Štítek jest vždy zelený, střední páska na štítě (zelená — mezi oběma temnými) jest širší, struktura štítová jest velmi stlačená, nízká; čelo jest často zlatozelené s náběhem do měďova. Ocelly štítové jsou zvláště na obou temných štítových páskách (jež jsou menší než u následujícího druhu) zřetelné. Struktura štítová jest na předním okraji velmi setřelá a neurčitá. ♂♂ i ♀♀ mají stejně upravené přední tibie (jež jsou rovné, neprohnuté). Štít a štítový trojúhelník jest zelený, krovky jsou nádherně karmínové. Syrie. **51. Israëlita Abeille.**

58′ Štítek jest černý. Zelená střední páska na štítě jest úzší; obě černé skvrny na štítě jsou veliké. Struktura štítová jest obdobná oné předešlého druhu. Čelo jest často zcela černé. Holeně předního a zadního páru ♂♂ jsou silně dovnitř prohnuté. (Viz obr. 9.!)

59″ Štít jest ve spodině matnější; ocelly jsou menší, méně zřetelné; zbarvení (též spodní strany!) jest v celku temnější. Trojúhelník na základě krovek jest vždy velmi ostře ohraničen. Tvar jest dosti klenutý a štíhlý. Jižní Evropa etc. **52. viminalis Lap.**

Obr. 9. A. viminalis dap. ♂. Tibia auterior.

59′ Štít jest ve spodině lesklý, hladký. Barvy těla jsou nádhernější. živější. Trojúhelník na základně krovek jest vždy zřetelně odsazen, Obě černé skvrny na štítě jsou vzadu zúženy a zanechávají před zadními rohy malou čtyřhrannou plošku volnou, zlatovou. Sedmihrady, j. Francie. **52. viminalis var. ditescens Abeille.**

56′ Štítková trojúhlá skvrna splývá s ostatní barvou plochy krovečné ponenáhlu, prostřednictvím různých přechodných odstínů; jest tedy neurčitě ohraničená, temná (černo- nebo modrozelená, nikdy živě

zlatozelená, jako u skupiny předchozí); zaujímá celou základnu štítovou. Struktura štítová pozůstává z massivnějších, více stlačených ocell než u předcházejících druhů.

60″ Struktura štítová přechází uprostřed ve více méně zřetelné příčné vrásky. Ocelly jsou hrubé, malé, massivní. Struktura těla jest celkem hrubší než u následujících druhů; barvy jsou temnější, méně určité.

61″ Štít jest na stranách stejně zbarven jako uprostřed (zeleně, modře nebo černomodře). Štítková skvrna jest nezřetelná, po obou stranách štítku jen málo rozšířená. Jinak druhu *A. olympica* Ksw. značně podobná, ale štíhlejší. Alžír, j. Francie.

53. fulgentipennis Abeille.

61′ Okraj štítu jest normálně měďově zbarven, růžový, lesklý. Štítková skvrna jest po obou stranách štítku více rozšířená. Krovky jsou více měďové, zrnitější, méně štíhlé.

62″ Štít jest na ploše rovný, bez vtisků. Španěly, Alžír, etc.

54. parallela Lap.

62′ Štít jest opatřen čtyřmi vtisky, jež leží v jedné příčné přímce.

54. parallela f. notaticollis Rey.

60′ Struktura štítová jest stejnoměrně utvářena; uprostřed nepřechází nikde ani v krátké příčné vrásky. Zrnkování krovek jest jemnější. Druhy tyto připomínají druh *viminalis Lap.*

63″ Větší, zavalitější, pestřeji zbarven. Štítek jest černomodrý velmi lesklý. Hlava jest opýřena delšími, zřetelnějšími bílými chloupky, Struktura štítová (ocelly) jest nízká, jakoby stlačená, polo „setřelá" zvláště uprostřed méně zřetelná. Západní Mediterranea.

55. ignipennis Abeille.

63′ Poměrně menší, průměrně též temněji zabarvená; štítek jest zelený nebo černomodrý až černý, vždy silně chagrinován a proto matný, nelesklý; hlava jest vždy kratšími, tíže pozorovatelnými, sporými vlásky opýřena. Východní Mediterranea. **56. olympica Ksw.**

23′ Celý povrch, krovky, rovněž tak jako štít, jsou ponejvíce *nelesklé*, jen vzácně hladké a lesklé, ponejvíce *více méně silně chagrinovány*. Tělo jest stále dosti *stlačené, zašpičatělé, dosti ploché*; tvarem připomíná často *nitidula L.* Původní ocellace nebo retikulace (= ocelly bez středních zrnek!) jest *často nahražena chagrinováním*; v tomto chagrinu bývá struktura původní jen naznačena. Drápky jsou na kořeni často rozšířeny nebo zubem opatřeny, zřídka jednoduché. (Druhy této skupiny tvoří přechod k širokým Anthaxiím — proto jest důležito při určování projíti též některé podobné skupiny širokých Anthaxií z příbuzenstva *A. discicollis* Lap., *quadripunctata* L. a pod.!) Jestliže jest retikulace štítová zřetelnější, netvoří nikde *ani příčných, ani podélných vrásek*. Zbarvení jest převážně zelenavé nebo hnědozelené, zřídka modravé až černé. Asijské a severoamerické druhy.

Přechodní skupiny.

VIII. Skupina A. mundula Ksw.

64‴ Více méně zřetelně chagrinována. Síťová struktura štítu a krovek jest dosti jemná až velmi jemná. Krovky nejsou na stranách zřetelně vykrojeny, klenutější, zadní tibie ♂♂ jsou normální.

65″ Štít jest k základně nezřetelně nebo aspoň nenápadně zúžen; jen vzácně zaškrcen — ale pak jsou krovky dvojbarevné.

66″ Největší šířka štítu leží nedaleko základny; zelené, olivově zelené až hnědozelené druhy s jednobarevnými krovkami.

67″ Štít jest až za střed rovnoběžný, pak ku předu zúžen. Strany štítu a čelo jsou často zlatové. Štít jest na plošině jemně ale zřetelně retikulován. Celý povrch jest chagrinován. Krovky jsou normálně zrnité. Zadní rohy štítové jsou pravoúhlé; štít jest $1^1/_3$kráte širší než dlouhý. Syrie. **57. mundula Ksw.**

67′ Krovky jsou jemně zrnité, temně zelené. Zelené zbarvení přechází často do olivova; drápky jsou jednoduché, neozubené. Štít jest široký, k základně nerozšířený, na stranách lehce zaokrouhlený, často uprostřed rovný a na základně a na předním okraji slabě zaokrouhlen; plocha jest rovná nebo po obou stranách středu lehce vtisklá. Chagrinovaná; 4—5 *mm* dlouhá; dosti podobná naší *nitidula* F., ale štíhlejší a užší, s jinou štítovou strukturou etc. V Severní Americe, ve spojených státech — dle Horna od Colorada až po Nevadu a Kalifornii rozšířena. Moje kusy jsou z Kansasu. **58. deleta Le Conte.**

66′ Temná, černohnědá, hnědá až temněmodrá, vždy jednobarevná, nebo světleji zelená až hnědá, pak ale s dvojbarevnými krovkami.

68″ Zbarvení jest modré až modročerné.

69″ Štít jest $1^1/_2$kráte širší než dlouhý, velmi jemně chagrinován. Témě jest mezi očima dosti zúženo. Krovky jsou velmi jemně zrnité. *Malé* „buňky" na čele jsou vyplněny *velkými* středními zrnky. Čelo jest klenuté; černá s modravým hedvábitým leskem. Severní Amerika: Kalifornie. **62. Caseyi Obenb.**

69′ Štít jest dvakrát širší než dlouhý, s hrubší strukturou. Témě jest mezi očima daleko méně zúženo. Krovky jsou hruběji zrnité, mnohem lesklejší. *Větší* „buňky" na čele jsou vespod hladké, bez zrnek uprostřed; čelo jest uprostřed podélně vtisklé. Modrá až černomodrá, lesklá. Spojené státy severoamerické. **63. Cyanella Gory.**

68′ Zbarvení jest zelené, temně hnědé až černé, strany štítové jsou občas zlatové; krovky jsou často dvojbarevné.

70″ Krovky jsou jednobarevně hnědé nebo černohnědé.

71″ Větší druh. Čelo a postranice štítové jsou měďové nebo zlatozelené,

ostatní povrch jest rovněž tak jako témě temný. 5—6·5 *mm.* Severní Amerika. **60. viridicornis Gory.**

71′ Menší, jednobarevný druh. Čelo jest často zelené, tělo jest více měďově zbarveno, krovky jsou jemněji zrnité, 4—5 *mm.* Severní Amerika. **61. viridifrons Gory.**

70′ Krovky jsou zelené nebo zelené s měďovými, hnědými podélnými skvrnami.

72″ Krovky a štít jsou ve spodině *lesklé*; štít jest *dvakráte* širší než dlouhý; jeho „buňky" jsou ve spodině úplně hladké. Krovky jsou temně hnědé s dlouhou a širokou štítovou skvrnou. Pennsylvania. **67. pennsylvanica Obenb.**

72′ Krovky a štít jsou ve spodině chagrinovány, proto *matnější*. Štít je jen 1½kráte širší než dlouhý, za středem poněkud zaškrcený. Severní Amerika. **66. quercata Say.**

65′ Štít jest k základně zřetelně zúžen.

73″ Štít jest za středem nejširší. Na čele nachází se malá, zdvižená, lesklá tečka, jež vzadu přechází v malou zdviženou čárku. Krovky mají základnu poněkud zdviženou jsou vzadu příčně vtisklé, s ostrými vpadlými rameny, velmi hustě tečkovány; přední část krovečná jeví se zdviženou; příčinou toho jest nezřetelný vtisk uprostřed; tento prochází od ramen a jde směrem ku středu. Sibiř. **64. psittacina Heyden.**

73′ Štít jest uprostřed nebo před středem délky nejširší, dvakráte širší než dlouhý. Krovky jsou jemně chagrinovány, zašpičatělé, stejnoměrně klenuté. Zelená až mosazně hnědá — barvou upomíná na druh *millefolii ab. polychlora* Abeille. 4 *mm.* Japan. Himalaya. Jediný dosud známý japanský druh. **65. Proteus E. Saund.**

64′ Bez chagrinu. Síťová struktura štítu, jež skládá se z mnohostěnů, jest dosti silná. Štít jest téměř dvakráte širší než dlouhý, na stranách lehce zaokrouhlený; největší šířka leží před středem; od středu k základně jemně, téměř přímočaře zúžený; krovky jsou ploché, za rameny ploše, nezřetelně vtisklé, na stranách velmi jemně a slabě, ale přece zřetelně vykrojeny. Nejširší a nejplošší druh této skupiny — přechodní člen mezi kratomeroidními a širokými Anthaxiemi. Himalaya (Kašmír). **68. afghanica Obenb.**

58′ Malá, lesklá, povrch jest bez chagrinování, ocellace štítová jest dosti rovnoměrná a silná, stále zřetelná, nikdy zrnitá. Čelo jest ocellováno, krátce bíle opýřeno, smaragdově zelené. Zadní holeně ♂♂ jsou na apikalním vnitřním kraji ve čtyřech pětinách délky opatřené malým zoubkem (viz vyobrazení 10.) a za ním ku špičce jemně vykrojeny. 4·75—5 *mm.* — Tvarem upomíná na *nitidula* F. Alžír. Jeho Magnificenci prof. Dru Vejdovskému k poctě pojmenován. **59. Vejdovskýi Obenb.**

A''' Malý, asi 4 *mm* dlouhý druh. Krovky jsou až do $^4/_5$ délky rovnoběžné, dosti klenuté, *lesklé, hladké,* jen s velmi nezřetelnou, uhlazenou, téměř *úplně vymizelou strukturou,* téměř nezřetelně, velmi spoře a krátce *bíle opýřeny.* Štít jest asi dvakráte tak široký jako dlouhý, k přednímu kraji stejně jako k okraji zadnímu zúžený, na plošině rovný; základna jest rovná; štít jest ve spodině velmi *lesklý* a *hladký,* všude pokryt *velikými, velmi zřetelnými mnohostěny se zřetelnou tečkou uprostřed.* Před zadními rohy *jest štít po obou stranách hluboce, velmi zřetelně podélně vtisklý.*

Obr. 10. A. Vejdovskýi Obenb. ♂. Tibia posterior.

Tento samostatnou skupinu tvořící druh jest jedním z nejzajímavějších celého rodu; spojuje velmi památným způsobem více — jinak vzdálených skupin — proto postavil jsem jej jako zástupce zvláštní skupiny isolovaně (bude opakován ještě jednou při druzích širokých). Má vztahy se skupinou *A. fulgurans* (ze širokých Anthaxií) i se skupinou *cichorii* Ol., kde zvláště druh *berytensis* Ab. upomíná naň podobnými vtisky na basi štítu.

IX. Skupina A. flammifrons Sem.

a) Krovky jsou měďově růžové, silně lesklé, štít jest olověvě šedý; příčný pruh na basi štítu jest stejně zbarven jako krovky. Hlava je nádherně krvavě červená, ohnivá, témě jest temně černošedé. Turkestan; poušť Gobi. 4—5 *mm.* **69. flammifrons Sem.**

b) Větší, paralellní; celý povrch jest rovněž tak jako spodek olivově růžový. Postava jest delší než u typické formy.

69. flammifrons var. ignea Obenb.

c) Menší. Krovky jsou kratší, poněkud hruběji zrnité. Olivově zelená; jen plošina štítu jest načernalá; vtisky v rozích štítu (jež normálně jsou rudé) jsou zlaté. Kuldža.

69. flammifrons var. kuldjensis Obenb.

A'' Válcovitá, silně klenutá, často chagrinovaná. Štít jest do zadu *zaškrcen,* silně klenutý; plocha jeho jest *chagrinovaná,* bez jiné struktury (bez ocell). Zlatový nebo zelený. Druhy ze Severní Afriky.

X. Skupina A. malachitica Ab.

Druhy této skupiny probrány budou v díle dalším, v pojednání o Anthaxiích širokokrových. Skupina tato jest rovněž přechodní, rázu spíše Anth. širokých, ač má určité vztahy k skupině druhů kolem kratomeroidní *A. stupida* Mars., kde jeden druh, jenž asi jistě patří do této skupiny (A. pumilla Klug) byl již uveden.

A'' Krovky jsou sploštělé, široké, často silně nerovné. Opýření jest bílé až často *černé* nebo hnědé a pak tuhé, štětinovité. Štít jest různě upraven pokud se skulptury týče, velmi často po stranách podélnými vráskami opatřen; velmi vzácně jednotně retikulován nebo ocellován, nízký, stlačený, široký. Pestrobarevné až černé druhy značně stlačeného těla. Krovky jsou do zadu méně prudce zúžené.

Anthaxiae planipennes.

Druhy rozsáhlé skupiny této, četnými formami po celém světě zastoupené, probrány budou v pojednání zvláštním.

* * *

Specielní popisy a data synonymická a zoogeografická budou obsahem studie následující.

Příspěvek ke studiu resonančního spektra par iodových a poznámka k fluorescenční absorpci.

Podává

Dr. **Václav Posejpal.**

(Se 3 obr. v textu.)

Předloženo 27. června 1914.

I.

§ 1. Fluorescence plynů a par jest všeobecně známa teprve od prací Wiedemann-Schmidtových, konaných v letech 1895 a následujících, ačkoliv fluorescenci par iodových pozoroval již Lommel r. 1883. Důležitosti nabyl tento druh emisse světelné teprve pracemi R. W. Wooda, který spektrografickým studiem objevil zajímavé vlastnosti jeho spekter. Woodovy práce týkají se hlavně par natria, kalia, rtuti a iodu. Zvláště podrobných a pozoruhodných výsledků dodělal se u iodu, jehož fluorescence jest velmi silná a vzhledem k tomu, že maximum její intensity padá do tepelného oboru kolem 20° C, velmi snadno přístupná pozorování.

Předmětem přítomné úvahy jest fluorescenční spektrum par iodových vzbuzené zelenou čarou rtuťovou ($\lambda = 5460{\cdot}7\ A^0$). Spektrum toto, tak zvané spektrum resonanční, skládá se z čar téměř ekvidistantních, jichž Wood[1]) napočítal celkem dvacet dvě a z nichž jedna splývá s čarou účinnou a sluje dle Wooda radiací resonanční, R. R. Fotografujeme-li uvedené čáry, jichž vzdálenost činí asi $70\ A^0$, při dostatečné dispersi, objeví se každá z nich býti skupinou většího menšího počtu jemných čar, nestejně rozdělených. Tak u R. R. čáry zjistil Wood až 10 složek, u čáry nejblíže delšího λ až 13 složek atd. Možno tedy čáry resonančního spektra iodu považovati za velmi úzká čarová spektra, jež Wood označuje čísly řádovými obdobně, jako činíme u spekter mřížkových. Jest tedy R. R.

[1]) Phys. Zsch. 14. 178—188; 1189—1201; 1913.

čára spektrem řádu nultého, čáry od ní k delším λ postupující jsou spektry řádu prvního, druhého atd., čáry ke kratším λ jdoucí obdobně spektry řádů negativních. Počet složek jednotlivých řádů se mění dle povahy účinné čáry rtuťové. Jde-li na př. o rtuťovou lampu křemenovou, rozšiřuje se její zelená čára tím více, čím vyšší je teplota světelného oblouku rostoucí se svorkovým napětím lampy, a s tím soubežně jde přibývání čar v jednotlivých řádech. Absorpční spektrum iodu skládá se z nesmírného počtu čar tak hustých, že šířka zelené čáry rtuťové přikryje dle okolností dvě až sedm z těchto čar. Jejich délky vlnité jsou: 5460·577, ~·640, ~·716, ~·768 ~·873, ~·910, ~·966. I jest tedy nasnadě předpokládati, že počet složek jednotlivých spekter jest v genetické souvislosti s absorpčními čarami účinným světlem vzbuzovanými a jest veledůležitým se stanoviska podrobnějšího studia této emisse zjistiti, které složky jednotlivých řádů spolu korrespondují a na vzbuzení kterých z daných absorpčních čar jsou vázány. Wood se snaží dojíti odpovědi na tuto otázku cestou experimentální tím, že pozoruje, které členy v jednotlivých řádech se objeví neb zmizí, když účinnou zelenou čáru rozšíří neb zúží, neb když některé její frekvence odstraní neb seslabí vhodným prostředím absorbujícím, jako jsou páry bromu, iodu, natria atd. Obtíže experimentální jsou zde veliké a tudíž dosavadní výsledky poměrně skrovné a bude to státi ještě mnoho práce, než tato důležitá otázka bude zodpověděna. Přítomná práce má býti příspěvkem k tomuto úkolu.

§ 2. Vznik resonančního spektra iodu můžeme si představiti, nečiníce podstatně jiných, než čistě formálních hypothes, jak následuje. V molekule iodové páry jest přítomen velký počet elektromagnetických oscilatorů nejrůznějších frekvencí, charakterisovaných bezpočtem čar absorpčních. Čára absorpční, jež ozářena světlem téže frekvence dá vznik emissi světla fluorescenčního, jest čára účinná a jest tím charakterisována, že její oscilatory mohou hromaditi vzbuzení, t. j. hromaditi, ovšem že po dobu nesmírně krátkou, energii účinného záření v takové formě, že táž může býti spotřebována na emissi světla fluorescenčního. Vzbuzení daného oscilatoru má za následek větší menší zmenšení frekvence jeho vlastní i všech ostatních v molekule přítomných oscilatorů, ať vzbuzených neb nevzbuzených, jakož i usnadnění jejich vzbuditelnosti. Ztráta vzbuzení téhož oscilatoru má obdobně opačné důsledky.

Hromadění vzbuzení a s tím spojené změny frekvence řídí se předpoklady kvantové hypothesy, dle které světelná energie jest absorbována a emitována jen v celých kvantech. Jest minimální, t. j. při dané frekvenci ν oscilator nahromadí jen tolik kvant m, že jim při tím nabyté frekvenci ν' odpovídá minimální zvětšení počtu, tedy $m + 1$. Je-li h Planckova universální konstanta, platí

$$h \nu m = h \nu' (m + 1)$$

a z toho

$$\nu' = \nu \cdot \frac{m}{m+1} \tag{1}$$

$$\lambda' = \lambda \cdot \frac{m+1}{m} \tag{1'}.$$

Oscilator frekvence ν fluoreskující molekuly může přes to, že při této frekvenci nahromadil vzbuzení, nedoznati buď žádné změny své frekvence, neb doznati dokonce jejího zvětšení na ν'', nastala-li současně emisse a tím ztráta nahromaděného vzbuzení jednoho neb několika jiných oscilatorů téže molekuly. Při tom zase předpokládáme platnost zákona minimálního, tedy

$$h\ \nu\ m = h\ \nu''\ (m-1)$$

a

$$\nu'' = \nu \cdot \frac{m}{m-1} \tag{2}$$

$$\lambda'' = \lambda \cdot \frac{m-1}{m} \tag{2'}.$$

Číslo m jest řádově stejné pro všecky oscilatory daných čar absorpčních, ale tím menší, čím aktuální frekvence daného oscilatoru je vzdálenější (menší) od frekvence jeho v molekule nefluoreskující. Tedy s přibýváním intensity a rozlohy účinné čáry zelené bude přibývati nejen na počtu čar spektra na př. nultého řádu, ale také na jeho spektrální rozloze, jak zkušenost potvrzuje. S tím souvisí též, že vznik té které čáry tohoto spektra nemusí býti vázán na vzbuzení jen jediné čáry absorpční, nýbrž může záviseti od současného vzbuzení několika těchto čar, k čemuž také Woodova pozorování poukazují.

Vznik celého resonančního spektra možno si pak představiti postupně tak, že bezprostředně po účinném osvětlení molekuly dostaví se v její fluorescenční činnosti jistý stacionárný stav a jemu odpovídající počet čar spektra řádu nultého. Oscilatory účinných absorpčních čar, které vzbuzení nehromadí, vydávají čáry resonanční radiace, R. R., vzbuzování ostatních děje se pak způsobem vylíčeným řádovým číslem m, a sice stacionárně, t. j. průměrná intensita každé čáry je stálou a průměrně stálým jest také počet oscilatorů, které s ní mají v daném okamžiku stejnou frekvenci. Vůči těm hraje tato čára úlohu záření účinného, přivádějíc je k emissi R. R. a k hromadění vzbuzení, danému číslem řádově menším než bylo m, tedy na př. n. Toto n bude řádově stejným pro oscilatory všech čar, ale po dosažení nového stacionárního stavu, který jejich vzbuzováním nastane, udrží se v trvalé činnosti, jak skutečné spektrum ukazuje, oscilatory jen téhož n. Jejich činností nabudou frekvencí odpovídajících čarám

spektra řádu nultého oscilatory ještě snazší vzbuditelnosti, dané řádovým číslem na př. q. Jejich vzbuzení má za následek zase nový stacionární stav a obdobně jako prve jest q pro všecky trvale činné oscilatory stejným.

Činností oscilatorů o vzbuditelnosti n a q vzniknou spektra vyšších řádů. Oscilatory snáze vzbuditelné, q, zmocní se pravděpodobně mnohem většího podílu energie dodávané účinnými čarami řádu nultého a jest tudíž řád jimi emitovaný bohatší na energii, než řád emitovaný oscilatory n. Poslední nazveme řád vedlejší, první bude řád hlavní. O čarách řádů vedlejších budeme předpokládati, že již dále nevzbuzují fluorescence. O čarách řádů hlavních budeme předpokládati, že pracují stejně jako jsme právě vylíčili pro čáry spektra řádu nultého, jež tím se jeví jako první řád hlavní. Při tom čísla n a q budou pro všecky řády hlavní přibližně stejná. Může se však státi, že čáry některého řádu hlavního vzbuzují oscilatory ne dvojího druhu, nýbrž jednoho jediného o vzbuditelnosti p, ležící řádově uprostřed mezi n a q. Nový řád takto vzniklý jest ovšem spektrem hlavním a spektrum vedlejší schází.

Řádová spektra resonančního spektra iodu vykazují dvojí typus. Jedna mají čáry ostré a poměrně intensivní, druhá matné a mlhavé. Řády prvého druhu označuje Wood písmenem S (= sharp), řády matné písmenem H (= hazy). Předpokládám, že způsobem vylíčeným vznikají vesměs řády druhu S. Poněvadž řády — 1 a — 2, jichž existence jest porušením pravidla Stokesova, jsou řády druhu H, předpokládám o řádech H všeobecně, že vznikají fluorescencí proti jmenovanému pravidlu, tedy dle rovnic (2) a (2′). Jsou vesměs řády vedlejšími, tedy vzbuzení dle čísla n, pouze řád — 2 byl emitován oscilatory, jež v řádu nultém nashromáždily vzbuzení obnosem p kvant.

Obraz proměny energie světla účinného v energii emisse fluorescenční zde podaný, jest zajisté jen formální, hrubý a neúplný. Avšak nikde neodporuje pozorování a dá se snadno pochopiti se stanoviska Starkovy theorie fluorescenční.[1]) Nám pak dovoluje bezprostředně řešení zvolené úlohy.

§ 3. Ve smyslu předešlého paragrafu lze především přesně říci, co rozumíme výrazem „čáry korrespondující“. K dané čáře spektra nultého řádu budou ve spektrech ostatních korrespondujícími ty čáry, které svůj vznik děkují v poslední řadě vzbuzení způsobenému touto čarou. Najdeme je, vyhledáme-li především empiricky spektra hlavní a k nim příslušná spektra vedlejší, a pak dále hodnoty n, q, resp. p tak, aby čáry jimi vypočtené souhlasily co nejúplněji s čarami pozorovanými. Sdělím ihned výsledek, který dává nejuspokojivější souhlas mezi výpočtem a pozorováním, a který tudíž lze považovati za pravdě nejpodobnější. Při tom mám na mysli spektrum resonanční vzbuzené při svorkovém napětí

[1]) Viz na př. Dr. J. Stark, Prinzipien der Atomdynamik. II. Teil, Leipzig 1911.

150 Volt, jež Wood co nejpečlivěji proměřil.[1]) Pro snazší přehlednost dám číslům n, q, p indexy a znamená na př. p_{hk} že oscilatory vzbuzované čarami spektra řádu h-tého vzbuzení p_{hk} spotřebují emitujíce čáry spektra řádu k-tého.

Spektry hlavními jsou řády 0, 3, 5, 8, 10, 12, 15, 17, 20. Všecky ostatní řády jsou spektry vedlejšími a jich souvislost jest dána následujícím způsobem:

Hlavní spektrum	n, p, q		λ	
0	n_{01} } = 87,	řád 1, vedlejší	$\lambda_1 = \lambda_0 . \frac{88}{87}$	S
	n_{0-1} }	řád — 1, vedlejší	$\lambda_{-1} = \lambda_0 . \frac{86}{87}$	H
	$p_{0-2} = 43$,	řád — 2, vedlejší	$\lambda_{-2} = \lambda_0 . \frac{42}{43}$	H
	$q_{03} = 28$,	řád 3, hlavní	$\lambda_3 = \lambda_0 . \frac{29}{28}$	S
3	$n_{32} = 84$,	řád 2, vedlejší	$\lambda_2 = \lambda_3 . \frac{83}{84}$	H
	$p_{35} = 42$,	řád 5, hlavní	$\lambda_5 = \lambda_3 . \frac{43}{42}$	S
5	n_{54} } = 82,	řád 4, vedlejší	$\lambda_4 = \lambda_5 . \frac{81}{82}$	H
	n_{56} }	řád 6, vedlejší	$\lambda_6 = \lambda_5 . \frac{83}{82}$	S
	$q_{58} = 27$,	řád 8, hlavní	$\lambda_8 = \lambda_5 . \frac{28}{27}$	S
8	$n_{87} = 84$,	řád 7, vedlejší	$\lambda_7 = \lambda_8 . \frac{83}{84}$	H
	$p_{8\,10} = 40$,	řád 10, hlavní	$\lambda_{10} = \lambda_8 . \frac{41}{40}$	S
10	$n_{10\,9}$ . . . schází			
	$p_{10\,12} = 39$,	řád 12, hlavní	$\lambda_{12} = \lambda_{10} \frac{40}{39}$	S

[1]) L. c. pag. 1198.

Hlavní spektrum	n, p, q	λ	
12	$n_{12\,11}$ } = 80, řád 11, vedlejší	$\lambda_{11} = \lambda_{12} \cdot \frac{79}{80}$	H
	$n_{12\,13}$ } řád 13, vedlejší	$\lambda_{13} = \lambda_{12} \cdot \frac{81}{80}$	S
	$q_{12\,15} = 25$, řád 15, hlavní	$\lambda_{15} = \lambda_{12} \cdot \frac{26}{25}$	S
15	$n_{15\,14}$ . . . schází		
	$p_{15\,17} = 39$, řád 17, hlavní	$\lambda_{17} = \lambda_{15} \cdot \frac{40}{39}$	S
17	$n_{17\,16}$ } = 78, řád 16, vedlejší	$\lambda_{16} = \lambda_{17} \cdot \frac{77}{78}$	H
	$n_{17\,18}$ } řád 18, vedlejší	$\lambda_{18} = \lambda_{17} \cdot \frac{79}{78}$	S
	$q_{17\,20} = 25$, řád 20, hlavní	$\lambda_{20} = \lambda_{17} \cdot \frac{26}{25}$	S
20	$n_{20\,19} = 80$, řád 19, vedlejší	$\lambda_{19} = \lambda_{20} \cdot \frac{79}{80}$	H

Dříve než sdělím číselné hodnoty vypočtené dle tohoto plánu, jest třeba malé poznámky. Přihlédneme-li k spektru řádu prvního, vidíme, že má dle pozorování Woodova 13 čar, kdežto spektrum řádu nultého jich má jen 8. Má-li každá čára daného řádu býti v řádu odvislém zodpovědna jen za jednu jedinou čáru, musíme předpokládati ve spektru řádu nultého čáry latentní, což můžeme vzhledem k tomu, že představa o latentní fluorescenci je všeobecně běžnou. Rovněž budeme v každém jiném hlavním spektru předpokládati latentní přítomnost té které čáry, když se objeví ve spektru závislém čára jí korrespondující. Na druhé straně nemusí všecky čáry daného spektra míti ve všech od něho závislých spektrech čáry korrespondující. Nemá-li čára svého podílu v čarách nejbližšího spektra hlavního, předpokládáme, že vyhasla počínaje tímto spektrem. Doplníme tedy řád nultý čarami latentními tak, aby všecky čáry řádu prvého a třetího tam měly čáry korrespondující. V ostatních spektrech mohou existovati latentně již jen čáry zastoupené v řádu nultém. Při dispersi, při níž Wood fotografoval čáry řádu nultého, splývají čáry R. R., odpovídající příslušným sedmi (vlastně osmi) čarám absorpčním, v jedinou čáru 5460·74 A^0. Nahradíme ji tudíž příslušnými osmi čarami.

I jest tedy podrobný výsledek, jak následuje, při čemž na levo stojí čísla pořadová korrespondujících čar řádu nultého, *W* značí délky vlny měřené Woodem, *P* tytéž délky stanovené počtem, *Δ* rozdíl *W* — *P*. *L* značí latentní čáry řádu nultého.

Řád — 2.

	W	*P*	*Δ*
10	5334·45	5334·92	— 0·47
14	5336·85	5336·61	+ 0·24

Řád — 1.

7	5395·83	5395·84	— 0·01
9_7	5398·22	5398·20	+ 0·02
13	5400·11	5399·62	+ 0·49

Řád 0.

	W	*L*
1		5454·50
2	5455·16	
3	5456·00	
4		5456·97
5	5457·34	
6		5457·95
7		5458·58
8	5459·58	
9_0	5460·50[1])	
9_1	5460·579	
9_2	5460·640	
9_3	5460·716	
9_4	5460·768	
9_5	5460·873	
9_6	5460·910	
9_7	5460·966	
10		5461·94
11		5462·23
12	5462·32	
13		5462·41
14		5463·68
15	5464·35	
16		5465·31
17		5465·69
18		5466·18
19	5466·60	
20		5467·53

Řád 1.

	W	*P*	*Δ*
3	5518·76	5518·71	+ 0·05
4	5519·69	5519·69	0
7	5521·32	5521·32	0
9_4	5523·56	5523·54	+ 0·02
9_7	5523·78	5523·74	+ 0·04
10	5524·67	5524·72	— 0·05
11	5524·94	5525·01	— 0·07
12	5525·12	5525·10	+ 0·02
13	5525·20	5525·20	0
14	5526·52	5526·48	+ 0·04
15	5517·15	5527·16	— 0·01
17	5528·52	5528·52	0
20	5530·38	5530·38	0

Řád 2.

2	5583·0	5582·73	+ 0·3
5	5585·1	5584·96	+ 0·1
8	5587·4	5587·25	+ 0·1
10	5589·4	5589·66	— 0·3
15	5591·8	5592·13	— 0·3

Řád 3.

1	5649·30	5649·30	0
3	5650·87	5650·86	+ 0·01

[1]) Dle odhadu.

	W	*P*	*Δ*
6	5652·88	5652·88	0
9_4	5655·75	5655·79	— 0·04
9_7	5655·97	5656·00	— 0·03
10	5657·06	5657·01	+ 0·05
11	5657·38	5657·31	+ 0·07
14	5658·76	5658·81	— 0·05
16	5660·50	5660·50	0
18	5661·40	5661·40	0

Řád 4.

3	5715·25	5714·85	+ 0·40
8	5718·14	5718·60	— 0·46
9_4	5720·10	5719·84	+ 0·26
9_7	5720·45	5720·05	+ 0·40
14	5723·25	5722·89	+ 0·36
17	5724·85	5725·00	— 0·15
20	5726·45	5726·92	— 0·47

Řád 5.

3	5785·1	5785·40	— 0·3
5	5786·7	5786·82	— 0·1
8	5789·6	5789·20	+ 0·4
14	5793·3	5793·54	— 0·2
15	5794·2	5794·25	— 0·0
17	5796·3	5796·20	+ 0·1
20	5797·4	5797·63	— 0·2

Řád 6.

6	5858·3	5858·05	+ 0·2
9_0	5860·7	5860·79	— 0·1
14	5864·4	5864·19	+ 0·2
16	5865·7	5865·95	— 0·2
19	5867·5	5867·33	+ 0·2

Řád 7.

1	5927·06	5926·62	+ 0·44
9_7	5933·96	5933·65	+ 0·31
20	5940·86	5940·78	+ 0·08

Řád 8.

	W	*P*	*Δ*
4	6000·86	6000·74	+ 0·12
9_0	6004·15	6004·63	— 0·48
10	6006·36	6006·21	+ 0·15
15	6008·86	6008·86	0·00
17	6010·26	6010·33	— 0·07
20	6012·11	6012·35	— 0·24

Řád 9. schází.

Řád 10.

3	6149·66	6149·67	— 0·01
8	6153·41	6153·70	— 0·29
9_7	6155·39	6155·26	+ 0·13
15	6159·01	6159·08	— 0·01
17	6160·46	6160·59	— 0·13
20	6162·26	6162·66	— 0·40

Řád 11.

3	6228·56	6228·51	+ 0·05
6	6231·06	6230·74	+ 0·32
9_4	6234·0	6233·95	+ 0·0
13	6235·96	6235·83	+ 0·13
14	6237·36	6237·27	+ 0·09
16	6239·16	6239·14	+ 0·02

Řád 12.

7	6310	6310·33	— 0·3
10	6314·36	6314·22	+ 0·14
14	6315·96	6316·22	— 0·26
15	6317·26	6317·00	+ 0·26

Řád 13.

5	6388·11	6387·76	+ 0·35
13	6394·28	6393·70	+ 0·58
15	6395·86	6395·96	— 0·10
17	6397·76	6397·54	+ 0·22

Řád 14. schází.

Řád 15.

	W	*P*	*Δ*
3	6559·61	6559·64	— 0·03
4	6560·86	6560·81	+ 0·05
7	6562·66	6562·75	— 0·09

Řád 16.

7	6645·0	6644·73	+ 0·3

Řád 17.

8	6732·4	6732·25	+ 0·1

Řád 18.

	W	*P*	*Δ*
11	6821·0	6821·45	— 0·4

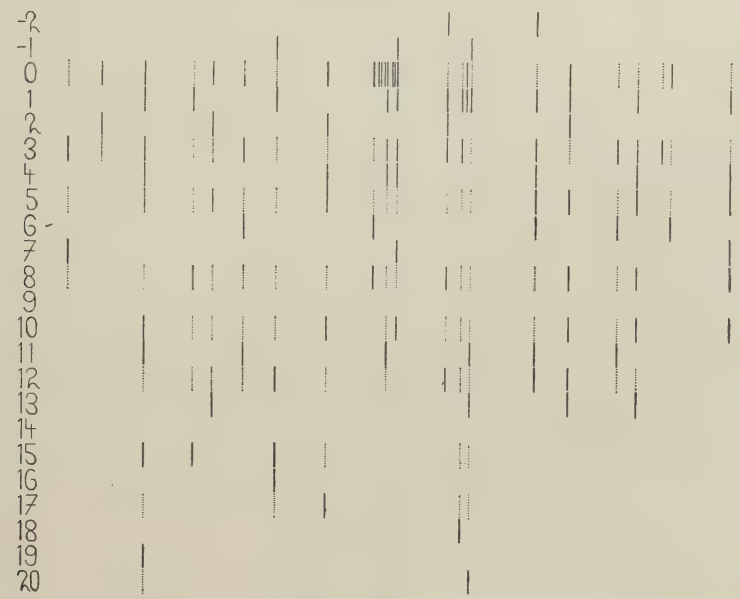
Řád 19.

3	6909·5	6909·49	0·0

Řád 20.

13	7005·5	7005·17	+ 0·3

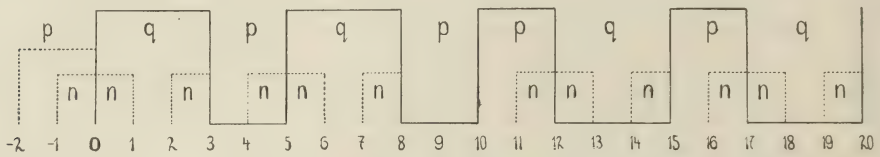
Výsledek právě udaný přehlédneme jediným pohledem na obraz č. 1., ve kterém čáry Woodem měřené jsou vytaženy plně, čáry latentní pak tečkovány. Číslování řádů jest na levé straně. Výsledek ten nutno pova-



Obr. 1.

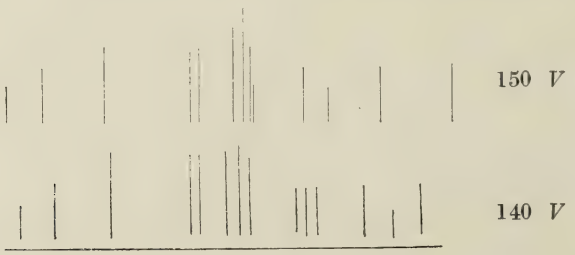
žovati za přibližný potud, že snad ta která čára by mohla postoupiti na pravo nebo na levo o jeden člen. Jest důležito vytknouti, že nalezený výsledek potvrzuje především důležitý fakt, Woodem již pozorovaný, že totiž v rozdělení spekter *S* a *H* se jeví jistá zákonitost. Tato zákonitost vystupuje zde zřetelněji v rozdělení spekter hlavních a vedlejších. Také budiž hned poznamenáno, že úloha hlavních spekter připadla skupinám

jednak na čáry nejbohatším, jednak a zároveň takovým, které již svým zevním vzhledem jeví nápadnou podobnost. Představu o této zákonitosti podává obraz č. 2. Očekávali bychom, že řád 21. bude scházeti analogicky k řádu 9.



Obr. 2.

Přiřadění čar zde podané mohli bychom na základě materialu Woodem získaného snadno kontrolovati, kdybychom znali se stejnou přesností, jako pro resonanční spektrum zde uvažované, délky vlnité také pro ostatní obdobná spektra, vzbuzená zelenou čarou rtuťovou jiného složení a Woodem fotografovaná. Jsou to spektra vzbuzená lampou Cooper-Hewitt a pak křemennou lampou při svorkovém napětí 35, 46, 60, 90, 101, 116 a 140 Volt. Při tom bychom možná shledali, že se mění netoliko počet čar, náležejících určitému řádu, ale i jejich místo, tak že by tato různá spektra nebylo vždy možno přivésti ke krytí. Soudím, že by to byl poznatek velmi důležitý, nikterak neodporující představě o vzniku těchto spekter, jíž zde bylo použito, a chci uvésti něco, co se zdá na jeho pravděpodobnost ukazovati. Jak již řečeno, odpovídají délky vlnité, s nimiž zde operováno, svorkovému napětí 150 Volt. V téže práci však Wood publikuje jednak reprodukci spektrografickou, jednak kresbu tohoto spektrogramu, přinášejícího čáry spektra prvého řádu, vzbuzeného touž lampou při 140 Voltech. Obraz č. 3. přináší jednak kresbu Woodovu pro 140 Volt, jednak kresbu téže čáry pro 150 Volt, již jsem přesně na 0·03 A^0 provedl dle délek λ udaných Woodem. Obě kresby uvedeny pak na takové



Obr. 3.

měřítko a tak pod sebe umístěny, aby v nich centrální dublet (naše čáry 9_4, 9_7) koincidoval. Vidíme, že ostatní čáry všecky nekoincidují a že obě spektra se značně liší. Poněvadž Wood udává možnou chybu délek λ menší než 0·02 A^0, a poněvadž na druhé straně jeho kresba pro 140 Volt úplně

souhlasí s jeho spektrogramem, jak se ostatně samo sebou rozumí, jest správnost myšlenky svrchu naznačené velice pravděpodobnou.

Wood provedl částečně a nezávazně přiřadění čar jednotlivých spekter, zvláště pokud jde o řady nižší. Budiž vytknuto, že přiřadění zde podané souhlasí s přiřaděním Woodovým těch čar, kde Wood nemá pochybnosti. Týká se to především dubletu, jejž Wood označuje číslem 4 a jenž přichází v řadech 1, 3, 4. Čáry tohoto dubletu mají v mém označení všude táž pořadová čísla 9_4 a 9_7 a jsou tedy korrespondující. O čáře 9_7 Wood zcela určitě zjistil, že zmizí, když účinné světlo zelené čáry rtuťové je filtrováno skrze páry bromu, které mu odejmou mimo jiné také frekvence, odpovídající absorpční čáře 9_7. Možno tedy složku 9_7 uvažovaného dubletu považovati za korrespondující s $R\,R$ této absorpční čáry, jak to můj výsledek podává.

O čáře 6000·86 řádu osmého tvrdí Wood se vší určitostí, že odpovídá v nižších řadech čáře označené číslem 2. Dle našeho označení jest to v řádu 0. a 3. čára 3, v řádu 1. a 8. čára 4, v řádu 5. čára 5. Vidíme tedy, že dle našeho výsledku jest v mezích chyb dříve připuštěných toto tvrzení Woodovo splněno. Na obraze č. 1. padá čára 6000·86 řádu 8. přesně pod čáru dle něho udanou v řádě 1., kdežto obdobné Woodem udané čáry řádu 0. a 3. padají od ní těsně na levo, čára řádu 5. těsně na pravo.

Čáry resonančního spektra jsou polarisovány, a jest podíl polarisovaného světla ve všech řadech prakticky stejný a činí při účinném světle polarisovaném 11%, při účinném světle nepolarisovaném 6·4%. Dle Starkovy hypothesy fluorescenční by se zdálo, že čáry řádů bližších k řádu nultému budou silněji polarisovány, než čáry vzdálenější. Z této práce však vychází, že očekávání to není odůvodněno, ježto hlavní spektra jsou si co do svého vzniku úplně rovna a obdobně spektra vedlejší, a jest tudíž přirozeno, že ukazují vesměs stejnou polarisaci.

Provedení přítomné práce bylo by bývalo nemožností bez pomoci dobrého počítacího stroje. I konám velmi milou povinnost děkuje panu Dru K. Petrovi, řádnému professoru mathematiky na české universitě, za laskavou ochotu, se kterou mi stroj takový zapůjčil.

II.

Poznámka k fluorescenční absorpci.

W. Wien[1]) předpověděl na základě úvah theoretických změnu absorpčního spektra fluorescence schopné látky během fluorescence. J. Burke[2]) přišel prvý s experimentálním faktem, ze kterého vycházelo, že látka

[1]) Wiedem. Ann. 52, 132—165. 1894.
[2]) Proc. Roy. Soc. 61. 485—487, 1897.

během fluorescence jinak absorbuje své fluorescenční světlo, než když nefluoreskuje. Na experimentálním studiu této otázky zúčastnili se dále Nichols, Meritt, Camichel, Wick, Wood a jeho konečným výsledkem bylo, že tvrzení Burkeho neodpovídá pravdě. Všecky práce sem hledící tykaly se látek tuhých neb kapalných.

Jak z předchozího víme, dávají četné páry, vzbuzené světlem monochromatickým, fluorescenci, jejíž spektrální rozbor přivedl Wooda k objevení zajímavých spekter resonančních, složených z čar velmi přibližně ekvidistantních. I myslím, že by bylo velice žádoucím, podorobiti i fluoreskující páry podrobnému studiu za tím účelem, zda také pro ně Burkeho tvrzení neplatí. Zdá se mi, že z jisté novější práce Woodovy[1]) o fluorescenci par iodových by se mohlo usuzovati, že tvrzení to platí a účelem této poznámky jest, na fakt ten blíže poukázati. Ze spektrogramu tam reprodukovaného, kde bylo fotografováno resonanční spektrum iodu vzbuzené zelenou čarou rtuťovou jednou přímo, podruhé skrze asi $\frac{1}{2}\,m$ dlouhý sloupec par iodových téže hustoty, jako měla pára fluoreskující, vychází, že složky jednotlivých čar tohoto resonančního spektra nesplývají, aspoň ne všecky, s absorpčními čarami par iodu, jichž jest nesmírně mnoho. To tedy znamená jinými slovy, že molekulám fluoreskující páry iodu náleží emissní frekvence, jež nejsou zastoupeny v absorpčních frekvencích téže páry a za týchž fysikálních podmínek, když nefluoreskuje. Ale emissní frekvence zředěného plynu neb páry pocházejí dle ustálených dnes představ od mechanismů atomu neb molekule vlastních, majících určitou vlastní periodu a schopných elektromagnetické záření této periody emitovati i absorbovati. Není důvodu, proč bychom měli o čarách spektra resonančního činiti jiný předpoklad. Z toho tedy plyne samo sebou, že molekula páry iodu emitujíc v stavu fluoreskování určité frekvence, čáry této frekvence za téhož stavu také absorbuje. Poněvadž pak, jak Woodův pokus ukazuje, molekula téže páry nefluoreskujíc neabsorbuje některé z těchto čar, vychází z toho zcela přirozeně, že pára iodu fluoreskujíc absorbuje své fluorescenční světlo jinak než nefluoreskujíc.

V Praze dne 24. června 1914.

Fysikální ústav české university.

---

[1]) Phys. Zsch. 14, p. 1195. 1913.

Příspěvky k vlastnostem sférických čar šroubových.

Podává **M. Lerch** v Brně.

S dvěma obrazy na zvláštní tabulce.

(Předloženo dne 2. července 1914.)

---

1. Hledejme čáru Γ té vlastnosti, že
   1. protíná přímky jistého válce pod stálým úhlem (γ),
   2. a leží na kouli (Σ).

Čáry takové slují šroubovice sférické (hélice sphérique).

Buď Π rovina kolmá na přímky plochy válcové. V libovolném bodě M čáry Γ svírá tečna její s přímkou válce úhel γ, a týž úhel svírají roviny kolmé na tyto přímky, t. j. normální rovina $\mathfrak{N}$ čáry Γ (v bodě M) a rovina Π.

Obalová plocha normálních rovin libovolné čáry sluje její plocha polární; její charakteristiky jsou osy křivosti uvažované čáry.

Pro sférickou čáru procházejí normální roviny $\mathfrak{N}$ pevným bodem, jenž jest střed V koule Σ. Polární plocha sférické čáry je tedy kuželová plocha s vrcholem V.

Pro naši čáru Γ svírají tečné roviny polárního kužele s danou pevnou rovinou Π stálý úhel γ; tudíž soudíme, že

„polární plocha sférické šroubovice je rotační kužel. Jeho vrchol je ve středu koule (která obsahuje šroubovici) a jeho osa je rovnoběžna s povrchovými přímkami válce, na němž čára je šroubovou".

Koule Σ protne polární kužel ve dvou kružnicích shodných; znamenejme jejich poloměr c, a délku strany kužele mezi jednou z těchto kružnic a vrcholem nazveme a; takže

$$c = a \cos \gamma.$$

Rovinu Π můžeme předpokládati vedenu jedním z těchto kruhů; znamenejme jej (c), a jeho střed buď O; bod V leží na kolmici OV na rovinu Π postavené, ve vzdálenosti

$$OV = a \sin \gamma.$$

Omezený kužel $V(c)$ oviňme pláštěm z látky dokonale ohebné a neroztažitelné; v rovinném tvaru (rozbaleném) je tento plášť kruhový o poloměru a, a jeho střed se při návoji klade do vrcholu V.

Mysleme si nyní jistý oblouk na čáře Γ, v němž se body singularní nevyskytují; normální rovina čáry Γ v bodě M je tečnou rovinou kužele $V(c)$ i dotýká se ho podél strany Vm, kde m je jistý bod kruhu (c).

Při odvíjení pláště s kužele přechází plášť v rovinu; tu zachytíme v okamžiku, kdy prochází bodem M; rovinu ta je nutně tečnou rovinou kužele $V(c)$, i můžeme předpokládati, že směr ovinutí byl tak volen, aby tato rovina splynula s rovinou $\mathfrak{N}$; neboť v opačném případě docílíme toho, provedeme-li ovinutí ve směru (smyslu) opačném.

Podržme na plášti bod daný polohou M, a pokračujme v odvíjení a navíjení kužele; náš bod při tom opíše jistou čáru Γ', která kolmo protíná tečné roviny kužele a je tedy orthogonální trajektorií rovin $\mathfrak{N}$; majíc s čarou Γ společný bod M, bude s ní identickou:

„Čára Γ jest evolventou kužele $V(c)$."

Bod m, pata osy křivosti bodu M na kruhu (c), je právě tam, kde obal opouští kužel a přechází v rovinu. Rozbalená část pláště je kruh v rovině $\mathfrak{N}$ se středem V.

Mysleme si kruhovou desku (a) téhož poloměru a, kterou přiložme na rovinu $\mathfrak{N}$ tak, aby se kryla s odvinutým pláštěm. Na desce máme body M a m jako na odvinutém plášti, a v pokračování směru Mm uvažujme

na kruhu (c) bod m',
na kruhu (a) bod m'',

tak, aby oblouky mm', mm'' se sobě rovnaly. Pokračuje-li se v odvíjení pláště až ku straně $m'V$, padne bod m'' pohyblivé desky (a) do polohy m', t. j. jinými slovy:

„Pohyb vzniklý odvíjením pláště je totožný s kotálením kruhu (a) po kruhu pevném (c) tak, aby hybný kruh měl střed ve stálém bodě V."

Aneb též:

„Sférická šroubovice je zvláštní případ sférické epicykloidy; ten totiž, kdy střed valeného kruhu zůstává pevným."

Valíme-li kruh (a) ve směru zpětném dostatečně daleko, zaujme opisující bod M jednou polohu A na kruhu (c).

Naše čára Γ se tedy vytvoří valením kruhu (a) po kruhu (c) uvedeným způsobem, při čemž opisující bod vyjde z určité základní polohy A na kruhu (c).

V poloze, kdy kruh (a) se dotýká kruhu (c) v bodě m, jest jeho rovina $\mathfrak{N}$ tečnou rovinou kužele $V\,(c)$ podél přímky $V\,m$. Bod M čáry Γ sestrojíme tím, že vedeme kruh $m\,M$ v rovině $\mathfrak{N}$ se středem V, a naneseme délku oblouku $m\,M$ rovnou oblouku $A\,m$ na kruhu (c).

Oskulační rovina Ω čáry Γ v bodě M je kolmá na osu křivosti $m\,V$; hlavní normála $M\,S$ pak leží v rovině $\mathfrak{N}$ (tečná rovina kužele) kolmo na přímku $m\,V$, a tedy

„hlavní normála sférické šroubovice Γ v bodě M je rovnoběžna s tečnou pevného kruhu (c) v bodě m".

Průsek její S s osou křivosti je střed křivosti čáry Γ.

Netřeba zvlášť dokazovati, že tečna $M\,t$ čáry Γ jest kolmice na rovinu $\mathfrak{N}$ vedená.

*

Zcela obecně můžeme každou čáru prostorovou vytvořiti jako evolventu její plochy polární. Tuto pokryjeme náplastí ohebnou a neroztažitelnou, a při její odvíjení jeden z bodů jejích probíhá danou čáru. V každé poloze jest opisující bod M v tečné rovině $\mathfrak{N}$ plochy polární podél přímky P, v níž náplasť plochu opouští. Kolmice $M\,S$ v rovině $\mathfrak{N}$ na přímku P stanoví střed křivosti S. Uvažujme na ploše polární čáru (S), geometrické to místo bodu S. Bod M zachycený na hybné — odvíjené — rovině považujme vůči této za stálý, znamenajíce jej A'; jeho poloha na ploše před odvíjením jest A.

Při odvíjení náplasti je bod S vždy na rozhraní částí rovné a křivé (náplasti) a po rozbalení náplasti tvoří čára (S) úpatnici čáry úvratní pro pól A' (jenž jest poloha bodu A po rozvinutí). Toť známá věta Lancretova.

V případě čáry sférické se úvratnice redukuje na bod (V), a úpatnice přechází v kruh nad průměrem $V\,A'$. V našem případě zvláště:

„Čára středů křivosti sférické šroubovice Γ jest ona křivka, jež při rozvinutí kužele $V\,(c)$ rozkrojeného podél strany $V\,A$ přechází v kruh nad průměrem $V\,A$."

Obdržíme ji pomocí kruhového nálepu poloměru $\frac{a}{2}$ přiloženého na kužel $V\,(c)$ tak, aby průměr nálepu se kryl s přímkou $V\,A$.

Avšak tím není čára (S) ještě vyčerpána, ani není dosti přesně vyznačena.

Úhel středový $m\,V\,M$ příslušný odvalenému oblouku $m\,M$ (odvalený úhel) na kruhu hybném znamenejme φ, dále buď ψ úhel středový $A\,O\,m$ příslušný k odvalenému oblouku $A\,m$ (odvalený úhel) na kruhu pevném (c).

Od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nacházejí se paty kolmic na délkách, v něž přešly strany kužele $V\,(c)$, a jich souhrn tvoří půlkruh. Body S jsou na okraji půlkruhového nálepu přiloženého na (omezený) plášť kužele $V\,(c)$.

Avšak od $\varphi = \frac{\pi}{2}$ do $\varphi = \pi$ jsou paty kolmic na délkách prodloužených a příslušný nálep třeba učiniti na druhém plášti (prodlouženého) kužele, a sice opět půlkruh; další půlkruh ($\varphi = \pi \ldots \varphi = \frac{3}{2}\pi$) zůstává na prodlouženém plášti, načež se pro hodnoty ($\varphi = \frac{3}{2}\pi \ldots \varphi = 2\pi$) vrátíme na plášť původní.

Mezi úhly φ a ψ vládne vztah

$$a\,\varphi = c\,\psi,$$

tedy hodnotám

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

příslušejí

$$\psi = 0, \frac{a\,\pi}{2\,c}, \frac{a\,\pi}{c}, 3\,\frac{a\,\pi}{2\,c}, \frac{2\,a\,\pi}{c};$$

body m jim příslušné (stopy os křivosti) buďte

$$q,\ q',\ q'',\ q''',\ q^{(4)}.$$

Na plášť $V\,(c)$ přilepíme půlkruh nad průměrem a, tak aby průměr pokryl přímku $q\,V$; po té na plášť prodlouženého kužele přilepíme celý kruh tak, aby průměr pokryl prodlouženou stranu $q''\,V$, načež půlkruhem se vrátíme na plášť $V\,(c)$ tak, aby průměr pokryl délku $q^{(4)}\,V$.

Bod $q^{(4)} \equiv B$ leží na čáře Γ a jest koncovým bodem jedné větve její; pokračování čáry Γ od bodu B se obdrží z této základní větve její otočením kolem osy $O\,V$ o úhel $\frac{2\,a\,\pi}{c}$, čímž bod A zaujme polohu B.

Počet větví těchto je nekonečný, je-li poměr $a : c$ irracionalní; v opačném případě je počet větví konečný a čára jest unikursální, jak vysvítá z příslušných rovnic.

*

2. Rovinu kruhu (c) zvolme za $O\,x\,y$ (půdorys), přímku $O\,A$ za osu $O\,x$, takže nárysná rovina $O\,x\,z$ splývá s rovinou $A\,O\,V$.

V obrazci 1. veden kruh $(c) \equiv A\,m\,A'$, a zvolen vrchol V svými průměty $V_1 \equiv O$, V_2. Po odvalení oblouku $c\,\psi = A\,m$ na pevném kruhu leží opisující bod M v poloze, již určíme následovně.

Rovinu $\mathfrak{N}$, která obsahuje bod M, sklopíme kol její půdorysné stopy $\mathfrak{N}^1$ — je to tečna kruhu (c) v bodě m — do roviny $x\,y$; střed kruhu (a) při tom zaujme polohu C na přímce $O\,m$ a bod M padne do (M) na kruhu $m\,(M)$ o středu C, tak aby oblouk $m\,(M) = a\,\varphi =$ obl. $A\,m = c\,\psi$.

Při sklápění roviny $\mathfrak{N}$ opisuje bod M kružnici, jejíž průmět je přímka $(M)\,P \perp \mathfrak{N}^1$. Pravoúhlý trojúhelník $P\,M_1\,M$ (M_1 půdorys bodu M) má při P úhel $\gamma = O\,A'\,V_2$. Naneseme tedy na $A'\,V_2$ délku $A'\,M' = P\,(M)$,

načež bude $P\,M_1$ průmět vektoru $A'\,M'$ do $O\,x$, a nárys má výšku z rovnou průmětu tohoto vektoru do $O\,z$, t. j. nárys M_2 bodu M je na přímce $M'\,M_2 \parallel O\,x$.

Tím sestrojeny průměty bodu M, a je tato část konstrukce nejsložitější.

Znajíce u roviny normální $\mathfrak{N}$ stopu půdorysnou, vedeme její uzlem (na $O\,x$) a bodem V_2 stopu nárysnou $\mathfrak{N}^{II}$; načež kolmice $M_1\,t_1$, $M_2\,t_2$ na stopy tyto vedené podávají průměty tečny čáry šroubové Γ.

Bezprostředně strojíme průměty osy křivosti ($V_1\,m$, $V_2\,m_2$); stopa Ω^I roviny oskulační Ω prochází pak půdorysnou stopou tečny t a je kolmá na $V_1\,m \equiv O\,m$; nárysná stopa Ω^{II} je kolma na $V_2\,m_2$.

Hlavní normála $M\,S$ má průměty $M_1\,S_1 \parallel \mathfrak{N}^I$, $M_2\,S_2 \parallel O\,x$ (t. j. $M_2\,S_2$ leží v $M'\,M_2$), střed křivosti (S_1, S_2) jest její průsek s přímkou $V\,m$. Poloměr křivosti sférické šroubovice $M\,S = M_1\,S_1$.

Znajíce stanovení bodů a jich tečen pro oba průměty čáry Γ přistupme k určení jich středů křivosti.

Abychom toho docílili pro půdorys, uvažujme promítající válec kolmý na $O\,x\,y$. Jeho kolmý řez vedený bodem M je shodný s průmětem Γ_1, a je to zároveň hlavní řez normální pro plochu válcovou. Druhý hlavní poloměr křivosti je nekonečný; poloměr křivosti ϱ_1 čáry Γ_1 bude tedy s poloměrem obecného řezu normálního ϱ souviseti rovnicí Eulerovou

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \omega}{\varrho_1},$$

kde ω jest úhel sevřený tečnama obou řezů.

Poněvadž rovina oskulační Ω obsahuje přímku $M\,S$, která jest očividně normálou válce, jest řez roviny Ω s válcem čára, pro niž známe poloměr křivosti $\varrho = M\,S = M_1\,S_1$.

Tečna hlavního řezu je kolmá na stranu válce a svírá s tečnou šroubovice úhel $\omega = \frac{\pi}{2} - \gamma = A'\,V_2\,O$.

Máme tak

$$\varrho_1 = \varrho \cos^2 \omega = \varrho \sin^2 \gamma = \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,\varrho,$$

poněvadž

$$c = a \cos \gamma.$$

Z obrazce pak vychází pro $\varrho = M_1\,S_1$

$$\varrho = a \sin \varphi,$$

a tedy jest

$$\varrho_1 = \frac{a^2 - c^2}{a} \sin \varphi.$$

Střed křivosti σ průmětu Γ_1 leží na vektoru $M_1\,S_1$; jeho vzdálenost od bodu S_1 obnáší $\varrho - \varrho_1$, t. j.

$$\overline{S_1\,\sigma} = \frac{c^2}{a}\,sin\,\varphi = c\,cos\,\gamma\,sin\,\varphi.$$

Naneseme tedy stálou délku $c\,cos\,\gamma = C\,\sigma'$ na rameno $C\,(M)$; přímka $\sigma'\,\sigma$ rovnoběžná s $C\,m$ protne $M_1\,S_1$ v hledaném středu křivosti σ.

Z Eulerovy a Meusnierovy věty bychom též snadno vyvodili konstrukci poloměru křivosti pro nárys; omezíme se však na jeho analytické vyjádření, které bude podáno v čl. 5.

*

3. Bod (M) vzniklý sklopením roviny $\mathfrak{N}$ kol stopy $\mathfrak{N}^1$ do půdorysny opisuje epicykloidu, kterou opisuje bod hybného kruhu poloměru a valeného po kruhu (c), a sice vychází bod ten ze začáteční polohy A.

Mohli jsme však sklopiti rovinu $\mathfrak{N}$ na opačnou (vnitřní) stranu, čímž by bod M padl do polohy $(\overline{M})$, střed valeného kruhu do polohy C'. Bod $(\overline{M})$ pak opisuje rovněž epicykloidu. Při její konstrukci opíšeme kruhový oblouk $m\,(\overline{M})$ o středu C' ($C'\,m$ má délku a) rovný oblouku Am.

Veďme přímku $m\,(\overline{M})$, její druhý průsek s kruhem (c) buď bod μ. Rovnoramenné trojúhelníky $O\,m\,\mu$ a $C'\,m\,(\overline{M})$ jsou si podobny, majíce společný úhel (m) při základně, a tedy $O\,\mu \parallel C'\,(\overline{M})$, i máme rovnost úhlů

$$\varphi = m\,C'\,(\overline{M}) = m\,O\,\mu.$$

Prodlužme poloměr $O\,\mu = c$ o délku $a - c = \mu\,\overline{C}$ do $O\,\overline{C}$; z rovnosti délek $C'\,(\overline{M}) = a = O\,\overline{C}$ na rovnoběžkách plyne, že obrazec $O\,C'\,(\overline{M})\,\overline{C}$ je rovnoběžník, tedy $\overline{C}\,(\overline{M}) = O\,C' = a - c$.

Máme tudíž $\overline{C}\,(\overline{M}) = \overline{C}\,\mu$, t. j. bod $(\overline{M})$ leží na kruhu opsaném ze středu $\overline{C}$ poloměrem $\overline{C}\,\mu = a - c$. Oblouk $\mu\,(\overline{M})$ tohoto kruhu má hodnotu $(a - c)\,\varphi = a\,\varphi - c\,\varphi$, a je tedy

$$\text{obl. } \mu\,(\overline{M}) + \text{obl. } m\,\mu = a\,\varphi = \{\text{obl. } m\,(\overline{M})\}_a = \{\text{obl. } A\,m\}_c\,,$$

kde indexy u závorek udávají poloměry příslušných oblouků.

Odtud plyne očividně

$$\{\text{obl. } A\,\mu\}_c = \{\text{obl. } \mu\,(\overline{M})\}_{a-c}\,,$$

t. j. bod $(\overline{M})$ opisuje epicykloidu vzniklou valením kruhu poloměru $a - c$ po kruhu (c).*)

Odvalený úhel na kruhu hybném $= \varphi$, na kruhu pevném $= \psi - \varphi$.

Přímka $(\overline{M})\,\overline{C} \parallel C'\,O\,m$ je kolmá na $\mathfrak{N}^1$ a splývá s přímkou $(M)\,P$, t. j. s průmětem tečny, a je tedy tečnou půdorysu $\boldsymbol{I}_1$.

---

*) La Hire, Traité des épicycloïdes (1694), str. 390—392. Srov. F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables, sv. II., str. 155 a násl.

Avšak přímka spojující opisující bod se středem hybného kruhu obaluje epicykloidu, která vznikne valením kruhu polovičního poloměru po témž pevném kruhu.*)

V důsledku toho místo bodu M_1, t. j. průmět Γ_1 jest epicykloidou, kterou opíše bod kruhu poloměru $\frac{a-c}{2}$ při jeho kotálení po**) kruhu (c).

K témuž výsledku dospějeme přímo: Nejprvé plyne z podobnosti trojúhelníků $m\,O\,\mu$, $m\,C'\,(\overline{M}')$ vztah

$$m\,\mu : m\,(\overline{M}) = c : a,$$

a v pravoúhlém trojúhelníku $m\,P\,(\overline{M})$ bude dle toho vzdálenost bodu μ od přímky $\mathfrak{N}^{\mathrm{I}} \equiv m\,P$ míti hodnotu

$$\frac{c}{a} \,.\, (\overline{M})\,P = P\,M_1\,,$$

a tudíž leží bod M_1 na přímce $(\mu\,M_1 \parallel \mathfrak{N}^{\mathrm{I}})$ vedené bodem μ rovnoběžně se stopou $\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}$.

Vrchol M_1 pravoúhlého trojúhelníka $\overline{C}\,M_1\,\mu$ tedy leží na kruhu opsaném ze středu D (na přeponě $\overline{C}\,\mu$) poloměrem $D\,\mu = \frac{a-c}{2}$. Obvodový úhel oblouku $\mu\,M_1$ jest $\mu\,\overline{C}\,(\overline{M}) = \varphi$, středový úhel jeho tedy $= 2\,\varphi$ a délka jeho

$$\frac{a-c}{2} \,.\, 2\,\varphi = (a-c)\,\varphi = c\,(\psi - \varphi) = \left\{ \text{obl. } A\,\mu \right\}_c .$$

Tím naše věta dokázána přímo a zároveň vidno, že při valení kruhu $\left(\frac{a-c}{2}\right)$ po kruhu (c) přísluší bodu M_1 odvalený úhel $\psi - \varphi$ na pevném a $2\,\varphi$ na hybném kruhu.

*

Konstrukce bodu M_1 spočívá na úměře

$$P\,M_1 : P\,(M) = c : a,$$

a dle ní se musí přímky $C\,(M)$ a $O\,M_1$ protnouti na přímce $\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}$ v bodě n.

Na té vlastnosti lze založiti důkaz Buffoneovy věty, nezávislý na větě La Hireově. Potřebí je k tomu následující planimetrické věty:

Buď m pata výšky trojúhelníku $O\,C\,n$; $O\,m = c$, $C\,m = a$; opišme kružnice (c), (a) mající středy v druhých dvou vrcholech O, C, a které se dotýkají výšky v bodě m. Větší z nich protne přilehající stranu v bodě

*) M. Chasles, Corresp. math. et phys. (Quetelet) 1832; svaz. I., str. 4. Viz též F. G. Teixeira, Traité des courbes, II., str. 165.

**) Teixeira l. c. str. 402. Ang. Buffone, Giorn. di Mat. 1896.

(M), jím vedená rovnoběžka se základnou stanoví na druhé straně bod M_1; nechť kolmice $M_1\,\mu$ na základnu spuštěná protne menší kruh v bodě μ. Pak

1^0 Úhel $m\,O\,\mu$ se rovná úhlu C v trojúhelníku,

2^0 Kružnice L opsaná poloměrem $\frac{a-c}{2}$ a tečná v bodě μ s kruhem (c) obsahuje bod M_1.

3^0 Oblouky $m\,\mu$ na (c) a $\mu\,M_1$ na L mají za součet oblouk $m\,(M)$ na (a).

Znamenejme k vůli stručnosti opět $\sphericalangle C = \varphi$, $\sphericalangle m\,O\,\mu = \chi$; pak nám vztahy

$$P\,(M) = a - a\cos\varphi,\ P\,M_1 = c - c\cos\chi$$
$$P\,(M) : P\,M_1 = a : c$$

podávají $\varphi = \chi$.

Nechť osa bodů M_1 a μ protne $O\,\mu$ v bodě D, a položme $D\,\mu = r$, $M_1\,\mu = l$. V kruhu opsaném ze středu D poloměrem r stanoví se tětiva l vzorcem

$$l = 2\,r\,\sin\chi = 2\,r\,\sin\varphi,$$

dále máme pro délku $M_1\,S_1$ výrazy

$$l + c\,\sin\chi,\ a\,\sin\varphi;$$

jich srovnáním plyne

$$(2\,r + c)\,\sin\varphi = a\,\sin\varphi,$$

t. j.

$$r = \frac{a-c}{2},$$

čímž stanoven poloměr kruhu L.

Konečně hodnoty

$$\text{obl. } m\,\mu = c\,\varphi,\ \text{obl. } \mu\,M_1 = r\,.\,2\,\varphi = (a-c)\,\varphi,\ \text{obl. } m\,(M) = a\,\varphi$$

verifikují udaný vztah mezi oblouky. Applikujeli se tato věta na naši konstrukci bodu M_1, vychází odtud povaha čáry Γ_1 jako epicykloidy výše popsané.

Konečně můžeme z předešlých konstrukcí určiti křivku (S_1), kterou opisuje průmět středu křivosti sférické šroubovice.

Přímka $M_1\,S_1$ jakožto normála epicykloidy obaluje opět epicykloidu; ježto $O\,S_1 \perp M_1\,S_1$, vychází věta, že čára (S_1) jest úpatnicí jisté epicykloidy z jejího středu jakožto pólu.

Polární souřadnice bodu S_1 jsou

$$O\,S_1 = r,\ \sphericalangle A\,O\,S_1 = \psi,$$

i plyne z trojúhelníka $O\,S_1\,\mu$, v němž úhel při O jest φ,

$$r = c\cos\varphi,\ a\,\varphi = c\,\psi,$$

tedy polární rovnice čáry (S_1)

$$r = c \cos\left(\frac{c}{a}\psi\right);$$

křivky tyto nazval Guido Grandi růžicemi (rhodonaea, rosace).

Naopak lze každou růžici

$$r = c \cos k\psi,$$

jejíž paramétr k je ryzí zlomek, stanoviti jako průmět geodetické kružnice*) na rotačním kuželi do jeho základny. Délka strany kužele patrně

$$a = \frac{c}{k}.$$

Analytické odvození úpatnice epicykloidy pro pól v její středu položený viz Teixeira l. c. str. 162.

Z polární rovnice růžice plyne

$$x + iy = e^{i(\psi - \varphi)}\left[\frac{c}{2} + \frac{c}{2}e^{2i\varphi}\right],$$

i bude lze čáru (S_1) vyjádřiti jako modifikovanou epicykloidu.

Nechť se po kruhu (R) poloměru R kotálí po vnější straně kruh poloměru r, jehož střed buď C; jeden z jeho bodů P opisuje obyčejnou epicykloidu; bod Q na přímce CP určený ramenem $CQ = g$ (algebraicky pojatým, a sice je g kladné pro případ, že Q leží na téže straně bodu C jako bod P) pak opisuje epicykloidu prodlouženou neb zkrácenou (modifikovanou); pravoúhlé souřadnice bodu Q dány jsou rovnicí

$$x + iy = e^{i\alpha}(R + r - g\,e^{i\beta}),\ R\alpha = r\beta,$$

je-li začáteční poloha bodu P v místě $x = R$, $y = 0$.

A sice značí tu α odvalený úhel na kruhu pevném, β odvalený úhel na kruhu hybném.

Hořejší vyjádření čáry (S_1) vznikne odtud pro

$$R = \frac{c^2}{a+c},\ r = \frac{c(a-c)}{2(a+c)},\ g = -\frac{c}{2};$$

$$\alpha = \psi - \varphi,\ \beta = 2\varphi.^{**})$$

Epicykloida opsaná bodem P je v tomto případě homothetická s čarou Γ_1, a sice je multiplikátor $= \frac{c}{a+c}$.

---

*) t. j. čáry, jež rozvinutím kužele v rovinu přechází v kruh.

**) Tuto zmíněnou vlastnost růžic znal již Suardi (1752) a dokázal Ridolfi (1844); viz Teixeira, l. c., str. 212.

Zvětšíme-li průvodiče $O S_1$ v poměru $a + c : c$, obdržíme prodlouženou epicykloidu s prvky

$$R = c, \; r = \frac{a - c}{2}, \; g = -\frac{a + c}{2} = -\left(\frac{a - c}{2} + c\right);$$

prodloužíme-li tedy vektor $M_1 D$ o délku $\frac{a + c}{2} = O D$, padne koncový bod do přímky $O m$.

Rovnoběžka s osou rotačního kužele u vzdálenosti r od ní vedená protne tento kužel v bodě, jehož výška jest

$$z = (c - r) \, tg \, \gamma = (c - r) \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}.$$

Po dosazení hodnoty

$$r = c \cos \varphi$$

obdržíme jako třetí souřadnici bodu S

$$z = (1 - \cos \varphi) \sqrt{a^2 - c^2},$$

takže naše čára středů křivosti sférické šroubovice jest analyticky dána rovnicemi

$$(S) \quad x = c \cos \varphi \cos \psi, \; y = c \cos \varphi \sin \psi, \; z = (1 - \cos \varphi) \sqrt{a^2 - c^2},$$

$$a \varphi = c \psi.$$

Potlačíme-li vztah mezi φ a ψ vládnoucí, probíhají body (S) při neodvislých φ a ψ naši plochu kuželovou

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} = \frac{(z - \sqrt{a^2 - c^2})^2}{a^2 - c^2};$$

čára středů (S) jest na ní charakterisována rovnicí

$$a \varphi = c \psi.$$

Je-li σ délka oblouku $A M_1$ na průmětu Γ_1, bude příslušný oblouk $A M$ šroubovice sférické dle obecného vzorce

$$s = \frac{\sigma}{\sin \gamma}, \quad \left(\cos \gamma = \frac{c}{a}\right),$$

při čemž značí γ jako výše stálý úhel mezi tečnou čáry a stranou válce.

Poněvadž oblouk σ na epicykloidě určen elementárním výrazem

$$\frac{4 r (R + r)}{R} \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right),$$

tedy v našem případě čáry Γ_1, kdy $R = c$, $r = \frac{a - c}{2}$, $\beta = 2 \varphi$

$$\sigma = \frac{a^2 - c^2}{c} (1 - \cos \varphi), \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi,$$

bude v uvedených mezích $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$s = a\, tg\, \gamma\, (1 - cos\, \varphi),$$

dále v intervallu $\pi \leq \varphi \leq 2\,\pi$

$$s = a\, tg\, \gamma\, (3 + cos\, \varphi).$$

Oblouk sférické šroubovice se tedy určí elementárními prostředky.*)

Čára Γ je průseč koule $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{a^2 - c^2})^2 = a^2$ s válcem, jehož přímý řez jest epicykloida Γ_1. Na té odpovídají body vratu hodnotám $\varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\,\pi, \pm 3\,\pi, \ldots$ Příslušné povrchové přímky válce jsou singulární, a také budou jich průsečíky s koulí singulární body čáry Γ, a sice body vratu. Takové jsou na základní větvi tři: $\varphi = 0, \pi, 2\,\pi$ (pokud není $\frac{a}{c}$ číslo celistvé; v tom případě poslední bod splývá s prvním, A).

*

4. Průběhem úvah v předešlém odstavci dospěli jsme k výsledku, že lze každou růžici, jejíž paramétr je menší jedné, sestrojiti jako průmět kruhového nálepu na rotačním kuželi. Tento vztah možno zobecniti, čímž zároveň vynikne jeho pravá podstata.

Čára

$$(C) \qquad x = c\, cos\, \varphi\, cos\, \psi,\ y = c\, cos\, \varphi\, sin\, \psi,\ z = b\, cos\, \varphi,\ a\, \varphi = c\, \psi,$$

leží na rotačním kuželi

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} = \frac{z^2}{b^2}.$$

Je-li $M\,(x\,y\,z)$ bod čáry, seče povrchová přímka $O\,M$

$$\frac{x}{z} = \frac{c}{b}\, cos\, \psi,\ \frac{y}{z} = \frac{c}{b}\, sin\, \psi$$

základnu kužele $z = b$ v bodě

$$(m) \qquad x = c\, cos\, \psi,\ y = c\, sin\, \psi,\ z = b;$$

na rovině základní leží též bod čáry (C)

$$(A) \qquad \varphi = 0 = \psi;\ x = c,\ y = 0,\ z = b.$$

Úhel ψ patrně se měří na oblouku $A\,m$.

Po rozvinutí kužele v rovinu přechází část pláště mezi přímkami $O\,A$, $O\,m$ a základnou v kruhovou výseč poloměru

$$O\,A = l = \sqrt{b^2 + c^2},$$

se středovým úhlem ω, a bude — ježto obl. $A\,m = c\,\psi$ —

$$l\,\omega = c\,\psi = a\,\varphi.$$

*) P. Serret, Théorie des lignes à double courbure; 1860.

Znamenáme-li $O\,M = r$ průvodič bodu M, máme nejprvé na kuželi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^2}}\, z = \sqrt{b^2 + c^2}\cos\varphi,$$

předpokládáme-li $b > 0$.

Polární rovnice rozbalené čáry C bude tedy

$$(C^*) \qquad r = l\cos\frac{l\,\omega}{a},$$

a je to růžice s poloměrem l a paramétrem $\frac{l}{a}$; průmět čáry C jest růžice

$$(C_0) \qquad r = c\cos\frac{c}{a}\psi$$

s poloměrem c a parametrem $\frac{c}{a}$.

Znamenáme-li γ úhel mezi stranou kužele a jeho osou, bude

$$c = l\sin\gamma.$$

„Nalepíme-li na plášť rotačního kužele s otvorem 2γ rovinu s růžicí

$$r = l\cos\varepsilon\,\omega$$

tak, aby střed růžice padl do vrcholu kužele, zaujme růžice místo prostorové čáry C, která se do základny kužele promítá v růžici, jejíž poloměr i paramétr se ve stejném poměru zmenší a sice jako $1 : \sin\gamma$."

Je-li zvláště $\varepsilon = 1$, je nálep kruh procházející vrcholem, a průmět je růžice s paramétrem $\sin\gamma$.

Naopak se růžice v nálepu s paramétrem $\varepsilon = \frac{1}{\sin\gamma} > 1$ promítá v kruh procházející středem základny, takže příslušná čára prostorová jest algebraickou stupně 4. V tomto případě $a = c$, $\psi = \varphi$ jsou rovnice čáry

$$x = c\cos^2\varphi,\ y = c\sin\varphi\cos\varphi,\ z = b\cos\varphi\ \left(tg\,\gamma = \frac{c}{b}\right),$$

z nichž vychází při označení $k = tg\,\gamma = \frac{c}{b}$

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2,\ x^2 + y^2 - c\,x = 0,$$

t. j. čára je pronikem rotačního kužele s kruhovým válcem, jenž obsahuje osu kužele jako svou stranu.

Svazek ploch 2. stupně jí určený

$$(2) \qquad (1 + \lambda)(x^2 + y^2) - k^2 z^2 - \lambda\,c\,x = 0$$

obsahuje kouli $(\lambda + 1 = -k^2)$

(2⁰) $$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{k^2 + 1}{k^2} c\, x = \frac{c\, x}{\sin^2 \gamma},$$

která se dotýká kruhového válce čáry, t. j. čára tato jest hyppopéda Eudoxova.*)

*

5. Epicykloida vytvořená bodem hybného kruhu (r) při jeho kotálení po pevném kruhu (R) se středem v O jest charakterisována rovnicí**)

$$x + i\, y = (R + r)\, e^{i\alpha} - r\, e^{i(\alpha + \beta)}, \quad R\, \alpha = r\, \beta,$$

při čemž α, β jsou odvalené úhly na kruhu pevném a hybném, a poloha začáteční $\alpha = 0 = \beta$ je v ose $O\, x$ $(x = R,\ y = 0)$.

V našem případě čáry Γ_1 máme

$$R = c, \quad r = \frac{a - c}{2}, \quad \alpha = \psi - \varphi, \quad \beta = 2\, \varphi, \quad a\, \varphi = c\, \psi,$$

takže průmět šroubové čáry sférické Γ je dán vztahem

(1) $$x + i\, y = \frac{a + c}{2}\, e^{i(\psi - \varphi)} - \frac{a - c}{2}\, e^{i(\psi + \varphi)}.$$

Differencováním plyne

$$d\, x + i\, d\, y = \frac{a^2 - c^2}{2\, c}\, i\, e^{i(\psi - \varphi)} (1 - e^{2i\varphi})\, d\, \varphi$$

a odtud pro prvek oblouku u průmětu

$$d\, \sigma = \frac{a^2 - c^2}{c} \sin \varphi\, d\, \varphi.$$

Oblouk průmětu bude dán výrazem***)

$$\sigma = k - \frac{a^2 - c^2}{c} \cos \varphi,$$

kde k je veličina stálá.

Podmínka, aby čára byla šroubovou, zní

$$z = \lambda\, \sigma + \mu,$$

---

*) Srov. naši rozpravu O dvou plochách stupně čtvrtého, čl. I. (Rozprav České Akademie roč. XXII, č. 36; 1913).

**) Jinak známá tato věc plyne jednoduše z obrazce na základě sečítání vektorů v rovině.

***) V intervalech $(2\, \nu - 1)\, \pi \leqq \varphi \leqq 2\, \nu\, \pi$ třeba změniti znamení u druhého členu, neboť tu $\sin \varphi$ je záporné, takže v tomto v případě dlužno klásti

$$\frac{d\, \sigma}{d\, \varphi} = \frac{\sqrt{d\, x^2 + d\, y^2}}{d\, \varphi} = -\frac{a^2 - c^2}{c} \sin \varphi.$$

kde λ, μ jsou stálé; tu možno klásti $k = 0$; máme pak

$$(1^0)\qquad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2}\cos(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\cos(\psi+\varphi)\\ y &= \frac{a+c}{2}\sin(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\sin(\psi+\varphi)\\ z &= -\lambda\frac{a^2-c^2}{c}\cos\varphi + \mu. \end{aligned}\right.$$

Z prvních dvou rovnic plyne

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{a^2-c^2}{2}\cos 2\varphi,$$

dále jest

$$(z-\mu)^2 = \lambda^2\frac{(a^2-c^2)^2}{c^2}\cos^2\varphi, \quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1;$$

tudíž sečtením vychází

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{\lambda^2(a^2-c^2)}(z-\mu)^2 = a^2,$$

rovnice plochy 2. stupně obsahující naši čáru. Aby to byla čára sférická, musí tato plocha býti koulí, t. j.

$$\lambda = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Oběma znamením odpovídá v našem vyjádření šroubová čára sférická, a to při libovolném μ. Žádáme-li, aby koule procházela bodem A $(x = c,\ y = z = 0)$, máme

$$\mu^2 = a^2 - c^2.$$

Aby bylo $z = 0$ pro $\varphi = 0$, musí λ a μ býti stejného znamení; našim předpokladům odpovídá μ kladné, tedy

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}},\quad \mu = \sqrt{a^2-c^2},$$

takže parametrické vyjádření sférické šroubovice v poloze námi uvažované zní

$$(1^*)\qquad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2}\cos(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\cos(\psi+\varphi)\\ y &= \frac{a+c}{2}\sin(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\sin(\psi+\varphi)\\ z &= \sqrt{a^2-c^2}\,(1-\cos\varphi)\\ a\varphi &= c\psi. \end{aligned}\right.$$

Analytický zákon oblouku se mění, přestoupí-li průmět bodu bod vratu; také čára (Γ), v niž přejde šroubovice po rozvinutí válce v rovinu, mění v těch místech náhle směr, a nesestává z jediné přímky, nýbrž z čáry

lomené o přímých složkách, které jsou k povrchovým přímkám stejně nakloněny.

Hodnota

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} = cotg\ \gamma, \quad \left(cos\ \gamma = \frac{c}{a}\right)$$

udává směrnici rozvinuté čáry pro oblouk $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, v následujícím intervallu zní zákon oblouku

$$\varkappa + \frac{a^2 - c^2}{c} cos\ \varphi\ ,$$

a tedy bude vztah mezi výškou bodu M a obloukem σ pozměněn na

$$z = -\lambda\,\sigma + \mu',$$

takže směrnice lomené čáry v intervallu $\pi \leqq \varphi \leqq 2\,\pi$ bude $-\lambda$.

Pro nárysný průmět čáry Γ máme

$$(\Gamma_2) \qquad \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a + c}{2} cos\ (\psi - \varphi) - \dfrac{a - c}{2} cos\ (\psi + \varphi) \\ z = \sqrt{a^2 - c^2}\ (1 - cos\ \varphi)\ ;\ a\,\varphi = c\,\psi, \end{array} \right.$$

a rovnice ty podávají realné body i pro ryze pomyslné parametry ψ; čára Γ_2 prochází bodem A, a nemá v něm žádné singularity.

Z rovnic

$$\frac{d\,x}{d\,\varphi} = \frac{a^2 - c^2}{c} cos\ \psi\ sin\ \varphi, \quad \frac{d\,z}{d\,\varphi} = \sqrt{a^2 - c^2}\ sin\ \varphi$$

plyne

$$\frac{d\,x}{d\,z} = tg\ \gamma.\ cos\ \psi\ ,$$

z čehož vychází jednoduchá konstrukce tečny.

Dále

$$\frac{d^2\,x}{d\,z^2} = -\frac{a}{c^2}\,\frac{sin\ \psi}{sin\ \varphi}\ ,$$

z čehož plyne pro poloměr křivosti nárysu

$$(2) \qquad P = \frac{(a^2\,cos^2\,\psi + c^2\,sin^2\,\psi)^{3/2}}{a\,c}\,\frac{sin\ \varphi}{sin\ \psi}\ .$$

V bodě A $(\psi = 0)$ máme

$$\frac{sin\ \varphi}{sin\ \psi} = \frac{c}{a}\ ,\ P = a,$$

t. j. střed křivosti tu padne do V_2.

Pro ellipsu

$$x = c\ cos\ \psi,\ z = a\ sin\ \psi$$

má poloměr křivosti hodnotu

$$E = \frac{(a^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}{a\,c} ;$$

je tedy

$$P = E \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} ; \tag{2^0}$$

sestrojíme tedy poloměr křivosti u ellipsy, načež pomocí sinusové věty o trojúhelníku snadno obdržíme P.

V bodech obratních je $P = \infty$, tedy má nárys obrat v místech $\psi = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, pokud na nich $\sin \varphi = \sin\left(\frac{c}{a} \psi\right)$ jest od nully různo.

Naproti tomu hodnoty $\varphi = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, pokud pro ně nevymizí též $\sin \psi$, dávají body vratní (kuspidální).

*

Hlavní normála leží v rovině $Z = z$, a v rovině kolmé na přímku $O\,m$ u vzdálenosti $O\,S_1 = c \cos \varphi$ od Oz. Její rovnice znějí tedy:

$$X \cos \psi + Y \sin \psi = c \cos \varphi, \quad Z = \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos \varphi). \tag{3}$$

Stopa $\mathfrak{N}^1$ roviny normální má rovnici

$$X \cos \psi + Y \sin \psi = c,$$

tedy úseky na osách normální rovinou stanovené jsou

$$\frac{c}{\cos \psi}, \frac{c}{\sin \psi}, \sqrt{a^2 - c^2},$$

a rovina normální má rovnici

$$X \cos \psi + Y \sin \psi + Z \operatorname{cotg} \gamma = c, \quad \operatorname{cotg} \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} . \tag{4}$$

Tečna tedy je vyjádřena rovnicemi*)

$$\frac{X - x}{\cos \psi} = \frac{Y - y}{\sin \psi} = \frac{Z - z}{\operatorname{cotg} \gamma}, \tag{5}$$

a její směrnice (kosinusy směrné) mají hodnoty

$$\sin \gamma \cos \psi, \ \sin \gamma \sin \psi, \ \cos \gamma. \tag{5^a}$$

Směrnice osy křivosti $V\,m$ jsou (a zároveň binormály)

$$-\cos \gamma \cos \psi, \ -\cos \gamma \sin \psi, \ \sin \gamma , \tag{6}$$

a rovina oskulační má tedy rovnici

$$X \cos \psi + Y \sin \psi - tg\ \gamma\,(Z - z) = c \cos \varphi . \tag{7}$$

*) V bodech $\psi = \pm n\pi$ — pro něž nárys má obrat — jsou tečny rovnoběžny s nárysnou $O\,x\,z$.

Kladný směr hlavní normály MS

$$-\sin\psi,\ \cos\psi,\ 0\ .$$

Dále je poměr poloměru křivosti ϱ k poloměru kroucení T

$$\frac{\varrho}{T} = \frac{d\,(-\cos\gamma\cos\psi)}{d\,(\sin\gamma\cos\psi)} = -\operatorname{cotg}\gamma$$

tudíž

$$\varrho = a\sin\varphi,\ T = -a\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi\ .$$

Souřadnice středu křivosti nalezeny výše ve tvaru

$$X = c\cos\varphi\cos\psi,\ Y = c\cos\varphi\sin\psi\ , \tag{8}$$
$$Z = \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos\varphi)$$

*

Obraťme se k ploše hlavních normál. Tyto jsou rovnoběžny s rovinou $O\,x\,y$, a společná kolmice každých dvou prochází průsekem jich průmětů; totéž platí o dvou hlavních normálách nekonečně blízkých, jejich společná kolmice je rovnoběžná s $O\,z$ a její stopa se blíží bodu na evolutě čáry Γ_1, t. j. středu křivosti σ čáry Γ_1 v bodě M_1. Kolmice v bodě σ na rovinu $O\,x\,y$ vztýčená protíná hlavní normálu v t. zv. středním bodě; geometrické místo těchto bodů tvoří strikční čáru plochy hlavních normál.

Pro epicykloidu

$$x + i\,y = e^{i\alpha}\,(R + r - r\,e^{i\beta}),\ R\,\alpha = r\,\beta\ ,$$

je střed křivosti dán vzorcem

$$X_0 + i\,Y_0 = \frac{R}{R + 2\,r}\,e^{i\alpha}\,(R + r + r\,e^{i\beta})\ ,$$

tedy v našem případě $R = c$, $2\,r = a - c$, $\beta = 2\,\varphi$, $\alpha = \psi - \varphi$ bude

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{c}{a}\,\frac{a+c}{2}\cos(\psi - \varphi) + \frac{c}{a}\,\frac{a-c}{2}\cos(\psi + \varphi)\ , \\ Y_0 &= \frac{c}{a}\,\frac{a+c}{2}\sin(\psi - \varphi) + \frac{c}{a}\,\frac{a-c}{2}\sin(\psi + \varphi)\ ; \end{aligned}\right| \tag{9}$$

to jsou výrazy souřadnic bodu na strikční čáře, třetí souřadnice jest

$$Z_0 = z = \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos\varphi)\ .$$

Promítající válec, jehož základna jest epicykloida (9), dotýká se plochy hlavních normál podél strikční čáry.

Z rovnic (9) plyne

$$X_0^2 + Y_0^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2}\cos 2\varphi\right),$$

dále jest

$$(Z_0 - \sqrt{a^2 - c^2})^2 = (a^2 - c^2)\cos^2\varphi ,$$

a odtud pro bod $(X_0\ Y_0\ Z_0)$ na strikční čáře vztah

$$X_0^2 + Y_0^2 - \frac{c^2}{a^2}(Z_0 - \sqrt{a^2 - c^2})^2 = \frac{c^4}{a^2} , \tag{10}$$

t. j. strikční čára plochy hlavních normál sférické šroubovice leží na rotačním hyperboloidu jednoplochém majícím střed a osu společné s polárním kuželem. Nejužší kruh má poloměr $\frac{c^2}{a}$, laterální polouosa hyperboly jest c.

*

Oblouk epicykloidy

$$x + i\,y = e^{i\alpha}(R + r + r\,e^{i\beta})$$

je dán výrazem

$$\sigma = 4\,\frac{r\,(R + r)}{R}\sin\frac{\beta}{2} ,$$

tedy pro epicykloidu (9)

$$\sigma = \frac{a^2 - c^2}{a}\sin\varphi .$$

Tedy bude

$$(Z_0 - \sqrt{a^2 - c^2})^2 + \mu\,\sigma^2 = a^2 - c^2 ,$$

volíme-li

$$\mu = \frac{a^2}{a^2 - c^2} .$$

Rozvine-li se válec, jehož přímý řez je evoluta čáry Γ_1, v rovinu, přejde strikční čára v ellipsu, jejíž polouosa rovnoběžná se stranami válce má hodnotu $\sqrt{a^2 - c^2}$, druhá pak jest

$$\frac{a^2 - c^2}{a} = a\sin^2\gamma .$$

*

Znamenáme-li M bod (1*) na šroubovici Γ, M_0 bod (9) na strikční čáře (střední bod na hl. normále), bude bod P definovaný barycentrickou rovnicí

$$c\,M + a\,M_0 = (c + a)\,P$$

míti souřadnice

$$X = c\cos(\psi - \varphi),\ Y = c\sin(\psi - \varphi),\ Z = z ,$$

a je to bod, jehož průmět jsme znamenali μ.

Podobně bod P' daný rovnicí

$$a\,M_0 - c\,M = (a - c)\,P'$$

má souřadnice

$$X = c\cos(\psi + \varphi),\ Y = c\sin(\psi + \varphi),\ Z = z.$$

Obě čáry

(11) $X = c \cos(\psi \pm \varphi),\ Y = c \sin(\psi \pm \varphi),\ Z = \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos\varphi)$

tvoří část průseče plochy hlavních normál s válcem

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Na př. v případě $a = 2c$, $\psi = 2\varphi$ znějí rovnice čáry (P)

$$X = c \cos\varphi,\ Y = c \sin\varphi,\ Z - \sqrt{a^2 - c^2} = -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi$$

a je tedy

$$Z + X \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{a^2 - c^2},$$

t. j. čára (P) jest ellipsa.

Naproti tomu máme pro čáru (P') v tomto případě $(a = 2c)$

$$X = c \cos 3\varphi,\ Z - \sqrt{a^2 - c^2} = -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi$$

a poněvadž

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

vychází, že (P') je na ploše stupně třetího a tedy křivkou stupně 6.

*

Hlavní normálu lze v obecném případě pro naši křivku Γ vyjádřiti parametricky (paramétry v a φ)

(3*) $$\begin{aligned} X &= c \cos(\psi - \varphi) - v \sin\psi \\ Y &= c \sin(\psi - \varphi) + v \cos\psi \\ Z &= \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos\varphi),\ a\varphi = c\psi, \end{aligned}$$

a je to zároveň paramétrické vyjádření plochy hlavních normál.*) Odtud plyne:

(12) $$X^2 + Y^2 = c^2 + v^2 - 2cv \sin\varphi$$

a tedy

$$\left(\frac{X^2 + Y^2 - c^2 - v^2}{2cv}\right)^2 + \frac{(Z - \sqrt{a^2 - c^2})^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

rovnice rotační plochy stupně 4., na níž leží čára stálého v naší plochy sborcené.

Základní válec

$$x^2 + y^2 = c^2$$

protíná tedy plochu hlavních normál v bodech daných rovnicí

$$v^2 - 2cv \sin\varphi = 0.$$

---

*) Na čáře Γ jest $v = -(a - c)\sin\varphi$; pro střed křivosti pak $v = c \sin\varphi$.

Hodnota $v = 0$ podává křivku (P) (rov. (11), spodní znaménko), a zbývá ještě řešení

$$v = 2\,c\,\sin\varphi,$$

pro něž rovnice (3*) podají při nezměněném Z

$$X = c\,\cos(\psi + \varphi),\quad Y = c\,\sin(\psi + \varphi),$$

t. j. křivka (P').

Této methodě unikly pouze útvary v nekonečnu, a tedy válec základní [s řídící čarou (c)] nemá s plochou hlavních normál jiných útvarů společných v konečné vzdálenosti mimo čáry (P) a (P').

V případě $a = 2\,c$ znějí rovnice (3*)

$$X = c\,\cos\varphi - v\,\sin 2\varphi,\quad Y = c\,\sin\varphi + v\,\cos 2\varphi,\quad Z = c\sqrt{3}\,(1 - \cos\varphi)$$

aneb zavede-li se komplexní paramétr

$$u = e^{i\varphi},$$

$$(13)\qquad \left|\begin{array}{l} X = \dfrac{c\,u\,(u^2+1) + i\,v\,(u^4-1)}{2\,u^2} \\ Y = \dfrac{-i\,c\,u\,(u^2-1) + v\,(u^4+1)}{2\,u^2} \\ Z = c\sqrt{3} - c\sqrt{3}\,\dfrac{u^2+1}{2\,u}\,. \end{array}\right.$$

Čáry stálého v jsou stupně 4., plocha však je stupně 6.

Hlavní normála v našem případě $a = 2\,c$ má rovnice

$$X\,\cos 2\varphi + Y\,\sin 2\varphi = c\,\cos\varphi$$

$$Z_1 = -c\sqrt{3}\,\cos\varphi\,,\quad Z_1 = Z - c\sqrt{3};$$

vyloučením $\cos\varphi$ plyne rovnice 6. stupně

$$(13^*)\qquad X\,(2\,Z_1^2 - 3\,c^2) + c^2\sqrt{3}\,Z_1 = 2\,Y\,Z_1\sqrt{3\,c^2 - Z_1^2},$$

pro naši plochu hlavních normál. Kužel asymptotických směrů má rovnici

$$X\,Z_1^2 \mp i\,Y\,Z_1^2 = 0$$

i rozpadá se ve dvě roviny pomyslné $X \mp i\,Y = 0$ a v čtvernásob čítanou rovinu $Z_1 = 0$, vedenou bodem V rovnoběžně s rovinou základní $x\,y$.

Nekonečně vzdálené přímky pomyslných rovin $X \mp i\,Y = 0$ leží také na našem základním válci, mimo to asymptotické roviny v jejich bodech splývají s asymptotickými rovinami válce, takže každá z nich platí jako průsečnice 2. stupně. Skutečně zavede-li se čtvrtá homogenní souřadnice ω substitucí

$$X = \frac{x}{\omega}\,,\quad Y = \frac{y}{\omega}\,,\quad Z_1 = \frac{z}{\omega}\,,$$

obdržíme rovnici plochy ve tvaru

$$f \equiv [x\,(2\,z^2 - 3\,c^2\,\omega^2) + c^2\,\sqrt{3}\,z\,\omega^2]^2 + 4\,y^2\,z^2\,(z^2 - 3\,c^2\,\omega^2) = 0;$$

tu jest pro nekonečně vzdálené body $\omega = 0$

$$f = 0,\ \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$$

a rovnice tečné roviny v takém bodě bude zníti

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z_1\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

čili po dosazení hodnot

$$z^4\,(X\,x + Y\,y) + 2\,z^3\,Z_1\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Pro naše body jest $x^2 + y^2 = 0$, tedy rovnice roviny asymptotické

$$X\,x + Y\,y = 0$$

po dosazení hodnot $x = \pm\, i\,y$ bude

$$X \pm i\,Y = 0,$$

což jsou zároveň asymptotické roviny válce $x^2 + y^2 = c^2\,\omega^2$, jak tvrzeno.

Naše kuželosečka (P) leží na rovině

$$Z + X\,tg\,\gamma = \sqrt{a^2 - c^2},\ \text{t. j.}\ Z + X\sqrt{3} = c\,\sqrt{3},$$

která patrně obsahuje body A, V a jest rovnoběžna s osou $O\,y$ (normální rovina čáry v bodě vratu A); do úplného průseku této roviny s plochou stupně 6. zbývá ještě útvar stupně 4.

V souřadnicích se středem V se rovnice roviny této píše

$$Z_1 = -X\sqrt{3},$$

čehož dosazením do rovnice (13*) vychází

$$X\,[X^2 - c^2 + Y\sqrt{c^2 - X^2}] = 0.$$

Řešení $X = 0$ je patrně dvojnásobné, vedle toho máme dvě řešení jednoduchá $X^2 = c^2$ a $X^2 + Y^2 = c^2$, z nichž poslední přísluší čáře (P)

Naše čára Γ při $a = 2\,c$ má dva body vratu $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$.

„Plocha hlavních normál sférické šroubovice šestého stupně (s dvěma body vratu) je proťata normální rovinou bodu A

$$\frac{X}{c} + \frac{Z}{c\sqrt{3}} = 1$$

ve dvojné přímce $\left(\varphi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{2}\right)$

$$X = 0,\ Z = c\sqrt{3}\ \text{(rovnoběžka}\ V\,y),$$

ve dvou přímkách jednoduchých ($\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$) spolu rovnoběžných

$$(X = c,\ Z = 0) \text{ a } (X = -c,\ Z = 2c\sqrt{3})$$

a v ellipse, která se promítá ve kruh (c).“

Z (13*) vychází dále, že řez s rovinou XZ ($y = 0$) je dvojná čára plochy hlavních normál:

$$X(2Z_1^2 - 3c^2) + c^2\sqrt{3}Z_1 = 0 \quad (Z_1 = Z - c\sqrt{3}) \tag{14}$$

Rovnice $Y = 0$ podává pak rovnici její v paramétrech

$$v = -\frac{c \sin\varphi}{\cos 2\varphi}, \tag{14^1}$$

$$X = \frac{c\cos\varphi}{\cos 2\varphi},\quad Z = c\sqrt{3}(1 - \cos\varphi). \tag{14^2}$$

Přistupme k čarám stálého v. Paramétry průseků křivky (13) s rovinou

$$Ax + By - \frac{C(z - c\sqrt{3})}{\sqrt{3}} + Dc = 0$$

hoví rovnici

$$A(u^3 + u) - iB(u^3 - u) + C(u^3 + u) +$$
$$+ \frac{iv}{c}[A(u^4 - 1) - iB(u^4 + 1)] + 2Du^2 = 0,$$

kterou spořádáme na

$$(A - iB)u^4 - \frac{ic}{v}[(A + C - iB)u^3 + (A + C + iB)u + 2Du^2] -$$
$$- (A + iB) = 0. \tag{15^0}$$

Znamenáme-li symetrické funkce kořenů $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}_4$, takže rovnice zní

$$u^4 - \mathfrak{f}_1 u^3 + \mathfrak{f}_2 u^2 - \mathfrak{f}_3 u + \mathfrak{f}_4 = 0, \tag{15}$$

možno zvlášť zaznamenati následující zvláštní případy:

I. Rovina je rovnoběžna s osou Ox.

V rovnici jest $A = 0$, načež z rovnice (15⁰) vychází

$$\mathfrak{f}_4 = 1,\quad \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = \frac{2ci}{v}. \tag{a}$$

Druhou rovnici lze použitím první psáti

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 + \sin\varphi_4 = \frac{c}{v},$$

kdežto první podává

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \equiv 0 \ (mod\ 2\pi).$$

Veličiny φ_α tu značí úhly příslušné bodům sférické šroubovice, jichž hlavní normály procházejí průsečíky roviny ($\parallel Ox$) s čarou (13).

Protněme ellipsu

$$x = \mathfrak{A} \cos \varphi, \quad y = \mathfrak{B} \sin \varphi,$$

kde $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ jsou libovolné veličiny kladné, libovolným kruhem. Paramétry $u_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ průsečných bodů hoví podmínce

$$\mathfrak{f}_4 = u_1 u_2 u_3 u_4 = 1;$$

naopak pro libovolné 4 komplexní veličiny u_ν podrobené této podmínce leží 4 body ellipsy jim příslušné na kruhu a jeho rovnice zní:

$$x^2 + y^2 - 2p x - 2q y + \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{4} \mathfrak{f}_2 - \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{2} = 0,$$

$$p = \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{8\,\mathfrak{A}} (\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3), \quad q = i \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{8\,\mathfrak{B}} (\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3).$$

Druhá rovnice (*a*) podává tedy

$$q = -\frac{c}{4\,v\,\mathfrak{B}} (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2).$$

Na rovině hybného kruhu (*a*) narýsujeme ellipsu

$$x = a \cos \varphi, \quad y = c \sin \varphi \quad (\mathfrak{A} = a = 2c, \ \mathfrak{B} = c)$$

a přímku středovou

$$y = -\frac{a^2 - c^2}{4\,v} = -\frac{3}{4} \frac{c^2}{v}.$$

Libovolný kruh mající střed na této přímce protne ellipsu ve čtyrech bodech, jichž paramétry hoví podmínce (*a*), a jimž příslušné body na kruhu (*a*) se bezprostředně určí. Kotálíme-li kruh (*a*) po kruhu (*c*) až se jednotlivé body naší čtveřiny octnou na základně (kotálení začíná bodem $\varphi = 0$ od bodu A na kruhu (*c*)), obdržíme čtyry body na kotálnici šroubové, jichž hlavní normály stanoví na uvažované čáře $v = konst$ čtyři body ležící na rovině rovnoběžné s osou $O\,x$.

II. Nechť rovina sekoucí jest rovnoběžna s osou $O\,y$; kladouce $B = 0$, nacházíme vztahy

(*b*) $$\mathfrak{f}_4 = -1, \quad \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3.$$

Uvažujme na ellipse

$$x = \mathfrak{A} \cos \varphi, \quad y = \mathfrak{B} \sin \varphi, \quad (\mathfrak{A} > \mathfrak{B}),$$

čtyři body, jichž parametry

$$u = e^{i\varphi}$$

hoví podmínkám (*b*); veďme jimi rovnostrannou hyperbolu. Její rovnice zní

$$\frac{i}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}} x y - \frac{\mathfrak{f}_1}{2\,\mathfrak{A}} x + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_2 = 0$$

čili

$$x \left(y + \frac{\mathfrak{B}}{2} i\,\mathfrak{f}_1\right) = \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}{4} i\,\mathfrak{f}_2.$$

„Body ellipsy, jejichž paramétry hoví rovnicím (*b*), leží na rovnostranné hyperbole, jejíž jedna asymptota jest osa $O\,y$.“

„Protneme-li ellipsu ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) rovnostrannou hyperbolou, mající $O\,y$ za asymptotu, stanoví anomalie φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 průseků čtyři body šroubovice 30^0 spádu, jimiž procházející hlavní normály její vytínají na všech křivkách $v = konst$ čtveřiny rovinné, ležící na rovinách rovnoběžných s osou $O\,y$.“

Podmínky (*b*) lze psáti též

$$\Sigma\,\varphi_\nu \equiv \pi\ (mod\ 2\,\pi),\quad \Sigma\,cos\,\varphi_\nu = 0.$$

III. Konečně volme rovinu rovnoběžnou s $O\,z$; $C = 0$; obdržíme vztahy

(*c*) $$\mathfrak{f}_1 = \frac{i\,c}{v},\ \mathfrak{f}_3 = -\frac{i\,c}{v}\,\mathfrak{f}_4,$$

které lze nahraditi jiným tvarem

$$\Sigma\,cos\,\varphi_\nu = 0,\quad \Sigma\,sin\,\varphi_\nu = \frac{c}{v}\,.$$

Čtveřiny na šroubovici o 30^0 spádu hovící těmto podmínkám mají hlavní normály, jež na křivce $v = konst$ stanoví čtveřinu bodovou ležící na rovině rovnoběžné s osou $O\,z$.

Jako applikaci předpokládejme $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$, $\varphi_4 = \varphi_0$, kde φ je dáno, načež

$$cos\,\varphi_0 + 3\,cos\,\varphi = 0$$

určuje φ_0 a vztah

$$\frac{c}{v} = sin\,\varphi_0 + 3\,sin\,\varphi = 3\,sin\,\varphi + \sqrt{1 - 9\,cos^2\,\varphi}$$

určuje v. Takto se pro danou přímku na sborcené ploše hlavních normál určují dvě čáry $v = konst$, které v bodech oné přímky mají oskulační rovinu rovnoběžnou s osou $O\,z$.

Uvažujme ještě koule Σ, které jsou opsány nad průměrem, jenž polohou i velikostí splývá s poloměrem křivosti $M\,S$ čáry Γ, při čemž se omezíme na případ $a = 2\,c$. Z obrazce 2. je zřejmo, že střed koule Σ je v bodě μ na ellipse plochy hlavních normál; poloměr koule $\mu\,S$ rovná se vzdálenosti bodu μ od nárysny, poněvadž $O\,\mu_1$ půlí úhel $A\,O\,S_1$. Koule Σ dotkne se nárysny $x\,z$ v nárysu μ_2 bodu μ; odtud plyne, že

„koule Σ mají své středy na ellipse plochy hlavních normál a dotýkají se roviny $O\,x\,z$ podél fokální osy této ellipsy.“

Tím nabýváme obrazu o obalové ploše koulí Σ; je to souhrn kruhů majících své středy na tečnách ellipsy (μ), a které její rovinu kolmo protínají v bodech její nárysné stopy $A\,V$.

Stopa plochy na rovině ellipsy skládá se z této přímky a z racionální čáry 4. třídy, 6. stupně, jejíž paramétrické vyjádření se obdrží bez obtíží.

Pro rovnici koule Σ nalezneme (počátek souřadnic V)

$$(\Sigma)\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2c\cos\varphi\,(x - z\sqrt{3}) - 2cy\sin\varphi + 4c^2\cos^2\varphi = 0;$$

charakteristika leží na rovině

$$(\Sigma')\qquad (x - z\sqrt{3})\sin\varphi - y\cos\varphi = 4c\sin\varphi\cos\varphi.$$

Tyto roviny obalují válec rovnoběžný s přímkou $y = 0$, $z = x\,tg\,30^0$

$$x - z\sqrt{3} = 4c\cos^3\varphi,\quad y = -4c\sin^3\varphi,$$

jehož řídící čára v rovině $V\,x\,y$ jest astroida.

*

6. Bod M čáry Γ a bod na strikční čáře a jeho normále ležící M_0 jsou s průseky P, P', jež hlavní normála stanoví na válci $x^2 + y^2 = c^2$, v souvislosti vyjádřené barycentricky

$$c\,M + a\,M_0 = (c + a)\,P$$
$$c\,M - a\,M_0 = (c - a)\,P';$$

z toho plyne, že body $P\,P'\,M\,M_0$ tvoří čtveřinu harmonickou,*) čili že body $M\,M_0$ jsou vůči kruhovému válci (c) harmonicky sdruženy. Mimo to jsou dělící poměry

$$\frac{MP}{PM_0} = \frac{a}{c},\quad \frac{MP'}{P'M_0} = -\frac{a}{c},$$
$$\frac{PM}{MP'} = -\frac{a-c}{a+c},\quad \frac{PM_0}{M_0P'} = \frac{a-c}{a+c}$$

veličiny stálé.

Sférická šroubovice dělí tedy tětivy svých hlavních normál, stanovené základním válcem $x^2 + y^2 = c^2$, ve stálém poměru.

Poněvadž dle konstrukce jest $O\,S_1 \perp P_1P_1'$, je S_1 středem tětivy P_1P_1' a bod S je středem tětivy $P\,P'$:

„Střed křivosti půlí tětivu hlavní normály $P\,P'$ na základním válci stanovenou."

Obraťme se nyní k tečnám čáry Γ. Směrnice tečny mají hodnoty $\sin\gamma\cos\psi$, $\sin\gamma\sin\psi$, $\cos\gamma$, a body na tečně se vyjadřují parametricky takto:

$$(16)\quad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2}\cos(\psi - \varphi) - \frac{a-c}{2}\cos(\psi + \varphi) + v\sin\gamma\cos\psi,\\ y &= \frac{a+c}{2}\sin(\psi - \varphi) - \frac{a-c}{2}\sin(\psi + \varphi) + v\sin\gamma\sin\psi,\\ z &= -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi + v\cos\gamma,\quad a\varphi = c\psi, \end{aligned}\right.$$

při čemž počátek souřadnic je v bodě V.

*) Vlastnost ta se přenáší na kruhové kotálnice v rovině: Bod kotálnice jest se svým středem křivosti vzhledem k pevné kružnici harmonicky sdružený. (Srov. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, dtsch. v. G. Kowalewski, str. 59.)

Paramétr v udává vzdálenost bodu $x\,y\,z$ na tečně od dotykového bodu M na čáře Γ.

Vypočteme postupně

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \cos 2\varphi + v^2 \sin^2\gamma + 2\,c\,v \sin\gamma \cos\varphi,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + v^2. \tag{17}$$

Čáry $v = konst$ na ploše tečen leží tedy na koulích se stálým středem V.

Snadno bychom ukázali, že normální rovina čáry v = konst. obsahuje osu křivosti $V\,m$ příslušného bodu na čáře šroubové Γ. Délka oblouku jejího vede na vzpřímení ellipsy.

Pro průseč plochy tečen s válcem

$$x^2 + y^2 = g^2$$

platí

$$v \sin\gamma = -c\cos\varphi \pm \sqrt{c^2\cos^2\varphi - (a^2 - c^2)\sin^2\varphi - c^2 + g^2} =$$
$$= -c\cos\varphi \pm \sqrt{g^2 - a^2\sin^2\varphi};$$

pro $g = a$ se tedy průseč rozpadá ve dvě čáry

$$v \sin\gamma = (a - c)\cos\varphi,\quad v\sin\gamma = -(a + c)\cos\varphi.$$

„Válec $x^2 + y^2 = a^2$ protíná plochu tečen v čarách

$$(Q) \qquad x + i\,y = a\,e^{i(\psi - \varphi)},\quad z = -a\,tg\frac{\gamma}{2}\,.\cos\varphi,$$

a

$$(Q') \qquad x + i\,y = -a\,e^{i(\psi + \varphi)},\quad z = -a\,cotg\frac{\gamma}{2}\,.\cos\varphi,$$

při čemž počátek souřadnic je bod V.

V případě $a = 2\,c$, $\psi = 2\,\varphi$ je první čára ellipsou na rovině

$$z + \frac{x}{\sqrt{3}} = 0,$$

která jest oskulační rovina čáry v bodě $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\psi = \pi)$.

Jednoduchý výsledek podává též případ $a = 3\,c$, $\psi = 3\,\varphi$.

Zde máme pro čáru (Q) (při počátku V)

$$x = a\cos 2\varphi,\quad y = a\sin 2\varphi,\quad z = -b\cos\varphi,\quad b = a\,tg\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Tato čára jest hyppopéda ležící na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{2\,a}\,x + a^2 + \frac{b^2}{2} = \frac{a}{4}\,(x + a) + a^2;$$

má dvojný bod $x = -a$, $y = z = 0$, a leží na rotačním kuželi

$$(x + a)^2 + y^2 = 8\,z^2 \text{ (počátek } V).$$

Nárys čáry té jest parabola

$$z^2 = \frac{a}{4}(x + a).$$

Vraťme se k případu obecnému; tu obsahuje plocha tečen epicykloidu na rovině $z = 0$ („střední epicykloida“) — počátek souřadnic je stále bod V —

$$v = a\, tg\, \gamma \cos \varphi,$$

$$x + i\, y = \left(\frac{a + c}{2} + \frac{a - c}{2} e^{2i\varphi}\right) e^{i(\psi - \varphi)} sec\, \gamma,$$

která vznikne při kotálení kruhu poloměru $\frac{a - c}{2} sec\, \gamma$ po kruhu poloměru $c\ sec\, \gamma = a$, při čemž rámě g má hodnotu $-\frac{a - c}{2} sec\, \gamma$, t. j. bodu $\varphi = \psi = 0$ přísluší vrchol epicykloidy.

Ježto se jedná o plochu tečen čáry šroubové, jsou veškery řezy $z = konst$ pravoúhlé trajektorie tečen, a čára Γ_1 jest evolutou této střední epicykloidy.

Z toho vychází, že

„tětivy stanovené tečnami sférické šroubovice na válci $x^2 + y^2 = a^2$ jsou šroubovicí jakož i střední epicykloidou děleny ve stálých poměrech, opačného znamení,“

takže tu máme opět čtveřiny harmonické. Poměry stálé mají hodnotu

$$\pm \frac{a - c}{a + c},$$

t. j. platí pro body Q, Q' na proniku válce s tečnou barycentrický vztah

$$(a + c)\, Q + (a - c)\, Q' = 2\, a\, M;$$

pro bod E na střední epicykloidě pak

$$(a + c)\, Q - (a - c)\, Q' = 2\, c\, E,$$

a odtud

$$(a + c)\, Q = a\, M + c\, E.$$

V případě $a = 2\, c$ tedy ellipsa na ploše tečen dělí úseky tečen mezi šroubovicí a střední epicykloidou v poměru 1 : 2.

Na místě (16) můžeme pro vyjádření tečny užiti rovnic

$$(18) \qquad \left| \begin{array}{l} x = a \cos(\psi - \varphi) + w \sin \gamma \cos \psi \\ y = a \sin(\psi - \varphi) + w \sin \gamma \sin \psi \\ z = -a\, tg \frac{\gamma}{2} \cos \varphi + w \cos \gamma, \end{array} \right.$$

kde w je vzdálenost bodu na tečně od její stopy Q na válci $x^2 + y^2 = a^2$. Na čáře Γ jest $w = -a\, tg \frac{\gamma}{2} \cos \varphi$.

Půdorys čáry $w = konst$

$$x + i\,y = a\,e^{i(\psi-\varphi)} + w\,\sin\gamma\,e^{i\psi}$$

je prodloužená neb zkrácená epicykloida

$$R = c,\ r = a - c,\ g = -w\,\sin\gamma$$

(R poloměr kruhu pevného, r poloměr kruhu hybného, g rámě). Čára sama leží na rotačním paraboloidu

$$(19)\qquad x^2 + y^2 + 2\,\frac{a+c}{a}\,w\,z = a^2 + \left(\frac{a+c}{a}\,w\right)^2 \quad \text{(počátek } V\text{)};$$

těmito vlastnostmi jsou charakterisovány čáry bodů P na ploše tečen, pro něž $Q\,P = w = konst.$

Podobně bychom shledali, že čáry (P) určené podmínkou $Q'\,P = w' = konst$ mají za půdorysy prodloužené či zkrácené hypocykloidy o parametrech $R = c,\ r = a + c,\ g = -w'\,\sin\gamma$, a rovněž leží na paraboloidech.

Paramétr w_0 bodu Q' při vyjádření (18) je dán rovnicí

$$w_0\,\sin\gamma = -2\,a\,\cos\varphi.$$

Dělicí poměr $(Q\,Q'\,P)$ pro libovolný bod P na tečně φ má hodnotu

$$(Q\,Q'\,P) = \frac{w}{w_0 - w}\ ;$$

aby ten byl nezávislý na φ, třeba by $\frac{w}{w_0}$ byla veličina stálá, takže parametrická rovnice čáry (P), která dělí úseky $Q\,Q'$ ve stálém poměru, bude tvaru

$$w = \lambda\,\cos\varphi.$$

Z třetí rovnice (18) vychází, že na této čáře také poměr $z : w$ je stálý, a rovnice (19) podává výsledek tvaru

$$(20)\qquad x^2 + y^2 + k\,z^2 = a^2 \quad \text{(počátek } V\text{)},$$

kde k je konstanta závislá na λ. Tyto čáry leží tedy na rotačních plochách (20); jejich půdorysy jsou prodloužené neb zkrácené epicykloidy.

Buď dána plocha (20) a hledejme její průseč s plochou tečen; při libovolném w platí identita (19), a tak nám rovnice (19) a (20) dávají nejprvé

$$k\,z^2 - 2\,\frac{a+c}{a}\,w\,z + \left(\frac{a+c}{a}\,w\right)^2 = 0\ ,$$

t. j. při označení

$$(20^a)\qquad 1 \pm \sqrt{1-k} = \mu:$$

$$\frac{a+c}{a}\,w = \mu\,z\ .$$

Vložíme-li to do třetí rovnice (18), vyjde

$$(20^b) \qquad w = -\frac{\mu\, a\, tg\, \frac{\gamma}{2}}{1 + (1 - \mu)\, cos\, \gamma}\, cos\, \varphi$$

jako parametrická rovnice proniku plochy (20) s plochou tečen.

Vzhledem k dvěma hodnotám μ platí tedy věta:

„Rotační plochy 2. stupně se středem V a osou $V\,z$, jichž hlavní kruh má poloměr a, protínají plochu tečen sférické šroubovice ve dvou čarách; tyto dělí tětivy stanovené válcem (a) na tečnách ve stálém poměru a mají za půdorysy epicykloidy prodloužené či zkrácené."

Pro $\mu = 1$, kdy plocha (20) je koule, splynou obě čáry se základní křivkou Γ. Plochy (20) jsou hyperboloidy jednoploché pro k záporné, ellipsoidy vejčité pro k mezi 0 a 1; ellipsoidy sploštěné plochu tečen neprotínají.

Nárysy těchto čar jsou racionální čáry 3. stupně v případě $a = 2\,c$. V tomto případě nárysná stopa plochy tečen má parametrickou rovnici $w = -\frac{a}{\sqrt{3}}\, sec\, \varphi$; je to hyperbola (počátek souřadnic V)

$$(x + z\sqrt{3})\, x + 2\, c^2 = 0,\ y = 0,$$

a je zároveň dvojnou čarou plochy tečen. Hyperbolický válec směru $O\,y$ protíná plochu tečen ještě v racionální čáře 8. stupně, jejíž parametrická rovnice zní

$$w = -\frac{a}{\sqrt{3}}\, sec\, \varphi\, sec\, 2\, \varphi\,.$$

Ustanovíme ještě čáru, v niž přejde sférická šroubovice Γ po rozvinutí její plochy tečen v rovinu. Transformovaná rovinná čára buď G. Oblouk s na Γ měřený od bodu A má hodnotu

$$s = a\, tg\, \gamma\, (1 - cos\, \varphi) \quad (0 \leqq \varphi \leqq \pi),$$

a

$$s = a\, tg\, \gamma\, (3 + cos\, \varphi) \quad (\pi \leqq \varphi \leqq 2\,\pi);$$

zákon se mění v úvratnících. Poloměr křivosti jest $\varrho = a\, sin\, \varphi$; rozvinutím v rovinu nemění se délka oblouku ani křivost jeho, a tak má čára G stejný oblouk s a poloměr křivosti ϱ, jako měla čára Γ v příslušných bodech.

Svírá-li tečna čáry G s osou x úhel τ, máme

$$\varrho = \frac{d\, s}{d\, \tau}\,;$$

hodnoty

$$d\, s = a\, k\, sin\, \varphi\, d\, \varphi\,, \quad \varrho = a\, sin\, \varphi \quad (k = tg\, \gamma)$$

dávají dle toho

$$d\, \tau = k\, d\, \varphi,$$

tedy zvolíme-li vhodně osu úseček v rovině čáry G,

$$\tau = k\,\varphi.$$

Rovnice ta platí obecně, poněvadž změnou intervallu pro φ změní se současně znamení $d\,s$ a ϱ. Souřadnice x a y čáry G budou hověti differenciálním vztahům

$$d\,x = \cos\tau\,d\,s,\quad d\,y = \sin\tau\,d\,s,\quad d\,s = a\,k\,\sin\varphi\,d\,\varphi,$$

tedy

$$d\,x = \frac{a\,k}{2}\,[\sin(k+1)\,\varphi - \sin(k-1)\,\varphi]\,d\,\varphi,$$

$$d\,y = \frac{a\,k}{2}\,[\cos(k-1)\,\varphi - \cos(k+1)\,\varphi]\,d\,\varphi,$$

a integrace podá vyjádření čáry G ve tvaru

$$(21)\qquad \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{a\,k}{2}\left[\dfrac{\cos(k-1)\,\varphi}{k-1} - \dfrac{\cos(k+1)\,\varphi}{k+1}\right], \\ y = \dfrac{a\,k}{2}\left[\dfrac{\sin(k-1)\,\varphi}{k-1} - \dfrac{\sin(k+1)\,\varphi}{k+1}\right]; \quad k = tg\,\gamma. \end{array}\right.$$

V případě $k = 1$ ($\gamma = 45^0$) nahradí se u výrazu pro x nekonečný člen pravé strany konečnou hodnotou na př. $\frac{1}{2}$, u výrazu pro y má první člen závorky hodnotu φ. V tomto případě je rozbalená šroubovice obyčejná cykloida vznikající valením kruhu poloměru $\frac{a}{4}$ po přímce.

Pro $k > 1$ jest čára transformovaná epicykloidou

$$R = \frac{a\,k}{k^2-1} = -\frac{a}{2}\,tg\,2\,\gamma,\quad r = \frac{a\,k}{2\,(k+1)},$$

odvalené úhly na kruhu pevném $(k-1)\,\varphi$ a na kruhu hybném $2\,\varphi$.

V případě $k < 1$ je čára hypocykloida s prvky

$$R = \frac{a}{2}\,tg\,2\,\gamma,\quad r = \frac{a\,k}{2\,(k+1)},$$

a odvalenými úhly $(1-k)\,\varphi$ a $2\,\varphi$.

Epicykloida (21) jest evolutou epicykloidy s prvky základními

$$R_0 = k\,R,\quad r_0 = k\,r,$$

vzdálenost její vrcholu od úvratníku čáry G (který jest jeho střed křivosti) obnáší

$$(R_0 + 2\,r_0) - R = (k^2-1)\,R = a\,k.$$

Epicykloida (R_0, r_0) odpovídá na ploše orthogonální trajektorii tečen sférické šroubovice, a tedy je to řez plochy tečen s rovinou $z = konst.$

Na tečnu šroubovice v bodě A naneseme délku $a\,k = a\,tg\,\gamma$; výška koncového bodu nad rovinou $O\,x\,y$ obnáší $a\,k\,\cos\gamma = a\,\sin\gamma = \sqrt{a^2-c^2}$, t. j. koncový bod sestrojené délky leží v rovině $V\,x\,y$ střední epicykloidy.

Totéž platí o hypocykloidě a cykloidě; obecně se vyjadřuje výsledek větou:

„Při rozvinutí plochy tečen sférické šroubovice Γ v rovinu, kterým tato přechází v čáru G (21), transformuje se střední epicykloida v její evolventu

$$(22)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \frac{a\,k^2}{2}\left[\frac{\cos(k-1)\,\varphi}{k-1}+\frac{\cos(k+1)\,\varphi}{k+1}\right],\\ y_0 &= \frac{a\,k^2}{2}\left[\frac{\sin(k-1)\,\varphi}{k-1}+\frac{\sin(k+1)\,\varphi}{k+1}\right];\quad k=\operatorname{tg}\gamma. \end{aligned}$$

V případě $k = 1$ (cykloida) se u výrazu x_0 první člen závorky nahradí číslem $\frac{3}{2}$.

Délka oblouku na střední epicykloidě má hodnotu $a\,k^2 \sin\varphi$.

Zvolíme-li libovolnou epicykloidu v rovině se základními prvky R_0 a r_0, poskytnou její normály ohnutím roviny podél nich nakrojené rozvinutelnou plochu; při tom existuje případ, kdy tato je stejného spádu, t. j. kdy pravoúhlé trajektorie přímek jsou čáry rovinné, vespolek rovnoběžné, při čemž společná normála jejich rovin svírá s přímkami plochy stálý úhel γ určený rovnicí

$$\operatorname{tg}\gamma = k = 1 + \frac{2\,r_0}{R_0};$$

úvratnice plochy je čára, v niž transformací přešla evoluta, a je to sférická šroubovice ležící na kouli poloměru

$$a = \frac{k\,(R_0 + 2\,r_0) - R_0}{k^2}.$$

Také případ, kdy konstanta γ má hodnotu jinou než právě udanou, vede na čáry šroubové, nikoli však sférické.

Předpokládejme, že jsme vyšli z epicykloidy

$$(E_0)\qquad x_0 + i\,y_0 = (R_0 + r_0 - r_0\,e^{i\beta})\,e^{i\alpha},\quad R_0\,\alpha = r_0\,\beta,$$

jejíž normály jsou povrchové přímky rozvinutelné plochy po rozvinutí v rovinu.

Vyšiňme plochu z roviny, tak aby čára (E_0) padla zcela do roviny $O\,x\,y$, kde zaujme tvar (E); přímky její budou svírati s osou $O\,z$ úhel stálý, který značme γ. Nový tvar plochy má úvratnici Γ, na níž buď M libovolný bod, příslušný k parametru β; buď P_0 stopa povrchové přímky $M\,P_0$ na rovině $x\,y$, P pak půdorys bodu M. Je pak $P_0\,M = \varrho$ zároveň poloměr křivosti čáry (E_0) v příslušném bodě, a jeho průmět $P_0\,P$ je poloměr křivosti čáry (E), poněvadž tato protíná kolmo přímky $P_0\,M$, které jsou tečny čáry Γ, a jejich půdorysy jsou tedy normály čáry E;

průsek normály $P_0 P$ s normálou nekonečně blízkou je průmět P bodu M na úvratnici.

Máme tedy pro poloměr křivosti p čáry (E) výraz

$$p = \varrho \sin \gamma.$$

Prvek oblouku $d s = d s_0$ je společný oběma tvarům čáry (E_0) t. j. čáře (E_0) a čáře (E); dle známých vlastností epicykloid jest na E_0

$$\varrho = 4 r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0 + 2 r_0} \sin \frac{\beta}{2}, \quad d s_0 = 2 r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0} \sin \frac{\beta}{2} d \beta.$$

Značí-li nyní τ úhel, jejž svírá tečna čáry (E) s osou $O x$, bude

$$d \tau = \frac{d s}{p} = \frac{d s_0}{\varrho \sin \gamma} = G d \beta,$$

kde položeno

$$G = \frac{R_0 + 2 r_0}{2 R_0 \sin \gamma}.$$

Můžeme osy tak voliti, aby bylo $\tau = G \beta$, načež rovnice

$$d x + i d y = d s e^{i \tau}$$

charakterisující čáru (E) zní:

$$d x + i d y = 2 r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0} \sin \frac{\beta}{2} e^{i G \beta} d \beta,$$

tedy po integraci

$$x + i y = r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0} \left(\frac{e^{i \left(G - \frac{1}{2}\right) \beta}}{G - \frac{1}{2}} - \frac{e^{i \left(G + \frac{1}{2}\right) \beta}}{G + \frac{1}{2}} \right).$$

Poněvadž $G > \frac{1}{2}$, je tato čára (E), která je pravoúhlou trajektorií plochy, a zároveň její stopou $z = 0$, epicykloidou. Její evoluta, epicykloida s ní podobná, jest půdorysem čáry Γ, úvratnice plochy. Máme tedy pro šroubovou čáru Γ jako půdorys epicykloidu, a čára leží na rotačním ellipsoidu, jehož osa je v $O z$, jak to ukazuje výpočet zcela podobný začátku čl. 5. Čára Γ takto vzniklá je šroubovice bikonická.

„Nakrojíme-li rovinu podél všech normál libovolné epicykloidy, aby se stala ohebnou, a přetvoříme-li pak rovinu v plochu rozvinutelnou tím způsobem, aby původní epicykloida padla opět do určité (základní) roviny, zaujme její evoluta polohu určité šroubovice bikonické Γ. Při tom původní epicykloida přešla opět v epicykloidu, a její evoluta je průmětem čáry Γ."

Směr tečny čáry (21) je dán kosinusy $\cos k \varphi$, $\sin k \varphi$; parametrické vyjádření bodu, v nějž přejde bod plochy tečen příslušný k paramétrům φ, v (16), zní:

$$(23) \qquad X + i\,Y = \frac{a\,k}{2}\left(\frac{e^{i\,(k-1)\,\varphi}}{k-1} - \frac{e^{i\,(k+1)\,\varphi}}{k+1}\right) + v\,e^{i\,k\,\varphi}.$$

Vložíme-li sem hodnotu v pro střední epicykloidu

$$v = a\,k\,\cos\varphi,$$

vyjde bezprostředně výsledek (22).

Pro čáru (Q) máme

$$v = \frac{a-c}{\sin\gamma}\cos\varphi;$$

po transformaci bude

$$X + i\,Y = (m - n\,e^{2\,i\,\varphi})\,e^{(k-1)\,i\,\varphi},$$

$$m = \frac{a\,(1-\cos\gamma)\,(1+\sin\gamma)}{\sin 2\gamma\,(\mathrm{tg}\,\gamma - 1)},$$

$$n = \frac{a\,(1-\cos\gamma)\,(1-\sin\gamma)}{\sin 2\gamma\,(\mathrm{tg}\,\gamma + 1)}.$$

„Rozvinutím plochy tečen v rovinu přechází čára (Q) této plochy v prodlouženou neb zkrácenou epicykloidu ($\mathrm{tg}\,\gamma > 1$), vztažně hypocykloidu ($\mathrm{tg}\,\gamma < 1$).“

Parametry v a w jsou vázány vztahem

$$w - v = -\frac{a-c}{\sin\gamma}\cos\varphi;$$

odtud soudíme, že veškery čáry charakterisované vztahem $(Q\,Q'\,P) = konst.$ se transformují v kotálnice.

Na konec budiž učiněna zmínka o vytvoření sférické šroubovice Γ jako obalové čáry její oskulačních kruhů k. Sférický střed kruhu k je v bodě m, poněvadž osa křivosti čáry Γ je přímka $V\,m$; střed křivosti S leží na $V\,m$ a je pak poloměr křivosti $S\,M = \varrho = a\,\sin\varphi$, v pravoúhlém trojúhelníku $V\,S\,M$ tedy bude $V\,S = a\,\cos\varphi$ a úhel $m\,V\,M = S\,V\,M$ má hodnotu φ; rovina $m\,V\,M$ dotýká se kužele podél $m\,V$, a protíná kouli (a) v hlavním (největším) kruhu $m\,M$, který se dotýká v bodě m kruhu (c). Délka oblouku $m\,M = a\,\varphi$ je sférický poloměr kruhu k a rovná se délce $c\,\psi$ oblouku $A\,m$ na kruhu (c).

Lze tedy na dané kouli (a) s daným kruhem (c) rýsovati čáru l podobně jako se rýsuje evolventa kruhu (c) v rovině: V bodech m kruhu (c) vedeme hlavní kruhy tečné a nanášíme na ně oblouky $m\,M$ rovné délkám oblouků $A\,m$ na kruhu (c).

Těmito body M vytvořená čára jest obalovou čarou kruhů k (oskulačních), které mají sférické středy m a za sférické poloměry délky oblouků $A\,m$ na (c). — Můžeme přejíti při stálém c k limitě pro $a = \infty$, čímž čára Γ přejde v evolventu kruhu (c).

*

7. V následujících odstavcích bude hlavní pozornost věnována případu $a = 2c$; tuto sférickou čáru stupně 6., která má spád 30°, studoval Angelo Buffone,*) zejména po stránce algebraické. Úvahy naše mají však s jeho výsledky styky jen nepatrné.

Parametrické vyjádření této čáry dávají rovnice (1*) pro $a = 2c$ ve tvaru

$$(1) \qquad x + iy = \frac{c}{2}(3 - e^{2i\varphi})\, e^{i\varphi}, \quad z = c\sqrt{3}\,(1 - \cos\varphi)\ ;$$

půdorys čáry je nefroida Huygensova, kterou vytvoří bod kruhu poloměru $\frac{c}{2}$ valeného po kruhu (c) poloměru c, při čemž počáteční poloha bodu opisujícího je bod A $(x = c,\ y = z = 0)$.**) Tato racionální čára stupně 6. je základnou válce směru Oz, který vytíná čáru Γ na kouli

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + (z - c\sqrt{3})^2 = 4c^2;$$

vlastně vytíná tento válec na ní čáry dvě, vespolek souměrné vůči střední rovině $z = c\sqrt{3}$; druhá z nich se liší výrazem

$$z - c\sqrt{3} = +\, c\sqrt{3}\cos\varphi\ ,$$

a neprochází bodem A, nýbrž bodem A_1' $(x = -c,\ y = z = 0)$.

Rovnice

$$(1^0) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{2}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi) = c\,(3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi) \\ z - c\sqrt{3} &= -\,c\sqrt{3}\cos\varphi\ , \quad y = 2c\sin^3\varphi \end{aligned}$$

podávají pro nárys

$$(3) \qquad 3\sqrt{3}\,c^2 x = 2\xi^3 - 9c^2\xi\ , \quad \xi = z - c\sqrt{3},$$

který je tedy racionální čára stupně 3.

Tento válec stupně 3. určuje s koulí (2) naši čáru úplně.

Rovnice základní v obecném případě pišme ve tvaru

$$(1^1) \qquad \begin{aligned} x &= a\sin\varphi\sin\psi + c\cos\varphi\cos\psi\ , \\ y &= -\,a\sin\varphi\cos\psi + c\cos\varphi\sin\psi\ . \end{aligned}$$

Pro kužel promítající čáru Γ ze středu A máme vyjádření

$$\frac{X - c}{Z} = \frac{x - c}{z}\ , \quad \frac{Y}{Z} = \frac{y}{z}\ ;$$

jeho řez s rovinou střední $Z = \sqrt{a^2 - c^2}$ tedy bude

*) Ang. Buffone, Studio di un ellica sferica ed algebrica (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XXXIV.; 1896).

**) V tomto článku bude počátkem souřadnic — pokud jinak nebude zvlášť vytčeno — opět bod O, střed základního kruhu (c).

$$X - c = \frac{x - c}{1 - \cos\varphi}, \quad Y = \frac{y}{1 - \cos\varphi};$$

první rovnici lze psáti

$$X = \frac{x - c\cos\varphi}{1 - \cos\varphi}.$$

V obecném případě tyto rovnice

$$X = \frac{a \sin\varphi \sin\psi - c\cos\varphi(1 - \cos\psi)}{1 - \cos\varphi},$$

$$Y = \frac{-a \sin\varphi\cos\psi + c\cos\varphi \sin\psi}{1 - \cos\varphi}$$

nedávají výsledek přehledný. V případě našem $a = 2c$ však znějí

$$X = 2c(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, \quad Y = 2c(1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Centrální průmět ze středu A sf. šroubovice 30^0 spádu do roviny střední $z = c\sqrt{3}$ je tedy kardioida, úpatnice kruhu opsaného kolem středu ($x = 2c$, $y = 0$) poloměrem $2c$, vzatá pro pól ležící na Oz (střed čáry).

Nejvyšším bodem čáry je $\varphi = \pi$, druhý úvratník její A'. Promítáme-li z něho šroubovici Γ do střední roviny, obdržíme opět kardioidu

$$X = 2c(1 - \cos\varphi)\cos\varphi, \quad Y = 2c(1 - \cos\varphi)\sin\varphi,$$

která jest úpatnicí kruhu opsaného poloměrem $2c$ ze středu $(-2c, 0)$ pro pól ve středu čáry.

Kužel promítající čáru z její středu V

$$\frac{X}{Z - c\sqrt{3}} = \frac{x}{z - c\sqrt{3}}, \quad \frac{Y}{Z - c\sqrt{3}} = \frac{y}{z - c\sqrt{3}}$$

má na rovině Oxy stopu $Z = 0$

$$X = \frac{x}{\cos\varphi}, \quad Y = \frac{y}{\cos\varphi},$$

t. j. dle rovnic (1^0)

$$X = 3c - 2c\cos^2\varphi = c + 2c\sin^2\varphi,$$

$$Y = 2c\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi};$$

v polárních souřadnicích s pólem A, osou Ax, zní rovnice této čáry

$$\varrho = 2c\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = 2c\sec\varphi - 2c\cos\varphi,$$

t. j.

„ze středu V promítá se sf. šroubovice 30^0 spádu do základní roviny v cissoidu Diokletovu, jejíž úvratník jest v O, osa Ox a asymptota $x = 2c$".

Veďme dále bodem M přímku rovnoběžnou s $A\,V$ (tětivou úvratníků); rovnice její jsou

$$Y = y,\ Z = z - \sqrt{3}\,(X - x),$$

a stopa na rovině střední $Z = c\,\sqrt{3}$

$$c\,\sqrt{3} - z = -\sqrt{3}\,(X_0 - x),\ Y_0 = y$$

má souřadnice

$$X_0 = x + \frac{z - c\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\,c\,sin^2\,\varphi\,cos\,\varphi\,,$$

$$Y_0 = 2\,c\,sin^3\,\varphi\,;$$

polární rovnice této racionální čáry stupně 6. zní

$$\varrho = 2\,c\,sin^2\,\varphi,$$

a je známa pode jménem Doppeleilinie,*) kteryžto název přeložíme slovem dvojovála.

Její rovnice zní

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\,c^2\,y^4.$$

„Promítající válec sférické šroubovice 30^0 spádu rovnoběžný s tětivou úvratníků seče střední rovinu $V\,x\,y$ v dvojovále."

Tečna dvojovály je kosoúhlý průmět tečny čáry Γ, ostatně můžeme strojiti normálu planimetricky na základě polární subnormály

$$\varrho' = 2\,c\,sin\,2\,\varphi.$$

Pro poloměr křivosti podává elementární vzorec

$$R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\,\varrho'^2 - \varrho\varrho''}$$

hodnotu

$$R = \frac{2}{3}\,c\,sin\,\varphi\,\frac{(sin^2\,\varphi + 4\,cos^2\,\varphi)^{3/2}}{1 + cos^2\,\varphi}\,,$$

zejmena jest

$$\text{pro } \varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

$$\text{resp. } R = 0, \frac{13\,\sqrt{13}}{42}\,c, \frac{5\,\sqrt{5}}{9}\,c, \frac{7\sqrt{21}}{30}\,c, \frac{2}{3}\,c.$$

Pro tečnu dvojovály nalezneme snadno

$$3\,X\,sin\,2\,\varphi - (1 + 3\,cos\,2\,\varphi)\,Y = 4\,c\,sin^3\,\varphi.$$

---

*) F. Münger, Dissertace; Bern 1894. Intermédiaire des Math. 9 (1902), p. 335. H. Wieleitner, Spez. ebene Kurven (1908), str. 71. Gino Loria, Spez. eb. Kurven, str. 311 (1902).

takže křivka ta je též 6. třídy. Z rovnice čáry plyne, že má čtyřnásobný bod O a úvrat v úběžných bodech kruhových se společnou tečnou; jiných singulárních bodů čára nemá. Předpokládejme, že bod O je rovnomocným se soustavou α bodů dvojných a β bodů vratných; vyjádří-li se, že čára jest rodu 0, máme nejprvé

$$0 = \frac{5 \cdot 4}{2} - 2 - (\alpha + \beta), \text{ t. j. } \alpha + \beta = 8,$$

dále okolnost, že třída křivky je rovněž 6., dává

$$6 = 6 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - (2\alpha + 3\beta), \text{ t. j. } 2\alpha + 3\beta = 18;$$

je tedy $\alpha = 6$, $\beta = 2$:

Singularita bodu O pro dvojováhu platí za spojení šesti bodů dvojných s dvěma body vratnými.

Pro normálu dvojováhy nalezneme bezprostředně

$$(n) \qquad X(1 + 3\cos 2\varphi) + 3Y \sin 2\varphi = 8c \sin^2\varphi \cos\varphi;$$

její úsek na Oy je tedy

$$\frac{4}{3} c \sin\varphi .$$

Derivováním dle φ vychází rovnice přímky

$$(n') \qquad -X \sin 2\varphi + Y \cos 2\varphi = \frac{4}{3} c \sin\varphi (3\cos^2\varphi - 1),$$

na níž leží střed křivosti; jeho souřadnice se vypočtou z těchto rovnic a jsou

$$x = -c\cos\varphi \frac{\sin^2 2\varphi}{1 + \cos^2\varphi}, \quad y = \frac{4}{3} c \sin\varphi \frac{1 + 3\cos^4\varphi}{1 + \cos^2\varphi},$$

takže evoluta je 6. třídy a 10. stupně.

Pravou stranu rovnice (n') lze psáti

$$\frac{2}{3} c \sin\varphi (3\cos 2\varphi + 1),$$

a je zřejmo, že přímka (n') obsahuje bod

$$(N) \qquad X = -\frac{1}{3} c \sec\varphi, \quad Y = 2c \sin\varphi,$$

mimo to prochází bodem

$$X = -2c\cos\varphi, \quad Y = -\frac{4}{3} c \sin\varphi \cdot \sec 2\varphi,$$

a má směr 2φ. Těmito vlastnostmi je přímka (n') konstruktivně určena a tím získána konstrukce středu křivosti.

Týž leží také na přímce

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \frac{2}{3} \frac{\varrho}{1 + \cos^2 \varphi} .$$

V obr. 2. znázorněna polovice nefroidy Γ_1 vznikající na základě kruhu poloměru $O A = c$. Její konstrukce se zjednoduší takto: Na kruhu (c) zvolíme bod μ_1 příslušný k úhlu $X O \mu_1 = \varphi$ (na přímce $O \varphi$) a bod m příslušný k úhlu $\psi = 2 \varphi$. Z bodu μ_1 spustíme kolmici $\mu_1 S_1$ na $O m$ a prodloužíme ji na opačnou stranu do M_1: $\mu_1 M_1 = S_1 \mu_1$. Důkaz toho vyplývá z obecné konstrukce pro libovolnou sf. šroubovici.

Dle té vedeme délku $m O m' = a$, načež opíšeme poloměrem a oblouk $m \overline{M}$ se středem m', na nějž naneseme délku arc. $m \overline{M}$ = arc. $m A$. V našem případě $a = 2 c$ padne m' do druhého konce průměru $m m'$, úhel $m m' \overline{M} = \varphi$ a bude tedy $m' \overline{M} \parallel O \mu_1$, takže přímka $m' \overline{M}$ obsahuje bod A.

Přímka $\overline{M} m$ protíná kruh (c) v bodě μ, který zde značen μ_1, a je pak půdorys M_1 bodu M čáry Γ na přímce $\mu_1 S_1 \perp O m$, a na přímce: $\overline{M} M_1 \parallel O m$.

Z konstrukce plyne $m \mu_1 = \mu_1 \overline{M}$ (na základě podobnosti trojúhelníků $m O \mu_1$ a $m m' \overline{M}$), je tedy též očividně $S_1 \mu_1 = \mu_1 M_1$; tím naše konstrukce dokázána. Přímka $M_1 \mu_1 S_1$ je normála průmětu Γ_1, střed křivosti σ je střed délky $S_1 \mu_1$ (dle obecné věty o středu křivosti epicykloidy a hypocykloidy dělí totiž σ tětivu v poměru 1 : 3).

Bod S_1 je půdorys středu křivosti, $S_1 M_1$ poloměr křivosti prostorové čáry Γ jako v obrazci původním.

Pro nárys M_2 třeba znáti výšku, jež v našem případě jest

$$z = 2 M_1 \overline{M} \sin \gamma = 2 \overline{m S_1} . \sin \gamma ;$$

naneseme na $A V_2$ délku $A \mu_2 = 2 \overline{m S_1}$, načež bude $\mu_2 M_2 \parallel O X$.

Víme, že plocha hlavních normál protíná válec $x^2 + y^2 = c^2$ ve dvou čarách, z nichž jedna jest ellipsa (P) na rovině $z + x \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{a^2 - c^2}$, t. j.

$$z + x \sqrt{3} = c \sqrt{3}.$$

Tato rovina prochází tětivou úvratníků $A V A'$ a je kolmá na $O x z$. Její nárysná stopa je tedy přímka $A V_2$. Bod ellipsy (P) na hlavní normále $M S$ znamenali jsme μ; jeho půdorys je totiž právě uvažovaný bod μ_1 a nárys je bod μ_2 na $A V_2$. Obdržíme tedy také konstrukci bodu M_2 na základě konstrukce bodu μ ellipsy (P).

Můžeme též vyjíti z bodu μ_2; určíme příslušný půdorys μ_1 na kruhu (c), načež se další část doplní jako výše.

Povrchová přímka $A' M$ kužele (A', Γ) protíná rovinu $V x y$ v bodě M'; jeho půdorys M_1' leží na průvodiči $O \varphi$ t. j. na $O \mu_1$ (podobně obsahuje tato přímka také bod dvojovály). Kardioida, kterou tento bod M_1' opisuje, je jak známo také konchoida kruhu opsaného poloměrem c kolem středu A_1', takže bude stále $m'' M_1' = 2 c$.

Bod cissoidy — v obrazci nekreslený — leží na paprsku $m'A \equiv A\ \varphi$.

Na přímce $O\ \mu_1$ leží také půdorys bodu Q, v němž tečna čáry Γ seče válec $x^2 + y^2 = a^2$. Body tyto tvoří ellipsu, již na válci tom vytíná rovina kolmá na $O\ x\ z$

$$z + \frac{x}{\sqrt{3}} = c\sqrt{3}; \tag{$\mathfrak{E}$}$$

nárysná stopa $\mathfrak{E}^{II}$ této roviny spojuje bod V_2 s bodem $x = 3\ c$ na $O\ x$.

*

8. V případě sférické šroubovice $a = 3\ c$ máme vyjádření

$$\begin{cases} x + i\ y = c\ (2\ e^{2\ i\ \varphi} - e^{4\ i\ \varphi}),\ \psi = 3\ \varphi, \\ z = \sqrt{8}\ c\ (1 - \cos\varphi). \end{cases} \tag{4}$$

Body $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\ \pi}{2}$ splývají ve dvojný bod čáry $(-3\ c, 0, c\sqrt{8})$.

Půdorys je kardioida s úvratníkem $A\ (c, 0, 0)$, střed V má souřadnice $(0, 0, c\sqrt{8})$; čára Γ je stupně 8. a tvoří úplnou průseč koule s válcem kardioidy; má dva body úvratní na ose $A\ z$, příslušné k úhlům $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ $(z = 0$ a $z = 4\ c\sqrt{2})$.

Rovnice centrálního průmětu ze středu A do roviny $V\ x\ y$, které v obecném případě zněly (čl. 7.)

$$x = \frac{a\ \sin\varphi\ \sin\psi - c\ \cos\varphi\ (1 - \cos\psi)}{1 - \cos\varphi},$$

$$y = \frac{-\ a\ \sin\varphi\ \cos\psi + c\ \cos\varphi\ \sin\psi}{1 - \cos\varphi},$$

budou v našem případě $a = 3\ c$, spojeny v imaginární vazbu,

$$\frac{x + i\ y}{c} = \frac{(\cos\varphi - 3\ i\ \sin\varphi)\ e^{3\ i\ \varphi} - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi};$$

klade-li se $e^{i\ \varphi} = u$, zní to

$$\frac{x + i\ y}{c} = \frac{2\ u^5 - 4\ u^3 + u^2 + 1}{(u - 1)^2} = 2\ u^3 + 4\ u^2 + 2\ u + 1,$$

čili

$$x - c + i\ y = 4\ c\ (1 + \cos\varphi)\ e^{2\ i\ \varphi}. \tag{5}$$

Polární souřadnice uvažovaného průmětu (pól A_0 na $A\ z$, osa $A_0\ x$) jsou tedy

$$\varrho = 4\ c\ (1 + \cos\varphi),\ \omega = 2\ \varphi; \tag{5*}$$

polární rovnice

$$\varrho = 4\ c\left(1 + \cos\frac{\omega}{2}\right)$$

ukazuje, že čára je konchoidou růžice.

Průmět do téže (střední) roviny ze středu ležícího ve druhém bodě vratním $\varphi = \pi$ má rovnici v téže soustavě souřadnic polárních

$$\varrho = 4\,c\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right);$$

obě čáry splývají, neboť rovnice přecházejí jedna v druhou záměnou ω za $\omega + 2\,\pi$.

Průměty bodů čáry Γ z obou úvratníků do roviny střední $V\,x\,y$ padají tedy na různé větve téže čáry.

Znamenáme-li na okamžik $4\,c = b$, máme nejprvé

$$(\varrho - b)^2 = b^2 \cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{b^2}{2}(1 + \cos\omega)$$

$$\varrho^2 - 2\,b\,\varrho + \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2}\cos\omega.$$

V pravoúhlých souřadnicích (počátek A_0 na $A\,z$, osy směru $O\,x$, $O\,y$) bude $\varrho\cos\omega = x$, tedy

$$\left(\varrho^2 + \frac{b^2}{2}\right)\varrho = 2\,b\,\varrho^2 + \frac{b^2}{2}x, \quad \varrho^2 = x^2 + y^2$$

a odtud rovnice v pravoúhlých souřadnicích

$$(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2 + 8\,c^2)^2 = 64\,c^2\,(x^2 + y^2 + c\,x)^2.$$

Proveďme inversi vůči kruhu pomyslného poloměru

$$x = \frac{-8\,c^2}{x_0^2 + y_0^2}\,x_0, \quad y = \frac{-8\,c^2}{x_0^2 + y_0^2}\,y_0;$$

transformovaná čára bude stupně 4.

$$(x_0^2 + y_0^2 + 8\,c^2)^2 = (x_0^2 + y_0^2)\,(x_0 - 8\,c)^2,$$

v polárních souřadnicích

$$\varrho_0 = \frac{-2\,c}{1 - \cos\frac{\omega}{2}} = -\,c\,\operatorname{cosec}^2\frac{\omega}{4}.$$

Realný dvojný bod ($\omega = \pi$, $3\,\pi$) $x = 2\,c$, $y = 0$, pomyslné dvojné body z rovnic

$$x_0 - 8\,c = 0, \quad x_0^2 + y_0^2 + 8\,c^2 = 0.$$

Pro normálu čáry (5) nalezneme rovnici (počátek na $O\,z$)

$$(X - c)\,(\sin\varphi + 4\sin 2\,\varphi + 3\sin 3\,\varphi) - Y\,(\cos\varphi + 4\cos 2\,\varphi + 3\cos 3\,\varphi) =$$

$$= 8\,c\,(1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Zavedením parametru $u = e^{i\varphi}$ bychom shledali, že evoluta je 5. třídy.

Střed křivosti čáry (5) leží na přímce

$$(\mathfrak{N}) \qquad (X - c)\,(\cos\varphi + 8\cos 2\varphi + 9\cos 3\varphi)$$
$$+ Y\,(\sin\varphi + 8\sin 2\varphi + 9\sin 3\varphi) = 8c\,(\cos\varphi + \cos 2\varphi)\,;$$

pro tu určíme bod P_0:

$$X_0 - c = t_0 \sin 2\varphi,\quad Y_0 = -t_0 \cos 2\varphi$$

$\left(\text{průvodič } A P_0 \text{ svírá s osou } A x \text{ úhel } 2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, kde

$$t_0 = -c\,\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi}\,.$$

Dále obsahuje táž přímka bod

$$X_1 = t_1 \sin 2\varphi\,,\quad Y_1 = -t_1 \cos 2\varphi\,,\quad t_1 = -c\,\frac{(8 + 9\cos\varphi)\cos 2\varphi}{4\sin\varphi}\,.$$

Ještě určíme průmět čáry (4) z její dvojného bodu do základny; rovnice promítající přímky jsou

$$\frac{X + 3c}{Z - c\sqrt{8}} = \frac{x + 3c}{-\sqrt{8}\,c\cos\varphi}\,,\quad \frac{Y}{Z - c\sqrt{8}} = \frac{y}{-\sqrt{8}\,c\cos\varphi}\,,$$

kde dle (4)

$$x = 2c\cos 2\varphi - c\cos 4\varphi,\quad y = 2c\sin 2\varphi - c\sin 4\varphi.$$

Stopa promítající přímky na rovině $O x y$, t. j. $Z = 0$ je dána tedy rovnicemi

$$X + 3c = \frac{x + 3c}{\cos\varphi} = 4c\cos\varphi\,(1 + 2\sin^2\varphi)\,,$$

$$Y = 4c\sin\varphi\,(1 - \cos 2\varphi)\,,$$

čili

$$(6) \qquad X + 3c = 6c\cos\varphi - 2c\cos 3\varphi\,,\quad Y = 6c\sin\varphi - 2c\sin 3\varphi\,;$$

tyto rovnice dávají průmět čáry Γ ($a = 3c$) z její dvojného bodu $(-3c,\ 0,\ c\sqrt{8})$ do roviny $O x y$. Průmětem tím je nefroida vytvořená kotálením kruhu poloměru $2c$ po pevném kruhu poloměru $4c$, jeho střed $(-3c, 0)$ leží v půdoryse dvojného bodu čáry.

*

9. Přeložme počátek souřadnic opět do bodu V; rovnice hlavní normály v parametrech φ a v zněly (3*) str. 19.

$$x = c\cos(\psi - \varphi) - v\sin\psi\,,$$
$$(n) \qquad y = c\sin(\psi - \varphi) + v\cos\psi\,,$$
$$z = -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi\,;\ a\varphi = c\psi\,.$$

Vyjadřme podmínku, aby tato normála protínala danou přímku

$$(p) \qquad x = mz + p,\quad y = nz + q\,.$$

Vložíme-li do těchto rovnic hodnoty z rovnic (n), obdržíme dvé rovnic mezi proměnnými φ a v; vyloučením v vychází

$$\begin{vmatrix} c\cos(\psi-\varphi)+m\sqrt{a^2-c^2}\cos\varphi-p, & -\sin\psi \\ c\sin(\psi-\varphi)+n\sqrt{a^2-c^2}\cos\varphi-q, & \cos\psi \end{vmatrix}=0$$

čili po rozvedení determinantu

$$(1)\qquad \begin{aligned} &c\cos\varphi+(m\cos\psi+n\sin\psi)\sqrt{a^2-c^2}\cos\varphi \\ &\quad -p\cos\psi-q\sin\psi=0\,; \end{aligned}$$

tato rovnice určuje polohu bodů na šroubové čáře Γ, jichž hlavní normály protínají přímku (p), a slouží tedy k stanovení průseků přímky té s plochou hlavních normál.

V případě sférické šroubovice 30^0 spádu $(a=2c)$ se po zavedení parametru $u=e^{i\varphi}$ přepíše tato rovnice na

$$\begin{aligned} &2cu^2(u^2+1)+c\sqrt{3}\,(u^2+1)[(m-ni)u^4+(m+ni)] \\ &\quad -2u[(p-qi)u^4+(p+qi)]=0 \end{aligned}$$

čili po seřazení dle mocnin u,

$$(2)\quad \begin{aligned} &c\sqrt{3}\,(m-ni)u^6-2(p-qi)u^5+c[2+(m-ni)\sqrt{3}]u^4+ \\ &+c[2+(m+ni)\sqrt{3}]u^2-2(p+iq)u+c(m+ni)\sqrt{3}=0. \end{aligned}$$

Značíme-li $u_1u_2\ldots u_6$ kořeny této rovnice a literami $\mathfrak{f}_1=\Sigma u_\nu$, $\mathfrak{f}_2=\Sigma u_\mu u_\nu$, ... jich základní úkony souměrné, obdržíme z rovnice (2) především

$$(3)\qquad \mathfrak{f}_3=0,\ \mathfrak{f}_4-\mathfrak{f}_6=\mathfrak{f}_2-1.$$

Tyto dvě rovnice mezi parametry $u_1\ldots u_6$ vyjadřují podmínku, aby hlavní normály šesti bodů u_ν měly společnou sečnu. Čtyři z těchto normál možno voliti dle libosti, a budou míti určitou společnou sečnu; rovnice (3) pak vyjadřují, že tato protíná také normály zbývajících dvou bodů, a slouží k stanovení těchto dvou bodů jako společného páru dvou involucí.

Obecně sice mají čtyři přímky společné sečny dvě; z těch v našem případě hlavních normál čáry Γ jedna splývá s úběžnou přímkou roviny xy, a zbývá jen jedna skutečná sečna společná pro čtyři hlavní normály.

Pro tři dané hlavní normály existuje ∞^1 přímek je protínajících (tvoří paraboloid hyperbolický) a každá z těchto společných sečen protíná ještě tři hlavní normály. Takovým způsobem vzniká na ploše hlavních normál kubická involuce přímek.

Je-li jedna z povrchových přímek plochy hlavních normál její přímka dvojná Vy $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\text{ a }\varphi=\frac{3\pi}{2}\right.$ čili $\left.u=\pm i\right)$, odpovídá její průsek s přímkou p dvěma parametrům $u=i$ a $u=-i$, a zbývají jen 4 hlavní normály, jež přímku mohou protínati. U zbývajících parametrů $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$ máme symetrické úkony základní $\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2\,\mathfrak{g}_3\,\mathfrak{g}_4$, a bude

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{g}_4 + (i - i)\,\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_2$$
$$\mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4,\ \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + 1,$$

takže druhá z rovnic (3) jest identicky splněna, a zbývá pro čtveřinu $u_1 \ldots u_4$ podmínka jediná $\mathfrak{f}_3 = 0$, t. j.

$$\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1 = 0 \tag{4}$$

čili

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = 0.$$

„Hlavní normály ve 4. bodech hovících podmínce (4) mají společnou sečnu, která protíná též přímku dvojnou V_y plochy hl. normál.“

Vraťme se k přímce (p); její průseky s plochou hl. normál hoví rovnici (2). Znamenáme-li

$$A = c\,(m - n\,i)\,\sqrt{3},\ B = c\,(m + n\,i)\,\sqrt{3},$$

podává rovnice (2)

$$A\,\mathfrak{f}_1 = 2\,(p - i\,q),\quad A\,\mathfrak{f}_5 = 2\,(p + i\,q),$$
$$A\,\mathfrak{f}_2 = A + 2\,c,\ A\,\mathfrak{f}_4 = B + 2\,c,\ A\,\mathfrak{f}_6 = B,$$

a odtud vychází

$$A = \frac{2\,c}{\mathfrak{f}_2 - 1},\ B = \frac{2\,c\,\mathfrak{f}_6}{\mathfrak{f}_2 - 1},\ m - n\,i = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\mathfrak{f}_2 - 1},$$

$$m + n\,i = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathfrak{f}_6}{\mathfrak{f}_2 - 1},\ p - i\,q = \frac{c\,\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2 - 1},\ p + i\,q = \frac{c\,\mathfrak{f}_5}{\mathfrak{f}_2 - 1},$$

a rovnice přímky (p) bude lze psáti

$$\left|\begin{array}{l} x + i\,y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\mathfrak{f}_6}{\mathfrak{f}_2 - 1}\,z + \dfrac{c\,\mathfrak{f}_5}{\mathfrak{f}_2 - 1}, \\ x - i\,y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1}{\mathfrak{f}_2 - 1}\,z + \dfrac{c\,\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2 - 1}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Tyto rovnice určují přímku protínající šest hlavních normál čáry Γ, které hoví podmínkám (3).

Společná sečna hl. normál čtveřiny (4) má tedy zvláště rovnice

$$\left|\begin{array}{l} x + i\,y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\mathfrak{g}_4}{\mathfrak{g}_2}\,z + c\,\dfrac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_2}, \\ x - i\,y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1}{\mathfrak{g}_2}\,z + c\,\dfrac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2}; \end{array}\right. \tag{4a}$$

přímka ta leží skutečně na rovině — ježto $\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1 = 0$ —

$$x = \frac{\mathfrak{g}_4 + 1}{\mathfrak{g}_2\sqrt{3}}\,z,$$

která obsahuje dvojnou přímku V_y plochy hl. normál.

Na ploše hlavních normál naší čáry Γ ($a = 2\,c$) přísluší libovolné přímce (u) oskulační paraboloid; můžeme určiti jeho povrchovou přímku druhé soustavy, která protíná přímku dvojnou $V\,y$. Dáme totiž splynouti hodnotám $u_1\,u_2\,u_3$ ve společnou hodnotu u; společné sečny tří přímek tak přejdou v povrchové přímky oskulačního paraboloidu, a ta z nich, která protíná přímku $V\,y$, hoví podmínce (4), přísluší-li k parametru $u_0 = u_4$.

Rovnice (4) podává

$$u_0 = -\frac{u^3 + 3\,u}{3\,u^2 + 1}\,,$$

načež se symetrické funkce vypočtou takto:

$$\mathfrak{g}_1 = 3\,u + u_0 = \frac{8\,u^3}{3\,u^2 + 1}\,,$$

$$\mathfrak{g}_2 = 3\,u^2 + 3\,u_0\,u = \frac{6\,u^2\,(u^2 - 1)}{3\,u^2 + 1}\,,$$

$$\mathfrak{g}_3 = (3\,u_0 + u)\,u^2 = -\frac{8\,u^3}{3\,u^2 + 1}\,,$$

$$\mathfrak{g}_4 = -u^4\,\frac{u^2 + 3}{3\,u^2 + 1}\,;$$

$$\frac{\mathfrak{g}_4}{\mathfrak{g}_2} = -\frac{u^2\,(u^2 + 3)}{6\,(u^2 - 1)}\,,\quad \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_2} = -\frac{4\,u}{3\,(u^2 - 1)}\,,\quad \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2} = \frac{4\,u}{3\,(u^2 - 1)}\,.$$

Povrchová přímka druhé soustavy na oskulačním paraboloidu, která protíná přímku $V\,y$, má tedy rovnice

$$x + i\,y = -\frac{u^4\,(u^2 + 3)}{3\sqrt{3}\,u^2\,(u^2 - 1)}\,z - \frac{4\,c\,u}{3\,(u^2 - 1)}\,,$$

$$x - i\,y = \frac{3\,u^2 + 1}{3\sqrt{3}\,u^2\,(u^2 - 1)}\,z + \frac{4\,c\,u}{3\,(u^2 - 1)}\,,$$

čili v realném tvaru

$$(q)\qquad \left|\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sin 3\,\varphi + 3\sin\varphi}{6\sqrt{3}\sin\varphi}\,z, \\[2ex] y = \dfrac{\cos 3\,\varphi + 3\cos\varphi}{6\sqrt{3}\sin\varphi}\,z + \dfrac{2\,c}{3\sin\varphi}\,. \end{array}\right.$$

Tyto přímky q, které leží na různých oskulačních paraboloidech plochy hlavních normál naší čáry Γ ($a = 2\,c$) a protínají přímku $V\,y$, tvoří sborcenou plochu (q).

Nárysná stopa přímky q

$$z = -\frac{c\sqrt{3}}{\cos^3\varphi}\,,\quad x = c\,\frac{1 + 2\cos^2\varphi}{3\cos^3\varphi}\,,\quad y = 0$$

opisuje racionální čáru 3. stupně, která je dvojnou čarou plochy (q).

Směrný kužel plochy (q) vedený z vrcholu V obsahuje křivku

$$x = \frac{c}{2}(3 \sin \varphi + \sin 3\varphi),$$

$$y = -\frac{c}{2}(3 \cos \varphi + \cos 3\varphi),$$

$$z = -3\sqrt{3}\, c \sin \varphi,$$

která je šroubovou na válci směru $V z$, ana její tečna má cosinusy směrné

$$\frac{1}{2}\cos 2\varphi,\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi,\ -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

a leží na rotačním ellipsoidu (počátek souřadnic V)

$$\frac{x^2 + y^2}{4c^2} + \frac{z^2}{36c^2} = 1;$$

čára tato je šroubovice bikonická. Pro sborcenou plochu (q) známe tři řídící čáry, t. j. přímku $V y$, dvojnou čáru kubickou v nárysně, a úběžnou čáru na kuželi, kterým se z vrcholu V promítá šroubovice bikonická.

Půdorys této šroubovice splývá s půdorysem čáry Γ, pouze význam parametrů je jiný; půdorysem bodu šroubovice bikonické je půdorys bodu $\varphi - \frac{\pi}{2}$ na čáře Γ.

Vraťme se k rovnici (2) pro případ, že přímka p je směru $O z$, tedy $m = n = 0$. Tu odpadnou dva kořeny $u = 0$ a $u = \infty$ a zbývá rovnice stupně 4.

$$(p - i q)\, u^4 - c\,(u^3 + u) + p + i q = 0.$$

„Čtveřiny hlavních normál, jichž společná sečna je kolmá na rovinu základní, odpovídají parametrům hovícím podmínkám

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_2 = 0.“$$

Společná sečna má rovnice

$$x = c\,\frac{\mathfrak{g}_4 + 1}{2\,\mathfrak{g}_1},\quad y = c\,\frac{\mathfrak{g}_4 - 1}{2\,i\,\mathfrak{g}_1}.$$

Z podmínky $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$ plyne, že tyto veličiny jsou rovny svým sdruženým, a tedy jsou realné, předpokládaje realnou čtveřinu.

Má-li společná sečna šesti hlavních normál procházeti bodem V, musí $p = q = 0$, a rovnice (2) přejde v kubickou o neznámé u^2, normály se kupí v páry $(\varphi, \varphi + \pi)$, t. j. jsou po dvou rovnoběžny.

Znamenáme-li parametry tří normál $u_1\, u_2\, u_3$, budou normály v bodech $-u_1$, $-u_2$, $-u_3$ s prvními rovnoběžny; jest identicky $\mathfrak{f}_3 = 0$, a zbývá jen splniti druhou podmínku (3), načež normály mají společnou sečnu.

Znamenejme souměrné úkony prvků $u_1\, u_2\, u_3$ literami $\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2\, \mathfrak{g}_3$, prvky opačné mají souměrné úkony $-\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $-\mathfrak{g}_3$. Je pak

$$\mathfrak{f}_4 = -2\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_2^2,\ \mathfrak{f}_6 = -\mathfrak{g}_3^2,\ \mathfrak{f}_2 = 2\,\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1^2,$$

a podmínky (3) přecházejí v rovnici

$$g_2^2 - 2\,g_1\,g_3 + g_3^2 = 2\,g_2 - g_1^2 - 1$$

čili

$$(g_1 - g_3)^2 + (1 - g_2^2) = 0.$$

Rovnici tu lze psáti

$$(1 + u_1^2)\,(1 + u_2^2)\,(1 + u_3^2) = 0,$$

a je splněna jen pro $u_r^2 + 1 = 0$. Klademe-li $u_3^2 + 1 = 0$, určují hlavní normály bodů u_1, u_2 s přímkou (u_3) $V\,y$ paraboloid, na němž leží $V\,y$ a tedy také bod V, a druhá jeho povrchová přímka bodem V procházející řeší problém.

Předpokládejme, že se přímka (p) dotýká plochy hlavních normá ve třech bodech; bude $u_4 = u_1$, $u_5 = u_2$, $u_6 = u_3$; znamenáme-li souměrné úkony prvků $u_1\,u_2\,u_3$ literami g, obdržíme

$$f_1 = 2\,g_1,\ f_2 = g_1^2 + 2\,g_2,\ f_3 = 2\,g_3 + 2\,g_1\,g_2,\ f_4 = 2\,g_1\,g_3 + g_2^2,$$
$$f_5 = 2\,g_2\,g_3,\ f_6 = g_3^2,$$

načež rovnice (3) dávají

$$g_3 + g_1\,g_2 = 0,\ g_2^2 + 2\,g_1\,g_3 - g_3^2 = g^2 + 2\,g_2 - 1;$$

druhá se přepíše na základě první na tvar

$$(g_2 - 1)^2 = g_1^2\,(g_2 + 1)^2.$$

Máme tedy jen jednu neodvisle proměnnou g_2, načež

$$g_1 = \pm\frac{g_2 - 1}{g_2 + 1},\ g_3 = -\,g_1\,g_2.$$

Vložením hodnot, jež odtud vycházejí pro veličiny f_r, do rovnic (5), obdržíme součinitele v rovnicích přímky jako racionální funkce parametru g_2, stupně čtvrtého; a sice obdržíme tak dvě řady přímek trojnásob tečných, vzhledem k dvojímu znamení při g_1.

*

10. V případě $a = 3\,c$ má hlavní normála rovnice (počátek V)

$$(n) \qquad x\cos 3\varphi + y\sin 3\varphi = c\cos\varphi,\ z = -\,c\sqrt{8}\cos\varphi;$$

pro eliminaci φ máme

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,\ \sin 3\varphi = (4\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi$$

a rovnice plochy hlavních normál bude

$$x\,z\,(z^2 - 6\,c^2) - y\,(z^2 - 2\,c^2)\sqrt{8\,c^2 - z^2} = 2\,c^3 z.$$

Normály dvojného bodu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ splývají ve dvojnou přímku $V x$ $(y = 0,\ z = 0)$; dále jsou dvojnými přímkami hlavní normály bodů $\varphi = \frac{\pi}{3}$ a $\varphi = \frac{5\pi}{3}$

$$x = -\frac{c}{2},\ z = -c\sqrt{2},$$

rovněž normály

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ a } \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$x = -\frac{c}{2},\ z = c\sqrt{2}.$$

Z rovnice plochy soudíme dále, že křivka 3. stupně

$$y = 0,\ x(z^2 - 6c^2) = 2c^3$$

(nárysná stopa plochy) je dvojnou čarou této plochy 8. stupně.

Rovina $x = -\frac{c}{2}$ obsahuje dvě dvojné přímky a seče plochu normál ještě v čáře stupně 4.; z rovnice se tu skutečně odštěpí faktor $z^2 - 2c^2$ a zbývá

$$\frac{c}{2} z + y\sqrt{8c^2 - z^2} = 0,$$

rovnice čáry stupně 4.

Rovina $x = c$ seče plochu ve dvou přímkách $z = \pm c\sqrt{8}$ (které jsou rovnoběžny s Oy, vycházejí z úvratníků čáry Γ, a přísluší hodnotám $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ jako hl. normály) a mimo to v čáře stupně 6.

$$cz\sqrt{8c^2 - z^2} + y(z^2 - 2c^2) = 0.$$

Hlavní normály v bodech $\varphi = \varphi_0 + \frac{\nu\pi}{3}$ $(\nu = 0, 1, \ldots 5)$ jsou vespolek rovnoběžny, takže povrchové přímky plochy se řadí do skupin po šesti rovnoběžkách, vždy po třech ve společné rovině normální čáry Γ.

Pro průseky plochy normál s danou přímkou

$$x = mz + p,\ y = nz + q$$

máme dle (1) čl. 9

$$c\cos\varphi + (m\cos 3\varphi + n\sin 3\varphi)\, c\sqrt{8}\cos\varphi - p\cos 3\varphi - q\sin 3\varphi = 0,$$

čili pomocí parametru $u = e^{i\varphi}$:

$$c\sqrt{2}(m - in)u^8 - (p - iq)u^7 + c\sqrt{2}(m - in)u^6 + cu^5 +$$
$$+ cu^3 + c\sqrt{2}(m + in)u^2 - (p + iq)u + c\sqrt{2}(m + in) = 0.$$

Souměrné úkony kořenů jsou tedy vázány vztahy

$$f_2 = 1,\ f_3 = f_5,\ f_4 = 0,\ f_6 = f_8.$$

Ty vyjadřují podmínku, aby osm hlavních normál čáry Γ ($a = 3c$) mělo společnou sečnu.

Uvažujme zvláště přímky v rovině $x = -\frac{c}{2}$; ty protínají přímky dvojné příslušné k úhlům φ

$$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

a příslušné parametry u hoví rovnici

$$u^4 + u^2 + 1 = 0.$$

Zbývajících čtvero průseků plochy s přímkou přísluší parametrům $u_1 u_2 u_3 u_4$, jichž souměrné úkony znamenejme $\mathfrak{g}_\nu$. Bude pak

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + 1, \ \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1, \ \mathfrak{f}_4 = \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_2 + 1,$$
$$\mathfrak{f}_5 = \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1, \ \mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_2, \ \mathfrak{f}_8 = \mathfrak{g}_4;$$

hořejší podmínky se redukují na dvě

$$\mathfrak{g}_2 = 0, \ \mathfrak{g}_4 = -1.$$

Takovéto čtveřiny snadno se geometricky realisují: Z libovolného bodu spustíme čtvero normál na ellipsu

$$x = \mathfrak{a} \cos \varphi, \ y = \mathfrak{b} \sin \varphi, \ (\mathfrak{a} > \mathfrak{b});$$

jich paty přísluší parametrům φ_ν, pro něž veličiny $u_\nu = e^{i\varphi}$ hoví rovnicím $\mathfrak{g}_2 = 0, \ \mathfrak{g}_4 = -1$.

Body příslušné témuž $\psi \equiv 3\varphi \mod 2\pi$, t. j. body $\varphi + \frac{2\nu\pi}{3}$ ($\nu = 0, 1, 2$), leží na téže rovině, která se dotýká kužele (V, c) podél přímky Vm; je to společná rovina normální $\mathfrak{N}$ našich bodů, které znamenejme M, M_1, M_2. Tyto body leží na kruhu poloměru a a středu V, v němž rovina $\mathfrak{N}$ seče kouli, na které se čára Γ nachází. Bod V je tedy středem kruhu opsaného o trojúhelník $M M_1 M_2$.

Z rovnic pro souřadnice bodu M (počátek V)

$$x = 2c \cos 2\varphi - c \cos 4\varphi$$
$$y = 2c \sin 2\varphi - c \sin 4\varphi$$
$$z = -c\sqrt{8} \cos \varphi$$

vychází však

$$x + x_1 + x_2 = 0, \ldots$$

takže V je těžiště trojúhelníka našeho. Tento je tedy rovnostranný.

„Na sférické šroubovici $a = 3c$ tvoří body φ, $\varphi + 120^0$, $\varphi = 240^0$ rovnostranný trojúhelník vepsaný kruhu poloměru a; střed trojúhelníka je bod V, jeho rovina je tečnou rovinou kužele (V, c) a společnou normální rovinou ve vrcholech; hlavní normály v těchto bodech jsou vespolek rovnoběžny.“

XXXIII.

Trojúhelník příslušný k úhlu $\varphi + \pi$ má s tímto společný půdorys a hlavní normály čáry Γ v jeho vrcholech jsou s předešlými rovnoběžny; roviny obou trojúhelníků protínají se v přímce $V H$ rovnoběžné s tečnami základního kruhu (c) v bodech m a m', příslušných k úhlům $\psi = 3\varphi$ a $\psi' = 3(\varphi + \pi)$.

Znamenejme M' bod čáry Γ příslušný k úhlu $\varphi' = \varphi + \frac{2\pi}{3}$, bod M příslušný k úhlu φ; v rovině normální jim společné, která se dotýká kužele základního podél přímky $m V$, máme kruh $m M M'$ se středem V; volme v ní osy souřadnic pravoúhlých $V m \equiv V\xi$, $V H \equiv V\eta$, poslední tak, aby úhel $m V H = \frac{\pi}{2}$ byl měřen ve směru kladných φ. V této rovině přímka $M M'$ je kolmá na směr $\varphi + 60^0$ a má rovnici

$$\xi \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \eta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} = \frac{3c}{2},$$

poněvadž vzdálenost její je vzdálenost strany vepsaného trojúhelníka od středu kruhu. Přímka $M M'$ je strana tohoto trojúhelníka a její průsek H s přímkou $V H$ $(\xi = 0)$ jest její průsek s příslušnou stranou druhého trojúhelníka rovnostranného v rovině určené stranou kužele $m' V$. Poloha bodu H tedy je určena vzdáleností

$$V H = \eta = \frac{3c}{2 \sin(\varphi + 60^0)};$$

mimo to má vektor $V H$ směr $\psi - \frac{\pi}{2} = 3\varphi - \frac{\pi}{2}$, tedy souřadnice bodu H jsou

$$x = V H \,.\, \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3c}{2} \frac{\sin 3\varphi}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)},$$

$$y = V H \,.\, \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3c}{2} \frac{\cos 3\varphi}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)};$$

geometrické místo bodu H je tedy zvláštní čára t. zv. klasová (épis, Ährenkurve)*) v rovině $V x y$

$$x + i y = \frac{3c}{2} i \frac{e^{i\omega}}{\sin\frac{\omega}{3}}, \quad \omega = 3\varphi + \pi.$$

Tuto čáru tedy vyplní průseky stran pravidelných trojúhelníků jichž roviny se dotýkají základního kužele v stranách diametrálně protilehlých.

*) Teixeira, II. díl, str. 237; H. Wielcitner, Spez. ebene Kurven, str. 12

Pro střed strany $M M'$ rovnostranného trojúhelníka nalezneme v souřadnicích s počátkem V

$$x + i y = -\frac{c}{2}(2 e^{2 i \vartheta} - e^{4 i \vartheta}),$$

$$z = -\frac{c}{2}\sqrt{8}\cos\vartheta, \quad \vartheta = \varphi + \frac{\pi}{3}.$$

Středy stran rovnostranných trojúhelníků $\left(\varphi,\ \varphi + \frac{2\pi}{3},\ \varphi + \frac{4\pi}{3}\right)$ naplňují tedy sférickou šroubovici podobnou, s týmž základním kuželem, a poloviční rozměrů, při čemž základní úvratník leží na opačné straně roviny $O y z$.

*

11. Rovnice oskulační roviny

$$X\cos\psi + Y\sin\psi - tg\,\gamma\,(Z - z) = c\cos\varphi$$

v případě $a = 2c$ a pro počátek V se zjednoduší na

(1) $$X\cos 2\varphi + Y\sin 2\varphi - Z\sqrt{3} = 4c\cos\varphi;$$

v komplexním parametru

$$t = e^{i\varphi}$$

tato rovnice nabývá tvaru

(1a) $$(X - i Y)t^4 - 2Z\sqrt{3}t^2 - 4c(t^3 + t) + (X + i Y) = 0.$$

Při stálém $X Y Z$ podává tato rovnice jakožto své kořeny parametry bodů $t_1 t_2 t_3 t_4$, jichž oskulační roviny procházejí daným bodem. Jest tedy sf. šroubovice Γ 30^0 spádu čarou 4. třídy.

Parametry dotykových bodů oskulačních rovin procházejících týmž bodem hoví tedy rovnici

(2) $$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3,$$

která plně charakterisuje tuto vlastnost; a sice oskulační roviny čtyř bodů, pro něž symetrické úkony parametrů $t_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ hoví rovnici (2), protínají se v bodě (počátek souřadnic V):

(2¹) $$x = 2c\frac{\mathfrak{f}_4 + 1}{\mathfrak{f}_1},\quad y = 2c\frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{i\mathfrak{f}_1},\quad z = -\frac{2c}{\sqrt{3}}\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{f}_1},$$

(2²) $$\mathfrak{f}_1 = \frac{4c}{x - i y},\quad \mathfrak{f}_2 = -2\sqrt{3}\frac{z}{x - i y},\quad \mathfrak{f}_4 = \frac{x + i y}{x - i y}.$$

Ustanovme společnou sečnu hlavních normál v bodech této čtveřiny; připojme ještě dva body t_5 a t_6, a zaveďme symetrické úkony $\mathfrak{F}_\nu$ šesti veličin $t_1 \ldots t_6$. Bude nám třeba zvoliti t_5, t_6 tak, aby platily rovnice (3) článku 9:

(α) $$\mathfrak{F}_3 = 0,\ \mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{F}_2 - 1.$$

Při označení $\mathfrak{g}_1 = u_5 + u_6$, $\mathfrak{g}_2 = u_5 u_6$ máme pak identicky

$$\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2,$$
$$\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_3 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{f}_4 \mathfrak{g}_2,$$

a rovnice (α) ve spojení s podmínkou (2) dávají

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_2 = -\mathfrak{f}_1 \\ (\mathfrak{f}_4 - \mathfrak{f}_2 + 1)(\mathfrak{g}_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Druhé rovnici vyhovíme hodnotou $\mathfrak{g}_2 = 1$, takže máme

$$\mathfrak{g}_2 = 1,\ \mathfrak{g}_1 = -\frac{2\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2},$$

načež

$$\mathfrak{F}_2 - 1 = \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_1 = \frac{\mathfrak{f}_2^2 - 2\mathfrak{f}_1^2}{\mathfrak{f}_2},$$

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}_1 = \frac{\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - 2)}{\mathfrak{f}_2},$$

$$\mathfrak{F}_5 = \mathfrak{f}_4 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_3 \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{f}_1 \frac{\mathfrak{f}_2 - 2\mathfrak{f}_4}{\mathfrak{f}_2},$$

$$\mathfrak{F}_6 = \mathfrak{f}_4,$$

a podle rovnic (5) čl. 9 znějí rovnice společné sečny hlavních normál naší čtveřiny

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} X + iY = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{F}_2 - 1} Z + c \frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{F}_2 - 1}, \\ X - iY = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\mathfrak{F}_2 - 1} Z + c \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2 - 1}; \end{cases}$$

po dosazení hodnot máme tedy

$$X + iY = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_4 Z + c\,\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - 2\mathfrak{f}_4)}{\mathfrak{f}_2^2 - 2\mathfrak{f}_1^2},$$

$$X - iY = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \mathfrak{f}_2 Z + c\,\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - 2)}{\mathfrak{f}_2^2 - 2\mathfrak{f}_1^2}.$$

Podle našich hodnot (2^2) — v nichž $x\,y\,z$ je průsečný bod oskulačních rovin — bude

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{f}_2(\mathfrak{f}_4 + 1) = -\frac{4zx}{(x - iy)^2},\ \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{f}_2(\mathfrak{f}_4 - 1) = -\frac{4zyi}{(x - iy)^2}$$

$$\mathfrak{f}_1(1 - \mathfrak{f}_4) = -\frac{8ciy}{(x - iy)^2},$$

$$\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 - 1) = -\frac{8c(x + z\sqrt{3})}{(x - iy)^2},$$

$$\mathfrak{f}_2^2 - 2\mathfrak{f}_1^2 = 4\frac{3z^2 - 2a^2}{(x - iy)^2},$$

a tedy vyjde pro rovnice společné sečny hlavních normál tvar

$$(3)\qquad \begin{cases} (3z^2 - 2a^2)X + xzZ + 2c^2(x + z\sqrt{3}) = 0, \\ (3z^2 - 2a^2)Y + yzZ + 2c^2 y = 0. \end{cases}$$

Tyto rovnice v běžných souřadnicích X, Y, Z udávají přímku, která protíná hlavní normály čáry Γ sestrojené ve čtyřech bodech, jichž roviny oskulační procházejí bodem x, y, z.

Identifikujíce tyto rovnice s rovnicemi přímky

$$(4)\qquad X = mZ + p,\ Y = nZ + q,$$

obdržíme 4 rovnice o třech neznámých x, y, z; jich vyloučením vychází pak vztah

$$(4^*)\qquad (3c^2n^2 - 2q^2)(pn - qm) + \sqrt{3}c^2n^2q = 0$$

jakožto podmínka, aby mezi šesti hlavními normálami protínajícími přímku (4) byly čtyři, jichž paty mají oskulační roviny o společném průseku.

„Rovnice (4*) charakterisuje komplex přímek stupně třetího, které se jeví jako společné sečny hlavních normál čáry Γ $(a = 2c)$ vedených ve čtveřinách bodů, jichž oskulační roviny procházejí společným bodem."

Souřadnice $x_0\,y_0\,z_0$. $x_1\,y_1\,z_1$ dvou bodů na přímce komplexu tohoto hoví rovnici v podstatě shodné s (4*)

$$[3c^2(y_1 - y_0)^2 - 2(y_0z_1 - y_1z_0)^2](x_0y_1 - x_1y_0) + \\ + \sqrt{3}c^2(y_1 - y_0)^2(y_0z_1 - y_1z_0) = 0.$$

Podržíme-li bod $x_0\,y_0\,z_0$ jako stálý, probíhají přímky komplexu tímto bodem vedené racionální kužel 3. stupně; pro body na rovině $y_0 = 0$ rozpadá se kužel tento ve tři roviny, z nichž jedna jest rovina $O\,x\,z$.

Vraťme se ještě k rovnici (β); je třeba ještě vyšetřiti druhý případ, kdy

$$(\delta)\qquad \mathfrak{f}_4 - \mathfrak{f}_2 + 1 = 0.$$

Tu zůstává $\mathfrak{g}_2$ libovolné a rovnice (β) se redukují na jednu

$$(\delta')\qquad \mathfrak{f}_2\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}_2 = -\mathfrak{f}_1.$$

Z rovnic (2^1) plyne pro tyto čtveřiny $(\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_4 + 1)$

$$z + \frac{1}{\sqrt{3}}x = 0,$$

t. j. uvažovaný případ nastane pro body na rovině oskulační bodů $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$, která protíná plochu tečen v ellipse. Rovnice čtveřiny zní

$$t^4 - 1 - \mathfrak{f}_1(t^3 + t) + \mathfrak{f}_2(t^2 + 1) = 0,$$

a má dva kořeny stálé $t^2 + 1 = 0$, t. j. $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; oskulační roviny těchto bodů splývají, zbývající dvě roviny příslušejí k parametrům z rovnice

$$t^2 - \mathfrak{f}_1 t + \mathfrak{f}_2 - 1 = 0.$$

Dvojice parametrů $t^2 - \mathfrak{g}_1 t + \mathfrak{g}_2 = 0$ doplňuje tyto poslední ve čtveřinu, jež vzniká ze sečen plochy hl. normál, protínajících přímku dvojnou $V y$; podle (4) čl. 9 vyjde vztah

$$(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}_1) + [\mathfrak{g}_2 \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}_1 (\mathfrak{f}_2 - 1)] = 0,$$

jenž přirozeně se kryje s podmínkou (δ').

*

V čl. 9 jsme zjistili, že přímky rovnoběžné s osou $O z$ protínají plochu hlavních normál ve čtyřech bodech, ležících na normálách čtveřiny charakterisované vztahy $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_2 = 0$; společná sečna prochází bodem

$$x_0 = c \frac{\mathfrak{f}_4 + 1}{2\,\mathfrak{f}_1}, \quad y_0 = c \frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{2\,i\,\mathfrak{f}_1}.$$

Pro tyto body je splněna tedy podmínka (2) čl. 11, takže oskulační roviny v patních bodech těchto normál se protínají v jednom bodě; ježto $\mathfrak{f}_2 = 0$, podávají rovnice (2^1) pro tento bod

$$x = 4\,x_0, \quad y = 4\,y_0, \quad z = 0.$$

„Vedeme-li tedy ve čtyřech bodech čáry Γ $(a = 2c)$, jichž hlavní normály mají společnou sečnu na sobě kolmou, roviny oskulační, protínají se tyto v bodě P roviny střední $V x y$, průvodič $V P$ protíná sečnu společnou a jest jí štěpen v poměru 1 : 3.“

Problém stanovení průseků plochy normál s přímkou směru $O z$ $(x = x_0, y = y_0)$ je v podstatě planimetrický a spočívá v sestrojení čtyř normál z daného bodu k Huygensově nefroidě. Poněvadž evoluta této čáry je rovněž nefroida, běží tedy o tečny nefroidy z daného bodu, a nefroida je čára 4. třídy.

Známe-li dvě normály nefroidy Γ_1 z daného bodu, buďte parametry jich pat t_3, t_4, kterým přiřaďme body na základním kruhu (c) v rovině $O x y$; zbývající dvě normály odpovídají bodům t_1, t_2, téhož kruhu, a rovnice $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_2 = 0$ je určují jako společný pár dvou involucí:

Rovnice $\mathfrak{f}_2 = 0$ dává

I. $$t_1 t_2 + (t_1 + t_2)(t_3 + t_4) + t_3 t_4 = 0,$$

kdežto rovnici $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$ lze psáti

I. $$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} + \frac{t_3 t_4 - 1}{t_3 + t_4} = 0.$$

Pohodlně se strojí páry involuce II.; tětivy základního kruhu (c), přímky $\overline{t_1 t_2}$ a $\overline{t_3 t_4}$ protínají osu $O y$ v bodech symetricky položených vůči středu kruhu.

Pro involuci I. známe pár $t_1 + t_2 = 0$, jenž leží na symetrále bodů t_3 a t_4. Druhý pár téže involuce sestrojíme, podrobujíce jej podmínce: $t_1 t_2 = -1$; jeho prvky jsou kořeny rovnice

$$t - \frac{1}{t} = \frac{1 - t_3 t_4}{t_3 + t_4};$$

pro $t = e^{i\varphi}$ tedy vychází takto

$$\sin \varphi = \frac{1 - t_3 t_4}{2 i (t_3 + t_4)},$$

čímž snadno sestrojíme přímku $\| O x$ obsahující příslušný pár involuce I.

Přímka spojující středy obou involucí protíná kruh ve dvou bodech, jež určují parametry φ pro paty zbývajících dvou normál.

Ostatně obdržíme pro střed involuce I. přímo jeho souřadnice ve tvaru

$$x = -\frac{c}{2} \frac{1 + t_3 t_4}{t_3 + t_4}, \quad y = \frac{c}{2 i} \frac{1 - t_3 t_4}{t_3 + t_4}.$$

Vedeme přímku spojující protějšky bodů $t_3 t_4$ (t. j. body $\varphi_3 + \pi$, $\varphi_4 + \pi$ kruhu (c)); její pól pro kruh $x^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}$ je střed involuce I.

*

Vyjádříme ještě podmínky, aby skupina bodů čáry naší ležela na rovině. Rovnici roviny pišme ve tvaru

$$A (x + i y) + B (x - i y) + C z + D = 0,$$

v souřadnicích s počátkem V. Na sférické šroubovici $a = 2 c$ jest při $t = e^{i\varphi}$

$$x + i y = \frac{c}{2} (3 t - t^3), \quad x - i y = \frac{c}{2} \left(\frac{3}{t} - \frac{1}{t^3} \right),$$

a obdržíme pro parametry průseků rovnici stupně 6.

$$A t^6 - (3 A - C\sqrt{3}) t^4 - (3 B - C\sqrt{3}) t^2 - 2 \frac{D}{c} t^3 + B = 0;$$

symetrické funkce kořenů $\mathfrak{f}_\nu$ hoví tedy podmínkám

$$\mathfrak{f}_1 = 0, \quad \mathfrak{f}_5 = 0, \quad \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 = 3 (\mathfrak{f}_6 - 1). \tag{5}$$

Tyto tři rovnice vyjadřují okolnost, že 6 bodů čáry Γ leží na společné rovině. Jsou-li známy veškery základní úkony $\mathfrak{f}_\nu$, můžeme psáti rovnici roviny obsahující tyto body takto:

$$(1 + \mathfrak{f}_6) x + i (1 - \mathfrak{f}_6) y + \frac{3 + \mathfrak{f}_2}{\sqrt{3}} z + \frac{c \mathfrak{f}_3}{2} = 0. \tag{5a}$$

Uvažujme nyní čtveřinu bodů, jichž parametry jsou dány rovnic

$$t^4 - \mathfrak{g}_1 t^3 + \mathfrak{g}_2 t^2 - \mathfrak{g}_3 t + \mathfrak{g}_4 = 0,$$

a hledejme podmínku, aby tyto body ležely na rovině.

Zbývající dva průseky s rovinou $u_5 u_6$ určují výrazy

$$\mathfrak{h}_1 = u_5 + u_6, \quad \mathfrak{h}_2 = u_5 u_6,$$

načež rovnice (5) znějí

$$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{h}_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}_3 \mathfrak{h}_2 = 0,$$

$$3 + \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_4 + (\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3) \mathfrak{h}_1 + (1 - \mathfrak{g}_2 - 3\mathfrak{g}_4) \mathfrak{h}_2 = 0.$$

Vyloučením $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ nacházíme odtud

$$(6) \qquad 3 + \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_4 + (\mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_1) \mathfrak{g}_1 + (1 - \mathfrak{g}_2 - 3\mathfrak{g}_4) \frac{\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4}{\mathfrak{g}_3} = 0$$

jakožto podmínku, aby čtyři body čáry ležely na téže rovině.

Předpokládejme zvláště $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$, t. j. že oskulační roviny naší čtveřiny se protínají v témž bodě; rovnice (6) se zjednoduší na

$$3 + \mathfrak{g}_2 - (\mathfrak{g}_2 + 3\mathfrak{g}_4) \mathfrak{g}_4 = 0.$$

Dosadíme-li sem hodnoty (2²)

$$\mathfrak{g}_2 = -2\sqrt{3}\,\frac{z}{x - iy}, \quad \mathfrak{g}_4 = \frac{x + iy}{x - iy},$$

kde $x\,y\,z$ je průsečný bod rovin oskulačních, obdržíme

$$y(z - x\sqrt{3}) = 0.$$

Body v prostoru, z nichž vycházejí oskulační roviny čáry Γ $(a = 2c)$ dotýkající se čáry ve čtyřech bodech na společné rovině, náležejí dvěma rovinám:

I. $\quad y = 0,$

II. $\quad z = x\sqrt{3}.$

Dotyková čtveřina v prvním případě $(y = 0)$ je charakterisována rovnicemi $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4 = 1$, případ druhý odpovídá podmínkám

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3, \quad 3 + \mathfrak{g}_2 + 3\mathfrak{g}_4 = 0.$$

V obou případech jsou hořejší veličiny $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$

$$\mathfrak{h}_1 = -\mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_4,$$

tedy

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_4, \quad \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4, \quad \mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4^2,$$

tudíž lišíce oba případy:

I. Oskulační roviny procházející bodem $(x, 0, z)$ dotýkají se čáry Γ ve čtyřech bodech, jež leží na rovině

$$(7) \quad x^2 X + (2x^2 - xz\sqrt{3} - 8c^2)\frac{Z}{\sqrt{3}} + 2c^2(x + z\sqrt{3}) = 0,$$

při čemž počátkem souřadnic je stále bod V.

Otáčí-li se rovina kolem přímky rovnoběžné s osou $O\,y$, opisuje přiřaděný bod kuželosečku v rovině $O\,x\,z$. Opisuje-li tento bod přímku v rovině $O\,x\,z$, obaluje přiřaděná mu rovina rovněž kuželosečku.

II. V druhém případě máme hodnoty

$$\mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4^2,\ \mathfrak{f}_3 = 4\,\mathfrak{g}_1\,(1 + \mathfrak{g}_4),\ 3 + \mathfrak{f}_2 = -\,(2\,\mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_1^2),$$

a rovnice roviny (5ª) po dosazení hodnot (2^2) bude

$$(8)\qquad (x^2 - y^2)\,X + 2\,x\,y\,Y - (x^2 + y^2 + 8\,c^2)\,\frac{Z}{\sqrt{3}} + 8\,c^2\,x = 0;$$

je to rovina obsahující čtyři body čáry Γ, jejichž oskulační roviny se protínají v bodě $x,\ y,\ z$ na rovině $z = \sqrt{3}\,x$.

Ve zvláštním případě $y = 0$ splývá tato rovnice s (7) pro $z = x\sqrt{3}$; a sice soudíme z rovnice té

$$x^2\,X - \frac{x^2 + 8\,c^2}{\sqrt{3}}\,Z + 8\,c^2\,x = 0,$$

že

„oskulační roviny vycházející z bodů přímky $y = 0,\ z = x\sqrt{3}$ dotýkají se čáry Γ v bodech ležících na tečné rovině hyperbolického válce

$$Z^2 - X\,Z\sqrt{3} = 6\,c^2.$$

Čtveřiny dotykových bodů těchto hoví podmínkám

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_4 = 1,\ \mathfrak{g}_2 = -4,$$

takže tvoří involuci o jednom stupni volnosti.

Oskulační roviny vycházející z bodů nárysny $y = 0$ dají se lehce konstruktivně stanoviti, poněvadž příslušná rovnice je reciproká:

$$t^4 + 1 + \mathfrak{g}_2\,t^2 = \mathfrak{g}_1\,(t + t^3),\ t = e^{i\varphi};$$

ostatně tu (1) dává při $Y = 0$ přímo rovnici 2. stupně pro $\cos\varphi$.

*

Předpokládejme, že z šesti průseků křivky Γ s rovinou tři body splynou ($t_4 = t_5 = t_6$); zbývají pak 3 další body $t_1,\ t_2,\ t_3$, symetrické úkony buďte značeny $\mathfrak{h}$, společná hodnota splývajících kořenů buď t_0. Máme pak z prvních dvou rovnic (5)

$$\mathfrak{h}_1 = -\,3\,t_0,\ 3\,\mathfrak{h}_3 = -\,\mathfrak{h}_2\,t_0,$$

třetí z nich pak dá po dosazení těchto hodnot vztah

$$3 - 6\,t_0^2 + 3\,t_0^4 + \mathfrak{h}_2\,(1 - 2\,t_0^2 + t_0^4) = 0,$$

t. j. $\mathfrak{h}_2 + 3 = 0$. Tudíž jest $\mathfrak{h}_3 = t_0$.

Kubická rovnice pro zbývající tři průseky čáry Γ s rovinou oskulační bodu t_0 zní dle toho

$$t^3 + 3\,t_0\,t^2 - 3\,t - t_0 = 0.$$

Připojíme-li k těmto třem bodům jako čtvrtý bod $t_0 = t_4$, bude čtveřina $t_1 t_2 t_3 t_4$ zahrnovati různé průseky čáry s rovinou oskulační a symetrické funkce prvků budou

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 + t_0 = -2 t_0, \quad \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_2 t_0 = -2 t_0,$$

takže jest $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$; oskulační roviny všech čtyř bodů procházejí jedním bodem, t. j.

„Oskulační rovina Ω libovolného bodu sférické šroubovice 30° spádu protíná čáru v dalších třech bodech; jich oskulační roviny protínají se v určitém bodě roviny Ω.

Symetrické úkony parametrů čtveřiny znějí

$$\mathfrak{g}_1 = -2 t_0, \quad \mathfrak{g}_2 = -3 (1 + t_0^2), \quad \mathfrak{g}_4 = t_0^2;$$

píšeme t za t_0 a užijeme rovnic (21)[1]

$$x = -2 c \frac{t^2 + 1}{2 t}, \quad y = -2 c \frac{t^2 - 1}{2 i t}, \quad z = -2 \sqrt{3}\, c \frac{1 + t^2}{2 t}$$

čili po zavedení úhlu φ ($t = e^{i\varphi}$)

$$x = -2 c \cos \varphi, \quad y = -2 c \sin \varphi, \quad z = -2 c \sqrt{3} \cos \varphi.$$

„Geometrické místo průseku oskulační roviny čáry Γ ($a = 2 c$) s oskulačními rovinami jejích zbývajících tří bodů na čáře jest ellipsa

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = x \sqrt{3}.“$$

Pro průsečíky oskulační roviny bodu t_0 s čarou nalezli jsme

$$t_1 + t_2 + t_3 = -3 t_0, \quad t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -3, \quad t_1 t_2 t_3 = t_0.$$

Realným bodům odpovídá paramétr t unimodulární; poněvadž součet komplexních veličin má modul menší než součet modulů sčítanců, nemohou veličiny t, vesměs míti modul 1, a tedy

„ze tří průseků roviny oskulační s křivkou Γ vždy dva jsou pomyslné“.

*

Rovnici naši

$$3 t - t^3 = 3 t_0 t^2 - t_0$$

uveďme ve spojení s rovnicí pro půdorys čáry

$$x + i y = \frac{c}{2} (3 t - t^3), \quad t = e^{i\varphi};$$

obdržíme·

$$x + i y = -\frac{c}{2} t_0 + \frac{3 c}{2} t_0 t^2;$$

odtud plyne, že body nefroidy příslušné k parametrům $t_1 t_2 t_3$, t. j. půdo-

rysy průseků čáry Γ s oskulační rovinou bodu t_0 leží na kruhu poloměru $\frac{3c}{2}$, se středem

$$x + iy = -\frac{c}{2} t_0 = -\frac{c}{2} e^{i\varphi_0}. \tag{9}$$

Body $t_1 t_2 t_3$ leží na oskulačním kruhu bodu t_0; ten se promítá do základní roviny v ellipsu, jejíž střed je půdorys S_1 středu křivosti, a jejíž jeden vrchol je půdorys bodu t_0; rovina oskulační Ω svírá se základní rovinou stálý úhel 30^0, a tedy polouosy ellipsy jsou v poměru $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Jeden z reálných průseků kruhu (9) posledně uvažovaného a ellipsy leží mimo půdorys čáry Γ, druhý podává půdorys realného průseku roviny Ω s čarou Γ. Zbývající dva pomyslné průseky kruhu a ellipsy jsou půdorysy pomyslných průseků roviny Ω s čarou Γ.

*

Průsečnice dvou rovin oskulačních nazývá se osa křivky. Aby se dvě osy (t_1, t_2), (t_3, t_4) protínaly, k tomu třeba, aby oskulační roviny bodů $t_1 t_2 t_3 t_4$ procházely týmž bodem, tedy podmínka analytická zní $g_1 = g_3$. Tu lze psáti

$$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} + \frac{t_3 t_4 - 1}{t_3 + t_4} = 0, \tag{10}$$

a možno ji geometricky interpretovati pomocí bodů φ_ν na kruhu (c) příslušných k parametrům t_ν $(= e^{i\varphi_\nu})$. Přímky $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$ a $\overline{\varphi_3 \varphi_4}$ protínají osu Oy v bodech souměrných vůči O.

Osy (t_1, t_2), které protínají pevnou osu a které tedy hoví rovnici $(\omega = konst)$

$$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} = i \sin\omega \quad \text{čili} \quad \frac{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = \sin\omega, \tag{10^1}$$

tvoří plochu 2. stupně; mezi nimi jsou dvě tečny čáry Γ, a sice v bodech $\varphi = \omega$ a $\varphi = \pi - \omega$.

Aby se tečny v bodech t a u protínaly, máme dle (10) [pro $t_1 = t_2 = t$, $t_3 = t_4 = u$]

$$(t^2 - 1)\, u + (u^2 - 1)\, t = 0 \quad \text{čili} \quad (t\,u - 1)\,(t + u) = 0,$$

t. j. danou tečnu (t) čáry Γ protínají tečny dvě; jich parametry jsou $-t$ a $\frac{1}{t}$, t. j. tečnu bodu φ protínají tečny bodů $\varphi + \pi$ a $-\varphi$, a žádné jiné. Tytéž tečny protínají také tečnu bodu $\pi - \varphi$. Tečny bodů φ a $-\varphi$ se protínají na nárysné hyperbole, tečny φ a $\varphi + \pi$ jsou vespolek rovnoběžny.

*

Splynou-li hodnoty $t_1 t_2 t_3$, jeví se průsečík oskulačních rovin jako jejich bod dotykový s čarou. Rovnice $g_1 = g_3$, píšeme-li $t_1 = t_2 = t_3 = t$, $t_4 = t_0$, podává

$$3\,t + t_0 = t^3 + 3\,t^2 t_0;$$

tato rovnice vyjadřuje, že daným bodem t prochází jen jedna oskulační rovina, a sice jest její bod dotykový t_0. Pro dané t_0 máme tu rovnici, jíž hoví parametry tří průseků u čáry Γ s rovinou oskulační bodu t_0.

Pro dané t strojíme t_0 takto: Na kruhu (c) vedeme tečnu v bodě t; ta protne $O\,y$ v bodě σ; bod σ' s ním symetrický spojíme s bodem t; přímka $\sigma' t$ protíná kruh (c) v druhém bodě t_0, jemuž na čáře Γ odpovídá hledaný bod.

*

12. Z rovnice roviny oskulační sférické šroubovice $(a = 2\,c)$

$$x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi - z\sqrt{3} = 4\,c\cos\varphi$$

(počátek soustavy v bodě V) vychází hodnoty pro Plückerovy souřadnice roviny oskulační

$$(1)\qquad u = -\frac{\cos 2\varphi}{4\,c\cos\varphi},\quad v = -\frac{\sin 2\varphi}{4\,c\cos\varphi},\quad w = \frac{\sqrt{3}}{4\,c\cos\varphi}.$$

Rozvinutelná plocha tečen je charakterisována dvěma rovnicema, jež vyjdou po eliminaci φ:

$$(2)\qquad u^2 + v^2 - \frac{1}{3}w^2 = 0,\quad w^2 - u\,w\sqrt{3} - \frac{3}{8\,c^2} = 0.$$

Každá z nich representuje určitou čáru 2. třídy, a sice přísluší první rovnice úběžné křivce plochy kuželové

$$(2^a)\qquad x^2 + y^2 - 3\,z^2 = 0,$$

která je kužel doplňkový našeho základního kužele (polárního) $(V,\ c)$. Jeho stopa na $O\,x\,y$ má poloměr $3\,c$.

Abychom určili druhou kuželosečku (2), znamenejme na okamžik

$$k = \frac{3}{8\,c^2};$$

rovnici lze psáti

$$u = \frac{w^2 - k}{w\sqrt{3}},$$

a po dosazení této hodnoty do rovnice roviny obalující bude tato zníti

$$(a)\qquad (w^2 - k)\,x + v\,w\sqrt{3}\,y + w^2\sqrt{3}\,z + w\sqrt{3} = 0.$$

Zde dlužno anulovati částečné derivace vůči w a v, t. j.

$$2\,w\,x + v\sqrt{3}\,y + 2\,w\sqrt{3}\,z + \sqrt{3} = 0,$$

$$w\sqrt{3}\,y = 0.$$

Druhá rovnice vyžaduje $y = 0$, načež se první redukuje na

$$2\,w\,(x + z\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0,$$

kdežto rovnice (a) se zjednoduší na

$$w^2\,(x + z\sqrt{3}) + w\sqrt{3} = k\,x;$$

z posledních těchto dvou rovnic pak nám eliminace w podá

$$(2^b) \qquad x\,(x + z\sqrt{3}) + 2\,c^2 = 0,\ y = 0.$$

Druhá čára (2) je tedy hyperbola v rovině $O\,x\,z$. Je to dvojná čára plochy tečen sf. šroubovice Γ ($a = 2\,c$); střed hyperboly je bod V, její vrchol jest A, polouosy jsou a a $\frac{a}{\sqrt{3}}$; jedna asymptota jest osa $V\,z$, druhá asymptota je stopa oskulační roviny bodu $\varphi = \frac{\pi}{2}$; na hyperbole mimo to leží bod $x = 2\,c$ na $O\,x$.

Oskulační roviny čáry Γ zahalují nekonečně mnoho ploch druhé třídy; jich rovnice mají tvar

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{3}\,w^2 + \lambda\,(w^2 - u\,w\sqrt{3} - k) = 0, \quad \left(k = \frac{3}{8\,c^2}\right),$$

kde λ je libovolná stálá. Diskriminant této rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{3} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\,k \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\,k\,\lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2$$

vymizí mimo pro $\lambda = 0$ ještě jen pro $\lambda = \frac{2}{3}$. Tím obdržíme třetí kuželosečku na ploše tečen

$$(3) \qquad u^2 + v^2 + \frac{1}{3}\,w^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,u\,w - \frac{1}{a^2} = 0,$$

čili

$$(3^*) \qquad \left(u - \frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Abychom obdrželi rovnice v souřadnicích bodových, dlužno připojiti rovnici

$$a) \qquad u\,x + v\,y + w\,z + 1 = 0$$

a rovnice o differenciálech

$$\left(u - \frac{w}{\sqrt{3}}\right)\left(d\,u - \frac{d\,w}{\sqrt{3}}\right) + v\,d\,v = 0,$$

$$x\,d\,u + y\,d\,v + z\,d\,w = 0.$$

Po eliminaci $d\,v$ musí tyto dvě rovnice býti identické vůči literám $d\,u$, $d\,w$, t. j.

$$v\,x - y\left(u - \frac{w}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

$$v\,z\sqrt{3} + y\left(u - \frac{w}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

což dává podmínku

$$x + z\sqrt{3} = 0,$$

a dále

$$(b) \qquad \frac{u - \frac{1}{\sqrt{3}}w}{x} = \frac{v}{y} = \alpha\,.$$

Rovnice (a) užitím prvního vztahu nabývá tvaru

$$x\left(u - \frac{w}{\sqrt{3}}\right) + v\,y + 1 = 0\,,$$

z něhož po dosazení hodnot (b) vychází

$$\alpha\,(x^2 + y^2) + 1 = 0\,,$$

kdežto rovnice (3*) dává

$$\alpha^2\,(x^2 + y^2) = \frac{1}{a^2}\,.$$

Eliminací α vychází konečně vztah

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Oskulační roviny čáry Γ jsou tedy ještě tečnami ellipsy (počátek V)

$$(3^a) \qquad x^2 + y^2 = a^2,\ x + z\sqrt{3} = 0\,,$$

která pak leží na její ploše tečen. Parametrické vyjádření této čáry

$$(3^b) \qquad x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = -\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\varphi$$

bylo již výše nalezeno. Rovina této kuželosečky je dvojná rovina oskulační $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

„Rovina oskulační obsahuje bod φ této ellipsy (3^b) a její tečnu."

Dále je oskulační rovina rovnoběžna s tečnou rovinou kužele (2^a) vedenou podél přímky

$$\frac{x}{\cos 2\varphi} = \frac{y}{\sin 2\varphi} = z\sqrt{3}\,;$$

což ostatně je jen jiný tvar známé nám věty, že přímka $V\,m$ jest osou křivosti čáry Γ.

Stopy tečny ellipsy na válci (a) se bezprostředně určí a tak nám předešlá věta dává jednoduchou konstrukci stop roviny oskulační.

Z rovnic tečny vychází [(18) čl. 6.] parametrické vyjádření nárysné hyperboly

$$x = \frac{c}{\cos\varphi}\,,\quad z = -\frac{c}{\sqrt{3}}\,\frac{2+\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Z rovnic těch je zřejmo, že část hyperboly příslušná k intervallu $-c < x < c$ je hluchá (parasite), t. j. není tvořena stopami tečen reálných.

*

Na základě parametrického vyjádření plochy tečen

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} x = a\cos\varphi + \dfrac{\lambda}{2}\sqrt{3}\cos 2\varphi \\ y = a\sin\varphi + \dfrac{\lambda}{2}\sqrt{3}\sin 2\varphi \\ z = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos\varphi + \dfrac{\lambda}{2}\,,\ \text{(počátek } V\text{)}, \end{array}\right.$$

určíme ještě průseky její s přímkou

$$x = m\,z + p,\ y = n\,z + q.$$

Vložíme do těchto rovnic hodnoty (4) a vyloučíme λ; rovnici tak vzniklou

$$\left|\begin{array}{ll} a\cos\varphi + \dfrac{a\,m}{\sqrt{3}}\cos\varphi - p, & \sqrt{3}\cos 2\varphi - m \\ a\sin\varphi + \dfrac{a\,n}{\sqrt{3}}\cos\varphi - q, & \sqrt{3}\sin 2\varphi - n \end{array}\right| = 0$$

lze psáti

$$a\,n\cos 3\varphi - a\,m\sin 3\varphi - 2\sqrt{3}\,q\cos 2\varphi + 2\sqrt{3}\,p\sin 2\varphi -$$
$$- a\,(3\,m + 2\sqrt{3})\sin\varphi + 3\,a\,n\cos\varphi - 2\,(p\,n - q\,m) = 0\,.$$

Po zavedení parametru $t = e^{i\varphi}$ přejde tato podmínka na tvar

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} a\,(n + i\,m)\,t^6 - 2\sqrt{3}\,(q + i\,p)\,t^5 + a\,(3\,n + 3\,i\,m + 2\,i\sqrt{3})\,t^4 \\ - 4\,(p\,n - q\,m)\,t^3 + a\,(3\,n - 3\,i\,m - 2\,i\sqrt{3})\,t^2 \\ - 2\sqrt{3}\,(q - i\,p)\,t + a\,(n - i\,m) = 0\,. \end{array}\right.$$

Pro symetrické úkony kořenů $\mathfrak{f}_\nu$ odtud vychází nejprvé

$$(n + i\,m)\,\mathfrak{f}_2 = 3\,(n + i\,m) + 2\,i\sqrt{3}$$
$$(n + i\,m)\,\mathfrak{f}_4 = 3\,(n - i\,m) - 2\,i\sqrt{3}$$
$$(n + i\,m)\,\mathfrak{f}_6 = n - i\,m\,,$$

takže vyjde

$$(5^a) \qquad \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_4 = 3\,\mathfrak{f}_6 + 3, \quad \mathfrak{f}_2 - 3 = \frac{2\,i\,\sqrt{3}}{n + i\,m}\,.$$

Dále nám identita

$$\begin{vmatrix} q + i\,p & n + i\,m \\ q - i\,p & n - i\,m \end{vmatrix} = 2\,i\,(p\,n - q\,m)$$

podá vztah

$$(5^b) \qquad \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_6 - \mathfrak{f}_5 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{f}_3\,(\mathfrak{f}_2 - 3)\,.$$

Podmínky (5^a) (5^b) charakterisují šestičlenné skupiny tečen čáry Γ mající společnou sečnu.

Zvolíme-li čtyři tečny, existují dvě přímky je protínající; zbývající dva průseky sečny s plochou tečen určují symetrické úkony $\mathfrak{h}_1 = t_5 + t_6$, $\mathfrak{h}_2 = t_5\,t_6$, a dosazením výrazů $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1\,\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, . . . ($\mathfrak{g}_r$ jsou symetrické úkony čtveřiny dané) obdržíme z (5^a) a (5^b) dvě rovnice pro neznámé $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, z nichž jedna je stupně druhého, a které tedy mají dvě řešení, příslušná ke dvěma společným sečnám dané čtveřiny tečen.

Ve zvláštním případě, kdy přímka sekoucí je rovnoběžna s $O\,z$, máme $m = n = 0$, a rovnice (5) přejde v rovnici stupně 4.; souměrné úkony parametrů t hoví podmínkám $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 = 0$, $\mathfrak{g}_2 = 0$.

V rovnicích (4) pišme μ za $\frac{\lambda}{2}\sqrt{3}$.

$$x = a\,\cos\varphi + \mu\,\cos 2\varphi, \quad y = a\,\sin\varphi + \mu\,\sin 2\varphi\,,$$
$$z\,\sqrt{3} = \mu - a\,\cos\varphi\,.$$

Z prvních dvou plyne

$$x^2 + y^2 = a^2 + \mu^2 + 2\,a\,\mu\,\cos\varphi\,,$$

tedy s použitím třetí rovnice

$$x^2 + y^2 = a^2 + \mu^2 + 2\,\mu\,(\mu - z\,\sqrt{3})\,,$$

t. j.

$$(\alpha) \qquad \mu^2 - 2\,\mu\,\frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{3}\,.$$

Rovnice

$$x = a\,\cos\varphi + 2\,\mu\,\cos^2\varphi - \mu$$

dává

$$(\beta) \qquad x = \frac{2\,\mu}{a^2}\,(\mu - z\,\sqrt{3})^2 - z\,\sqrt{3}\,;$$

dle (α) však

$$(\mu - z\,\sqrt{3})^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9\,z^2 - a^2}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

a tedy (β) zní

$$x + z\sqrt{3} = -\frac{8\mu^2 z}{a^2\sqrt{3}} + 2\mu\frac{x^2 + y^2 + 9z^2 - a^2}{3a^2};$$

s použitím rovnice (α) to zní

$$(\gamma) \qquad 2\mu(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 3a^2 x + \frac{z}{\sqrt{3}}(8x^2 + 8y^2 + a^2).$$

Položme

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = S,$$

$$(x^2 + y^2 + 2c^2)z\sqrt{3} - \frac{z^3}{\sqrt{3}} + 6c^2 x = P,$$

i podá nám rovnice (γ)

$$\left(\mu - \frac{z}{\sqrt{3}}\right)S = P;$$

tu pak výraz

$$\mu\left(\mu - \frac{2z}{\sqrt{3}}\right)S^2 = \left(P + S\frac{z}{\sqrt{3}}\right)\left(P - S\frac{z}{\sqrt{3}}\right)$$

má dle (α) hodnotu

$$\frac{x^2 + y^2 - a^2}{3}S^2,$$

a jeho srovnání s pravou stranou dává rovnici plochy tečen ve tvaru*)

$$(6) \qquad P^2 = \frac{1}{3}S^3 \quad \text{(počátek } V\text{)};$$

při tom $S = 0$, $P = 0$ jsou rovnice úvratnice I.

Plocha $P = 0$ je geometrické místo kruhů v rovinách $z = konst$, které protínají přímku $z + x\sqrt{3} = 0$, $y = 0$, a mají své středy na hyperbole $xz = -c^2\sqrt{3}$, $y = 0$. Na této ploše leží mimo to přímka $V\,y$; roviny vedené nárysnou přímkou ji sekou v hyperbolách.

Povrchové kruhy přejdou v nullové v bodech A, A' ($\varphi = \pi$)

$$x = \mp c, \quad z = \mp c\sqrt{3},$$

jež leží na hyperbole středů a na přímce v nárysu.

Průsek plochy tečen s libovolnou plochou 2. stupně, která se dotýká základní koule (a) podél kruhu, rozpadá se ve dvě čáry stupně šestého, ležící na dvou různých plochách stupně třetího. Neboť rovnice uvažované plochy 2. stupně má tvar $S = L^2$, kde L je výraz lineární, a průsek této plochy s plochou (6) hoví jedné z rovnic

$$P = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}L^3.$$

*

*) A. Buffone, l. c.

Plochy 2. třídy naší ploše tečen vepsané

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{3} w^2 + \lambda (w^2 - u w \sqrt{3} - k) = 0 \qquad k = \frac{3}{8 c^2}\Big)$$

mají společný střed v bodě V a rovinu $V x z$ za rovinu hlavní.

Pól příslušný k rovině $(u_0 v_0 w_0)$ má rovnici

$$u u_0 + v v_0 - \frac{1}{3} w w_0 + \lambda \left(w w_0 - \frac{u w_0 + w u_0}{2} \sqrt{3} - k \right) = \quad ,$$

a tedy u tečné roviny $u_0 v_0 w_0$ je dotykový bod

$$x = - \frac{u_0 - \frac{\lambda}{2} \sqrt{3}\, w_0}{k \lambda} , \quad y = - \frac{v_0}{k \lambda} ,$$

$$z = \frac{\left(\frac{1}{3} - \lambda \right) w_0 + \frac{\lambda}{2} \sqrt{3}\, u_0}{k \lambda} ;$$

vložíme-li sem hodnoty (1) za u_0, v_0, w_0, obdržíme

$$x = \frac{2 c}{3} \frac{\frac{3}{2} \lambda + \cos 2 \varphi}{\lambda \cos \varphi} , \quad y = \frac{2 c}{3} \frac{\sin 2 \varphi}{\lambda \cos \varphi} ,$$

$$z = \frac{2 c}{3} \sqrt{3} \frac{\frac{1}{3} - \lambda - \frac{\lambda}{2} \cos 2 \varphi}{\lambda \cos \varphi} ,$$

jakožto parametrické vyjádření dotykové čáry plochy tečen sf. šroubovice s vepsanou plochou 2. třídy.

Výrazy budou o něco přehlednější při $\lambda = \frac{2}{3} \mu$:

$$(7^0) \qquad x = c \frac{\mu + \cos 2 \varphi}{\mu \cos \varphi} , \quad y = c \frac{\sin 2 \varphi}{\mu \cos \varphi} ,$$
$$z = \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{1 - 2 \mu - \mu \cos 2 \varphi}{\mu \cos \varphi} ,$$

vepsaná plocha má rovnici

$$(7) \qquad u^2 + v^2 + \frac{2 \mu - 1}{3} w^2 - \frac{2 \mu}{\sqrt{3}} u w - \frac{\mu}{4 c^2} = 0.$$

Dotyková čára (7^0) je racionální, 4. stupně, její nárys je hyperbola.

V souřadnicích bodových má tato plocha rovnici

$$(7^*) \qquad (2 \mu - 1) \mu x^2 - \mu (\mu - 1)^2 y^2 + 3 \mu z^2 + 2 \mu^2 x z \sqrt{3} + (\mu - 1)^2 a^2 = 0,$$

takže vepsané plochy 2. stupně tvoří řadu stupně třetího.

Pro čáru dotykovou (7^9) nalezneme hravě rovnici hyperbolického válce, kterým se promítá do nárysny:

$$(x + z\sqrt{3})(\mu x + z\sqrt{3}) = \frac{(1-\mu)^3}{\mu^2} 2c^2.$$

Tato čára 4. stupně se čítá při stanovení průseče vepsané plochy (7*) s plochou tečen jako křivka stupně 8., a musí ještě býti křivka stupně 4. společná oběma plochám. Tato se skládá ze čtyř tečen přislušných k parametrům φ určeným rovnicí

$$\cos^2 \varphi = \frac{\mu - 1}{\mu},$$

jak bezprostředně vychází z rovnic (4) a (7*).

Na vepsané ploše (7*) druhého stupně tvoří tečny φ a $\pi - \varphi$ dvě přímky povrchové jedné soustavy, tečny $-\varphi$ a $\varphi + \pi$ pak dvě přímky soustavy druhé. Při tom jsou přímky druhého páru s přímkami prvními rovnoběžny (φ a $\varphi + \pi$, $\pi - \varphi$ a $-\varphi$), a vzaty v jiném pořádku je protínají (φ a $-\varphi$, $\varphi + \pi$ a $\pi - \varphi$) ve dvou bodech nárysné hyperboly.

Rovina určená rovnoběžnýma tečnama φ a $\varphi + \pi$ má rovnici (počátek V)

č8) $$x(3\sin\varphi + \sin 3\varphi) - y(3\cos\varphi + \cos 3\varphi) + 2z\sqrt{3}\sin\varphi = 0$$

a prochází tedy středem V; je to rovina určená středem V a tečnou φ áry Γ. Rovina ta při proměnném φ obaluje kužel, kterým se čára Γ promítá ze středu V, a který jsme výše (čl. 7.) určili.

Tečny φ a $-\varphi$ protínají se v nárysně, rovina jimi určená je kolmá na $O\,x\,z$ a její rovnice splývá s rovnicí nárysu tečny:

9) $$x - z\sqrt{3}\cos 2\varphi = 3c\cos\varphi + c\cos 3\varphi.$$

Plochy 2. stupně procházející uvažovanými přímkami tvoří svazek, v němž jedna plocha se rozpadá ve dvě roviny (8) (pro φ a $-\varphi$), jiná sestává ze dvou rovin (9) (pro φ a $\varphi + \pi$), t. j. svazek ploch uvažovaný má rovnici

(7^1) $$\begin{aligned}&(3x\sin\varphi + x\sin 3\varphi + 2z\sqrt{3}\sin\varphi)^2 - y^2(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2\\ &- \nu[(x - z\sqrt{3}\cos 2\varphi)^2 - c^2(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2] = 0;\end{aligned}$$

mezi těmito plochami, a sice pro $\mu = \frac{1}{\sin^2\varphi}$, nachází se naše vepsan plocha (7*). Porovnáme poměry součinitelů při y^2 se členem stálým:

$$\frac{(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2}{\mu(\mu - 1)^2} = \frac{c^2\nu(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2}{(\mu - 1)^2 a^2},$$

t. j. bude*)

$$\nu = \frac{4}{\mu} = 4\sin^2\varphi.$$

*) Přehlednější tvar této rovnice objeví se ve článku 13.

Délka hlavní polouosy na $V\,y$ obnáší $a \sin\varphi$; dáno-li φ, známe tak u vepsané plochy 2. stupně střed V, jeden vrchol (na $V\,y$) a 4 přímky, čímž jest konstruktivně určena.

Hlavní řez plochy vepsané s rovinou $O\,x\,z$ je hyperbola, jejíž jedna asymptota je ve stopě roviny ellipsy, t. j. $x + z\sqrt{3} = 0$.

*

Oskulační rovina bodu A ($\varphi = 0$) má rovnici

$$x - z\sqrt{3} = 4\,c = 2\,a \text{ (počátek } V);$$

její průseč s plochou tečen odpovídá na základě rovnic (4) paramétru

$$\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} = -\,2\,a\,\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos 2\varphi};$$

pro souřadnice průmětu vypočteme

$$x = 2\,c - 2\,c\cos^2\varphi\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi},\quad y = 2\,c\,\frac{(1-\cos\varphi)^2}{\sin\varphi}.$$

Zavedeme-li paramétr reálný

$$t = tg\,\frac{\varphi}{2},$$

obdržíme následující parametrické vyjádření průseče plochy tečen s oskulační rovinou bodu A (t. j. pro její průmět):

$$x - 2\,c = -\,c\,\frac{(1-t^2)^2}{1+t^2},\quad y = \frac{4\,c\,t^3}{1+t^2}. \tag{10}$$

Pro průsečíky této čáry s přímkou

$$A\,(x - 2\,c) + B\,y + C\,c = 0$$

nalezneme rovnici

$$-A\,(1 - 2\,t^2 + t^4) + 4\,B\,t^3 + C\,(1 + t^2) = 0,$$

která stanoví jich parametry. Symetrické funkce parametrů hoví rovnicím

$$f_3 = 0,\quad f_4 - f_2 = 3, \tag{11}$$

které přímočaré čtveřiny naší křivky úplně charakterisují. Jinak vyjádřeno, tyto čtveřiny tvoří na křivce involuci 4. stupně o dvojí volnosti

$$(t^4 + 3) - f_1\,t^3 + f_2\,(t^2 + 1) = 0.$$

Tato má neutrální body dvojné $t_1 = t_2 = \pm i\sqrt{3}$, kterým přísluší úvratníky čáry

$$x = 10\,c,\quad y = \pm 6\,i\sqrt{3}\,c.$$

Podobně $t = 0$ (bod A) podává úvratní bod čáry, což ostatně zřejmo z rovnic

$$x - c = k_1\,t^2 + k_2\,t^4 + \ldots$$
$$y = l_1\,t^3 + l_2\,t^5 + \ldots$$

platných pro malá t.

Tečna uvažovaného řezu je průseč jeho roviny s rovinou oskulační

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - z\sqrt{3} = 4c \cos \varphi;$$

s použitím rovnice roviny

$$x - z\sqrt{3} = 4c$$

obdržíme pro průmět tečny

(12) $$x(1 - \cos 2\varphi) - y \sin 2\varphi = 4c(1 - \cos \varphi),$$

což při parametru $t = tg \frac{\varphi}{2}$ zní

(12ª) $$2tx - (1 - t^2)y = 2ct(1 + t^2),$$

takže čára je třetí třídy.

Tečny vedené z téhož bodu hoví rovnici

$$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 = 0 \quad (\mathfrak{g}_1 = t_1 + t_2 + t_3,\ \mathfrak{g}_3 = t_1 t_2 t_3).$$

Dotykové body budou ležeti na přímce, lze-li určiti veličinu t tak, aby pro čtveřinu $t_1 t_2 t_3 t$ platily rovnice (11), t. j.

(α) $$\mathfrak{g}_3 + t\,\mathfrak{g}_2 = 0,\ \mathfrak{g}_3 t = 3 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 t;$$

vyloučením t vychází pro hledané skupiny podmínka

$$\mathfrak{g}_3^2 + 3\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_2^2 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_3 = 0 \text{ čili } 2\mathfrak{g}_1^2 + 3\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_2^2 = 0.$$

Vložíme-li sem hodnoty z (12ª) plynoucí

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{y}{2c},\ \mathfrak{g}_2 = \frac{c - x}{c},$$

— kde (x, y) je průsečík tečen — obdržíme rovnici

(13) $$2(x - c)^2 + y^2 = 6c(x - c),$$

která charakterisuje ellipsu, z jejíchž bodů vycházejí k čáře (10) tečny dotýkající se čáry ve třech bodech na přímce.

Přímková čtveřina $(\mathfrak{f}_\nu)$ určuje koefficienty v rovnici přímky vztahy

$$A\,\mathfrak{f}_1 = 4B,\ A(2 + \mathfrak{f}_2) = -C,$$

t. j. přímka má rovnici

(14) $$x + \frac{1}{4}\mathfrak{f}_1 y - (\mathfrak{f}_2 + 4)c = 0.$$

V našem případě jest

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}_1 + t,\ \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 t,$$

a podmínky (α) vzhledem ke splněné podmínce $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 = 0$ dávají

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 t,\ 3 + \mathfrak{g}_2 + 2\mathfrak{g}_1 t = 0,$$

t. j.

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{-3}{1+2t^2}\,,\quad \mathfrak{g}_1 = \frac{-3t}{1+2t^2}\,,$$

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{2t^3-2t}{1+2t^2}\,,\quad \mathfrak{f}_2 = -\frac{3(1+t^2)}{1+2t^2}\,.$$

Dosazením hodnot těchto

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{2(t^3-t)}{1+2t^2}\,,\quad \mathfrak{f}_2 + 4 = \frac{1+5t^2}{1+2t^2}$$

do rovnice (14) nacházíme pro přímku obsahující tři dotykové body tečen o společném průseku

$$2x(1+2t^2) + y(t^3-t) = 2c(1+5t^2)\,. \tag{15}$$

Přímka ta obaluje tedy rovněž čáru 3. třídy; je-li znám její čtvrtý průsek t s křivkou, stanoví se přímka konstruktivně na základě očividné okolnosti, že prochází bodem

$$x = 2c,\ y = \frac{2c}{t} = 2c\,cotg\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

Pro parametry tří přímek (15) procházejících společným bodem platí vztah

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + 1 = 0\,.$$

Konstrukce přímek těch je snadno proveditelna a sice kvadratická, leží-li bod buď na čáře (10) aneb na přímce $x = 2c$.

Rovnici tečny (12) možno psáti

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 2c\,tg\,\frac{\varphi}{2}\,;$$

pata kolmice spuštěné z bodu O na tuto přímku má polární souřadnice

$$\varrho = 2c\,tg\,\frac{\varphi}{2}\,,\quad \omega = \varphi - \frac{\pi}{2}\,;$$

přeložíme-li polární osu do záporného směru osy Oy, bude (pro pól O) polární rovnice úpatnice průmětu uvažovaného řezu zníti

$$\varrho = 2c\,tg\,\frac{\Theta}{2} = a\,\frac{1-\cos\Theta}{\sin\Theta}\,,\quad \Theta = \varphi.$$

Tato úpatnice je tedy přímá strofoida, kterou na základě posledního vzorce strojíme tak, že na libovolný paprsek svazku O naneseme od jeho průseku K s přímkou $x = a$ délku KP rovnou pořadnici bodu K.

Máme tedy výsledek tento·

„Oskulační rovina sférické šroubovice Γ ($a = 2c$) v bodě A protíná její plochu tečen v racionální čáře 4. stupně 3. třídy, jejíž půdorys je protiúpatnice přímé strofoidy.

*

Uvažujme nyní průseč plochy tečen s oskulační rovinou bodu $\varphi = \vartheta$. Průseč oskulačních rovin (ϑ) a libovolné jiné (φ)

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - z\sqrt{3} = 4c \cos \varphi,$$
$$x \cos 2\vartheta + y \sin 2\vartheta - z\sqrt{3} = 4c \cos \vartheta$$

má půdorys daný rovnicí

$$x \sin(\varphi + \vartheta) - y \cos(\varphi + \vartheta) = a \frac{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2}}{\cos \frac{\varphi - \vartheta}{2}}, \tag{16}$$

kterážto přímka je tečnou půdorysu hledaného řezu. Uvažujme úpatnici této čáry z pólu O; její polární souřadnice mají hodnoty

$$\varrho = a \frac{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2}}{\cos \frac{\varphi - \vartheta}{2}}, \quad \omega = \varphi + \vartheta - \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

Položíme-li $\Theta = \omega + \frac{\pi}{2}$, měníce osu, máme polární rovnici

$$\varrho = a \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\cos\left(\frac{\Theta}{2} - \vartheta\right)} = a \frac{\cos \vartheta - \cos(\Theta - \vartheta)}{\sin(\Theta - 2\vartheta)};$$

dvojná rovina oskulační $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ poskytne patrně dvojný bod úpatnice; souřadnice dvojného bodu úpatnice budou

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + \vartheta, \quad \varrho = a.$$

Otočme nyní polární osu do polohy $\Theta = 2\vartheta$, kladouce nový polární úhel $= \psi = \Theta - 2\vartheta$; bod dvojný má souřadnice

$$\varrho = a, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

rovnice čáry zní

$$\varrho = a \frac{\cos \vartheta - \cos(\psi + \vartheta)}{\sin \psi}. \tag{17a}$$

Znamenejme $\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, rovnici (17a) lze pak psáti

$$\varrho = \frac{a \cos \vartheta}{\sin \psi} - \frac{a \sin(\vartheta' - \psi)}{\sin \psi}.$$

Veďme vektor OB směru $\psi = \frac{\pi}{2}$, délky $\overline{OB} = a \cos \vartheta$, dále vektor $\overline{OC} = a$ směru $\psi = \vartheta'$, takže BC stojí kolmo na OB.

Přímka BC protíná libovolný paprsek $\psi \equiv OK$ v bodě K; v trojúhelníku OCK máme strany $OC = a$, CK s protilehlými úhly ψ a $\vartheta' - \psi$, takže

$$\frac{a \sin(\vartheta' - \psi)}{\sin \psi} = CK,$$

mimo to jest $OK = \frac{a \cos \vartheta}{\sin \psi}$; bod P úpatnice ležící na průvodiči OK tedy je stanoven rovnicí

$$OP = \varrho = OK - CK,$$

což jest známá konstrukce strofoidy s řídící přímkou BC, hlavním bodem O a dvojným bodem C.

Vůči původním osám Ox, Oy je poloha bodu dvojného

(C) $$\varrho = a, \quad \omega = \vartheta,$$

přímka OB má polohu $\omega = 2\vartheta$, rovnice řídící přímky BC je tedy

(18) $$x \cos 2\vartheta + y \sin 2\vartheta = a \cos \vartheta;$$

řídící přímky těchto strofoid obalují nefroidu

(18a) $$x + iy = \frac{c}{2}(3 + e^{2i\vartheta}) e^{i\vartheta},$$

shodnou s nefroidou Γ_1, otočenou o 90^0, která je tedy homothetická se střední epicykloidou.

Promítneme tedy do Oxy stopu oskulační roviny bodu $\varphi = \vartheta$ (roviny řezu) na rovině střední Vxy, a vedeme přímku, jež půlí průvodiče průmětu; tato přímka jest řídící přímkou strofoidy.

Tečny strofoidy ve dvojném bodě mají směr $\psi = \frac{\vartheta'}{2}, \frac{\vartheta'}{2} + \frac{\pi}{2}$, a ježto $\omega = \psi + 2\vartheta - \frac{\pi}{2}$, má normála jedné z tečen směr $\omega = \vartheta - \frac{\vartheta'}{2}$, rovnice tečny má tvar

$$x \cos\left(\vartheta - \frac{\vartheta'}{2}\right) + y \sin\left(\vartheta - \frac{\vartheta'}{2}\right) = konst;$$

konstantu určíme z podmínky, aby přímka procházela bodem dvojným

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = a \sin \vartheta;$$

tak vyjde jako rovnice tečny v bodě dvojném

$$x \cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = a \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Klademe-li $\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} = \alpha$, můžeme tuto rovnici psáti

$$x \cos 3\alpha + y \sin 3\alpha = -a \sin \alpha;$$

přímka ta je tečnou kardioidy

$$x + i\,y = -\frac{i\,a}{3}\,(2 - e^{2\,i\,\alpha})\,e^{2\,i\,\alpha},\quad 2\,\alpha = \vartheta + \frac{\pi}{2}\,,$$

kdežto druhá tečna ve dvojném bodě strofoidy obaluje kardioidu

$$x + i\,y = \frac{i\,a}{3}\,(2 - e^{2\,i\,\alpha})\,e^{2\,i\,\alpha},\quad 2\,\alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}\,.$$

Hlavní výsledek těchto úvah lze vysloviti větou:

„Plocha tečen sférické šroubovice 30^0 spádu je proťata libovolnou svojí tečnou rovinou v čáře 4. stupně a 3. třídy, která se do základní roviny promítá v protiúpatnici strofoidy, vzaté z pólu O.“

Základní prvky strofoidy byly v předcházejících řádcích podrobně uvedeny.

*

13. Obraťme se nyní k osám šroubové čáry T ($a = 2\,c$), t. j. průsečnicím dvou rovin oskulačních; počátek souřadnic je veskrze V.

Oskulační roviny φ a φ'

$$(0)\qquad \begin{aligned} x\cos 2\,\varphi + y\sin 2\,\varphi - z\sqrt{3} &= 4\,c\cos\varphi,\\ x\cos 2\,\varphi' + y\sin 2\,\varphi' - z\sqrt{3} &= 4\,c\cos\varphi' \end{aligned}$$

stanoví osu, jejíž průmět má rovnici

$$(1)\qquad x\sin(\varphi + \varphi') - y\cos(\varphi + \varphi') = 2\,c\,\frac{\sin\dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos\dfrac{\varphi - \varphi'}{2}};$$

položíme

$$(2)\qquad \sin\omega = \frac{\sin\dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos\dfrac{\varphi - \varphi'}{2}}\,,$$

načež rovnice průmětu osy $(\varphi,\ \varphi')$ zní

$$(1^*)\qquad x\sin(\varphi + \varphi') - y\cos(\varphi + \varphi') = 2\,c\sin\omega.$$

Podmínka, aby se dvě osy $(\varphi_1\,\varphi_2)$, $(\varphi_3\,\varphi_4)$ protínaly, zněla při označení $u_\nu = e^{i\,\varphi_\nu}$

$$\frac{u_1\,u_2 - 1}{u_1 + u_2} + \frac{u_3\,u_4 - 1}{u_3 + u_4} = 0\,,$$

a ta se přepíše na

$$\sin\omega + \sin\omega' = 0;\quad \sin\omega = \frac{\sin\dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}\,,\quad \ldots$$

Z rovnic v tomto případě současně platných

$$x \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - y \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 2c \sin\omega,$$
$$x \sin(\varphi_3 + \varphi_4) - y \cos(\varphi_3 + \varphi_4) = -2c \sin\omega$$

plyne sečtením

$$(\alpha) \qquad x \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} - y \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} = 0.$$

Rovnici

$$\frac{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} + \frac{\sin\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}}{\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}} = 0$$

lze psáti

$$\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}{2} + \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4 - \varphi_3}{2}$$
$$+ \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1}{2} = 0.$$

Při označení

$$2\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

vyjadřuje se tedy podmínka, aby osy $(\varphi_1\,\varphi_2)$, $(\varphi_3\,\varphi_4)$ náležely společné rovině, vzorcem

$$(3) \qquad \sin(\sigma - \varphi_1) + \sin(\sigma - \varphi_2) + \sin(\sigma - \varphi_3) + \sin(\sigma - \varphi_4) = 0,$$

a pro souřadnice průsečíku platí

$$(4) \qquad \frac{y}{x} = tg\,\sigma.$$

Buďtež $x_0\,y_0\,z_0$ souřadnice bodu na ose (φ, φ'), jímž prochází společná kolmice této osy a přímky $O\,z$ (která měří jich nejkratší vzdálenost); pak půdorysem nejkratší vzdálenosti je kolmice spuštěná z počátku (0, 0) na průmět osy (φ, φ') a bude dle (1*)

$$x_0 = 2c \sin\omega \sin(\varphi + \varphi'),\ y_0 = -2c \sin\omega \cos(\varphi + \varphi'),$$

načež vyjde

$$z_0 \sqrt{3} = 2c \sin\omega \sin(\varphi' - \varphi) - 4c \cos\varphi = -2c(\cos\varphi + \cos\varphi').$$

Máme tak soustavu rovnic

$$(5) \qquad \left|\begin{array}{l} x_0 = 2c \sin\omega \sin(\varphi + \varphi'),\ y_0 = -2c \sin\omega \cos(\varphi + \varphi'), \\ \\ z_0 = -\frac{2c}{\sqrt{3}}(\cos\varphi + \cos\varphi');\ \sin\omega = \frac{\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}}. \end{array}\right.$$

Poněvadž tu

$$z_0 = -\frac{4c}{\sqrt{3}} \cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} \cos\frac{\varphi-\varphi'}{2},$$

máme

$$\frac{x_0}{z_0} = -\sqrt{3}\sin\omega \frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}},$$

t. j.

$$\frac{x_0}{z_0} = -\sqrt{3}\sin^2\omega. \tag{5^0}$$

Stálé hodnotě ω odpovídají osy protínající určitou osu pevnou a takové tvoří hyperboloid; opsaný válec směru Oz stanoví na něm dotykovou čáru, jejíž body mají od osy Oz vzdálenost minimální; je to čára bodů $x_0\, y_0\, z_0$; z rovnice (5^0) a (5) plyne, že čára ta leží na rovině kolmé na nárysnu

$$x_0 + z_0\sqrt{3}\sin^2\omega = 0,$$

a na kruhovém válci

$$x_0^2 + y_0^2 = 4c^2\sin^2\omega.$$

Osa (φ, φ') obsahuje bod $(x_0\, y_0\, z_0)$ (5) a hoví rovnici (1); nalezneme pro ni parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v\cos(\varphi+\varphi') \\ y &= y_0 + v\sin(\varphi+\varphi') \\ z &= z_0 + \frac{v}{\sqrt{3}}\cos(\varphi-\varphi'), \end{aligned} \tag{6}$$

kde v určuje polohu bodu na ose.

Odtud vypočteme

$$x + z\sqrt{3}\sin^2\omega = v\cos^2\omega, \tag{7}$$

$$x^2 + y^2 = 4c^2\sin^2\omega + v^2; \tag{8}$$

čáry $v = konst$ na hyperboloidu $\omega = konst$ jsou tedy ellipsy na kruhových válcích směru Oz.

Vyloučením ω plyne z posledních dvou rovnic

$$4c^2 x + (z\sqrt{3} + v)(x^2 + y^2 - v^2) = 4c^2 v; \tag{9}$$

tedy body $v = konst$ na různých osách naplňují plochu stupně třetího; pro $v = 0$ zvláště máme plochu 3. stupně

$$(x^2 + y^2)z + \frac{4c^2}{\sqrt{3}}x = 0, \tag{9^0}$$

která je souhrn bodů, jež na osách čáry Γ zaujímají polohu nejbližší k ose Oz. Možno ji bráti za souhrn ellips, podél nichž se různé hyperboloidy

$\omega = konst$ dotýkají vepsaných kruhových válců. Tyto ellipsy leží na rovinách $\frac{x}{z} = konst$; roviny $z = konst$ protínají plochu v kruzích.

Vyloučíme-li z rovnic (7) a (8) literu v, vznikne rovnice hyperboloidu $\omega = konst$

$$(10) \qquad (x + z\sqrt{3}\, sin^2\omega)^2 = cos^4\omega\,(x^2 + y^2 - 4\,c^2\, sin^2\omega).$$

Toť tedy rovnice hyperboloidu os čáry Γ, které protínají tečnu $\varphi = -\omega$; druhá řada os jsou přímky druhé soustavy a protínají tečnu $\varphi = \omega$.

Vedle os hovících podmínce

$$\frac{sin\,\frac{\varphi + \varphi'}{2}}{cos\,\frac{\varphi - \varphi'}{2}} + \frac{sin\,\frac{\varphi'' + \varphi'''}{2}}{cos\,\frac{\varphi'' - \varphi'''}{2}} = 0$$

protínají se také osy (φ, φ'), (φ'', φ'''), které leží na společné rovině oskulační, na př. $\varphi''' = \varphi'$; takové nazveme osami komplanárními.

Libovolná osa (φ_1, φ_2) protne plochu (10) ve dvou bodech, jimiž procházejí 4 osy, povrchové to přímky hyperboloidu; dvě z nich leží na oskulační rovině φ_1, druhé dvě na oskulační rovině φ_2.

Parametry bodů u, u', jichž oskulační roviny stanoví osu na hyperboloidu $(\pm\omega)$, hoví rovnici

$$(\alpha) \qquad \frac{u\,u' - 1}{u + u'} = i\, sin\,\omega, \text{ resp. } -i\, sin\,\omega.$$

Na druhém hyperboloidu $(\pm\omega_1)$ máme pak osy (u_1, u_1')

$$(\beta) \qquad \frac{u_1\,u_1' - 1}{u_1 + u_1'} = i\, sin\,\omega_1, \text{ resp. } -i\, sin\,\omega_1;$$

uvažujme na něm pouze přímky jedné soustavy (ω_1). V průsečném bodě hyperboloidů platí $u_1' = u'$, kde u' hoví jedné z podmínek (α) a první podmínce (β). Můžeme však se omeziti na průseky pouze řady (ω) s řadou (ω_1), poněvadž druhé řady dávají tytéž body.

Zvolíme-li u' za neodvisle proměnnou, obdržíme u, u_1 z rovnic (α) a (β), načež průsek osy (u, u_1) s oskulační rovinou u' je hledaný bod průsečné čáry. Tak obdržíme souřadnice na průsečnici hyperboloidů (ω) a (ω_1) vyjádřeny jako racionálné funkce u'.

Z rovnic typu (10) pro ω a ω_1 obdržíme však přímo, dělíme-li $cos^4\omega$, a odečteme rovnice tak vzniklé:

$$(x + z\sqrt{3})\left(x + z\sqrt{3} + \frac{2\,x}{tg^2\omega + tg^2\omega_1}\right) = -\frac{4\,c^2\, cos^2\omega\, cos^2\omega_1}{tg^2\omega + tg^2\omega_1},$$

což jest rovnice hyperbolického válce, který prochází průsečnicí obou hyperboloidů. Jedna jeho rovina asymptotická je dvojná rovina oskulační $x + z\sqrt{3} = 0$, a jeho osa jest $V y$.

Střed hyperboloidu (10) je V a jedna jeho osa jest $V y$, s vrcholy $y = \pm 2 c \sin \omega$; tečné roviny v těchto vrcholech protínají plochu jeho ve dvou přímkách ležících každá na jedné z rovin

$$x + z\sqrt{3} = 0, \quad x + z\sqrt{3}\,\frac{\sin^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega} = 0.$$

Rovina $x = 2 \varepsilon c \sin \omega$ ($\varepsilon = \pm 1$) protíná hyperboloid v přímkách $x + z\sqrt{3}\sin^2 \omega = \pm y$ a dotýká se ho v bodě $y = 0, x + z\sqrt{3}\sin^2 \omega = 0$, jenž leží na dotykové čáře s vepsaným kruhovým válcem směru $O z$.

Hlavní řez ellipsoidu (10) má rovnici

$$y = 0, \quad (x + z\sqrt{3})\left(x + z\sqrt{3}\,\frac{\sin^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega}\right) = -4 c^2 \frac{\cos^4 \omega}{1 + \cos^2 \omega}$$

a je tedy hyperbolou, jejíž jedna asymptota je

$$x + z\sqrt{3} = 0$$

společná s hyperbolou nárysnou plochy tečen.

Pro polohu os této hyperboly nám elementární vzorec podává

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\cos 2\omega},$$

značí-li α úhel, jejž osa hyperboly svírá s přímkou $O x$.

*

V případě, kdy úhel ω není realný, t. j. kdy na hyperboloidu neleží realných tečen čáry $\overset{!}{\iota}\Gamma$, nám definice

$$\sin \omega = \frac{\sin \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}$$

podá trigonometrické funkce úhlu ω, rovněž graficky přístupné. Na kruhu (c) uvažujme body φ_1, φ_2 jak obvykle, jich spojivá přímka prochází pevným bodem σ na $O y$. Tímto bodem σ vedeme rovnoběžku s $O x$, která protne kruh (c) v realných bodech φ_1, φ_2, poněvadž σ jest jeho bod vnitřní. Pro tyto zvláštní body máme

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \vartheta,$$

značí-li ϑ úhel mezi směry $O \varphi_1$ a $O y$; vyjde tedy

$$\sin \omega = \sec \vartheta,$$

načež se funkce úhlu ω vyjádří snadno funkcemi realného úhlu ϑ a tím se stanou konstrukce jednoduše provedným.

Abychom určili stopu osy (φ, φ') na dvojné rovině oskulační, vložme do rovnic (0) hodnotu $z\sqrt{3} = -x$; výsledky se zkrátí $\cos\varphi$, $\cos\varphi'$ a zbude

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 2c$$
$$x\cos\varphi' + y\sin\varphi' = 2c,$$

z čehož řešením plynou souřadnice stopy

$$(11) \qquad y = 2c\sin\omega,\ x = 2c\frac{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}};\ \frac{y}{x} = tg\frac{\varphi+\varphi'}{2}.$$

Viděli jsme ostatně již výše, že dvojná rovina obsahuje dvě přímky hyperboloidu (ω), a že tyto leží na rovinách $y = \pm 2c\sin\omega$.

Tečna t_φ šroubové čáry Γ v bodě φ, v němž $\sin\varphi \neq \pm\sin\omega$, protíná jen ty povrchové přímky hyperboloidu (10), které jsou komplanární osy s tečnou t_φ, t. j. které leží na oskulační rovině Ω bodu φ. Tato rovina obsahuje přímku hyperboloidu, jest jeho tečnou rovinou a současně se dotýká rozvinutelné plochy; pohybuje-li se zůstávajíc tečnou rovinou plochy, opíše její dotykový bod s hyperboloidem na tomto jistou křivku. Rozvinutelná plocha je pak obalovou plochou tečných rovin v bodech řečené křivky, a tato plocha rozvinutelná musí tuto křivku obsahovati. Náš hyperboloid (10) je tedy plocha 2. stupně vepsaná ploše tečen, jaké jsme uvažovali v čl. 12. Máme tak výsledek:

„Plochy 2. stupně vepsané ploše tečen šroubové čáry Γ $(a = 2c)$ jsou hyperboloidy, jichž obě soustavy přímek jsou osami čáry Γ."

Leží na nich čtvero tečen této čáry.

Rovnice (10) není než přehledněji psaná rovnice (7^1) čl. 12 pro hodnotu $\omega = \varphi$.

*

Osy čáry Γ tvoří kongruenci. Rovina, která není oskulační pro křivku Γ, nemůže obsahovati více než dvé přímek této kongruence; tyto by nebyly komplanární, a přímky p_2, p_3 protínajíce tutéž osu p_1 by náležely téže řadě na hyperboloidu, což vyloučeno.

„Oskulační roviny čáry Γ obsahují nekonečně mnoho přímek kongruence os, jiné roviny obsahují takové přímky dvě, a sice jsou to povrchové přímky na vepsaném hyperboloidu, který se roviny dotýká."

Jsou-li u, v, w Plückerovy souřadnice roviny, můžeme snadno udati hyperboloid, který se jí dotýká, a příslušný paramétr ω. V rovnici (7) čl. 12. značí μ hodnotu

$$\mu = \frac{1}{\sin^2\omega},$$

a pro tuto hodnotu je splněna rovnice (7) čl. 12. souřadnicemi roviny; bude tedy

$$\sin^2 \omega = \frac{2}{3} \frac{\frac{3}{8c^2} + u w \sqrt{3} - w^2}{u^2 + v^2 - \frac{1}{3} w^2}.$$

Dotykový bod plochy vepsané s rovinou (u, v, w) má rovnici

$$U\left(u - \frac{\mu}{\sqrt{3}} w\right) + V v + W\left(-\frac{\mu}{\sqrt{3}} u + \frac{2\mu - 1}{3} w\right) = \frac{\mu}{4c^2};$$

jím procházejí hledané přímky kongruence, ležící na rovině (u, v, w).

Daným bodem prochází obecně šest os, jež jsou průsečnice šesti párů, v něž se druží 4 roviny oskulační vedené oním bodem.

Buď p libovolná osa čáry Γ, Ω jedna z obou rovin oskulačních, které jí procházejí; rovina Ω seče plochu tečen v čáře 3. třídy (Ω), která se musí dotýkati přímky p; tečna p' v soumezném bodě této čáry protíná p, a je tedy dotykový bod přímky p s čarou (Ω) ohniskem kongruence; totéž platí o druhé oskulační rovině procházející přímkou p.

„Osy čáry Γ dotýkají se plochy tečen ve dvou bodech (určených řezy s oběma rovinama oskulačníma, jež příslušnou osu stanoví), které jsou ohnisky kongruence."

„Rozvinutelné plochy tvořené z přímek kongruence os pozůstávají z oskulačních rovin čáry Γ."

*

Směrné kosinusy osy (φ, φ') jsou úměrny veličinám

$$\cos(\varphi + \varphi'), \ \sin(\varphi + \varphi'), \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\varphi - \varphi');$$

podmínka, aby dvě osy $(\varphi_1 \varphi_2)$ a $(\varphi_3 \varphi_4)$ stály na sobě kolmo, zní tedy

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_3 + \varphi_4) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_3 + \varphi_4) + \frac{1}{3} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) = 0,$$

čili

$$(12^1) \qquad 6 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + \cos(\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4) + \cos(\varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

V parametrech $u = e^{i\varphi}$ se to vyjádří rovnicí

$$(12^2) \qquad 6(u_1^2 u_2^2 + u_3^2 u_4^2) + (u_1^2 + u_2^2)(u_3^2 + u_4^2) = 0;$$

znamenejme $u_\nu^2 = v_\nu$, takže v_ν je paramétr opěrného bodu m_ν (stopy osy křivosti), i bude tato podmínka zníti

$$(12^3) \qquad 6(v_1 v_2 + v_3 v_4) + (v_1 + v_2)(v_3 + v_4) = 0.$$

Přímka $\overline{v_1 v_2}$, která spojuje body v_1, v_2 na kruhu (c), měj rovnici

$$\mathfrak{A}\, x + \mathfrak{B}\, y + \mathfrak{C} = 0;$$

snadno shledáme, že platí vztahy

$$(13) \qquad v_1 + v_2 = -\frac{2\,\mathfrak{C}}{c\,(\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B})}, \quad v_1 v_2 = \frac{\mathfrak{A} + i\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B}};$$

podobné vztahy jsou pro koefficienty rovnice tětivy $v_3 v_4$

$$\mathfrak{A}'\, x + \mathfrak{B}'\, y + \mathfrak{C}' = 0,$$

a rovnice (12^3) se tak přepíše na

$$6\left(\frac{\mathfrak{A} + i\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{A}' + i\,\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}' - i\,\mathfrak{B}'}\right) + \frac{4\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'}{c^2\,(\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}' - i\,\mathfrak{B}')} = 0$$

čili

$$(14) \qquad 3\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}\,\mathfrak{B}') + \frac{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'}{c^2} = 0\,.$$

Hodnotě v odpovídají dvě hodnoty u, tedy dvojici (v_1, v_2) přísluší čtyři osy čáry Γ, vespolek rovnoběžné; rovnice (14) vyjadřuje podmínku, aby dvě čtveřiny os byly na sobě kolmy.

Rovnice (14) ukazuje, že přímky $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$ jsou spolu harmonicky sdruženy vůči kuželosečce

$$(15) \qquad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \frac{\mathfrak{C}^2}{3\,c^2} = 0\,,$$

která je kruh pomyslného poloměru

$$(15^*) \qquad x^2 + y^2 + 3\,c^2 = 0\,.$$

Takto je každé ose (čtveřině os) čáry Γ přiřazena tětiva kruhu (c), spojující stopy os křivosti příslušných k rovinám oskulačním osu určujícím; dvě osy čáry Γ jsou pak na sobě kolmy, jsou-li representační tětivy harmonicky sdruženy vůči kruhu (15).

Necháme-li osu $(u_3\ u_4)$ pevnou, probíhají representační tětivy $\overline{v_1 v_2}$ svazek, jehož střed je pól tětivy $\overline{v_3 v_4}$ vůči kruhu (15), body v_1, v_2 tedy tvoří involuci, a odpovídá jim involuce čtveřin os čáry Γ.

Převeďme náš výsledek na parametry u_ν; buďte rovnice tětiv

$$\overline{u_1 u_2} \qquad A\ x + B\ y + C\ = 0\,,$$

$$\overline{u_3 u_4} \qquad A'\, x + B'\, y + C' = 0;$$

pak bude dle (13)

$$u_1^2 + u_2^2 = (u_1 + u_2)^2 - 2\,u_1 u_2 = \frac{4\,C^2}{c^2\,(A - i\,B)^2} - 2\,\frac{A^2 + B^2}{(A - i\ B)^2}$$

t. j.

$$u_1^2 + u_2^2 = \frac{2}{c^2}\ \frac{2\,C^2 - c^2\,(A^2 + B^2)}{(A - i\,B)^2};$$

rovnice (12^2) pak zní

$$6\left[\left(\frac{A+iB}{A-iB}\right)^2+\left(\frac{A'+iB'}{A'-iB'}\right)^2\right]$$
$$+\frac{4}{c^4}\,\frac{2C^2-c^2(A^2+B^2)}{(A-iB)^2}\cdot\frac{2C'^2-c^2(A'^2+B'^2)}{(A'-iB')^2}=0$$

čili po úpravě

$$(16)\qquad (A^2-B^2)(A'^2-B'^2)+4ABA'B'$$
$$+\frac{1}{3}\left(A^2+B^2-\frac{2C^2}{c^2}\right)\left(A'^2+B'^2-\frac{2C'^2}{c^2}\right)=0.$$

Tato rovnice vyjadřuje, že přímky ABC, $A'B'C'$ stanoví na kruhu (c) body, jichž parametry $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_3\varphi_4$ dávají osy křivky Γ na sobě kolmé. Podržíme-li osu (φ_3, φ_4) pevnou, podává (16) rovnici kuželosečky, jejíž tečny určují osy kolmé na osu (φ_3, φ_4).

Úběžné body čáry (16) mají rovnici

$$(A^2-B^2)(A'^2-B'^2)+4ABA'B'+\frac{1}{3}\Phi'(A^2+B^2)=0,$$

$$\Phi'=A'^2+B'^2-\frac{2C'^2}{c^2}.$$

Diskriminant zní

$$4A'^2B'^2-\left(A'^2-B'^2+\frac{1}{3}\Phi'\right)\left(B'^2-A'^2+\frac{1}{3}\Phi'\right)$$
$$=(A'^2+B'^2)^2-\frac{1}{9}\Phi'^2;$$

devaterónásobek diskriminantu má hodnotu

$$8(A'^2+B'^2)^2+\frac{4C'^2}{c^2}\left(A'^2+B'^2-\frac{C'^2}{c^2}\right),$$

která je kladna (v případě realných φ_3 a φ_4), poněvadž platí

$$A'^2+B'^2-\frac{C'^2}{c^2}>0,$$

jakmile body (u_3, u_4) určující osu čáry Γ jsou realné. Kuželosečka (16) je tedy hyperbola v tom případě.

Její ohniska jsou realné body na tečnách hovících podmínce

$$A^2+B^2=0.$$

Vložme $B=iA$ do rovnice (16); vyjde

$$(A'^2-B'^2+2iA'B')A^2-\Phi'\frac{C^2}{3c^2}=0,$$

odtud pak

$$\frac{A}{C} = \sqrt{\frac{\Phi'}{3c^2}} \frac{A' - iB'}{A'^2 + B'^2}, \quad \frac{B}{C} = \sqrt{\frac{\Phi'}{3c^2}} \frac{B' + iA'}{A'^2 + B'^2}.$$

Rovnice tečny bude

$$A'x + B'y + i(A'y - B'x) + (A'^2 + B'^2)\sqrt{\frac{3c^2}{\Phi'}} = 0;$$

je-li $\Phi' > 0$, t. j. protíná-li přímka $\overline{u_3 u_4}$ kružnici

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{2} = 0,$$

je třetí člen realný a ohniska leží na přímce

$$A'y - B'x = 0,$$

kolmé na $\overline{u_3 u_4}$. Je-li však $\Phi' < 0$, t. j. leží-li přímka $\overline{u_3 u_4}$ zevně řečeného kruhu, bude $\sqrt{\Phi'}$ ryze pomyslné, a ohniska leží na přímce

$$A'x + B'y = 0,$$

rovnoběžné s přímkou $\overline{u_3 u_4}$.

Pro výstřednost máme odtud

$$e = c\sqrt{3}\sqrt{\frac{A'^2 + B'^2}{\pm \Phi'}}, \quad \frac{\Phi'}{A'^2 + B'^2} = 1 - \frac{2\delta^2}{c^2},$$

kde δ značí vzdálenost přímky $\overline{u_3 u_4}$ od bodu O. Tudíž

$$e = \frac{c^2\sqrt{3}}{\sqrt{|c^2 - 2\delta^2|}}.$$

Pro čáru (16) lze určiti libovolný počet tečen $\overline{u_1 u_2}$ na základě přímek $\overline{v_1 v_2}$, jež tvoří svazek. Zvláště přímky tohoto svazku, které jsou tečnami kruhu (c), vedou k párům bodů $u_1 u_2$ diametrálně protilehlých, které dávají tečny procházející středem křivky O, t. j. asymptoty. — Jsou-li úhly φ_1, φ_2 komplexní veličiny sdružené, bude osa (φ_1, φ_2) křivky Γ realnou. Je-li osa (φ_3, φ_4) určena body pomyslně sdruženými, nejsou prů seky u_3, u_4 body realné, rovněž ne příslušné body v_3, v_4, ale příslušná přímka $\overline{v_3 v_4}$ bude realnou rovněž jako $\overline{u_3 u_4}$. Padne-li pól přímky $\overline{v_3 v_4}$ vůči kruhu (15*) dovnitř kruhu (c) — t. j. je-li její vzdálenost δ_1 od bodu O větší než $3c$ — budou asymptoty kuželosečky (16) pomyslny a čára sama tedy ellipsou.

Úhel $\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} = \varphi_0$ jest realný, a je to směr přímky kolmé na $\overline{u_3 u_4}$; přímka $\overline{v_3 v_4}$ pak má svoji normálu ve směru $2\varphi_0$. Vzdálenosti δ a δ_1 těchto přímek od bodu O jsou v závislosti vyjádřené vztahem

$$c\delta_1 = 2\delta^2 - c^2,$$

vycházejícím z identity $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$. Tím jsou přímky $\overline{v_1 v_2}$ — t. j. jich svazek — určeny také v případě, kdy přímka $u_3 u_4$ neprotíná kruh (c).

Čára (16) je pak ellipsou v případě $\delta > c\sqrt{2}$, a degeneruje v případě $\delta = c\sqrt{2}$, kdy pak jeden z bodů v_1, v_2 je stálým bodem kruhu (c), jakožto vrchol svazku $\overline{v_1 v_2}$.

Buď dále Δ střed tohoto svazku; paprsek jeho kolmý na přímku $O\Delta$ dává body v_1, v_2, jimž příslušejí body u_1, u_2 (vedle dalších 3 párů) určující tečnu kuželosečky (16) kolmou na (po příp. rovnoběžnou) $\overline{u_3 u_4}$, t. j. tečnu vrcholovou. Celkem vycházejí tak 4 tětivy $\overline{u_1 u_2}$, jež jsou vrcholové tečny kuželosečky. —

Na základě věty o různoběžných osách čáry Γ víme, že osy (u_1, u_2) sekoucí osu (u_3, u_4) dávají tětivy kruhové $u_1 u_2$ ve svazku σ. Osy (u_1, u_2) protínající kolmo osu (u_3, u_4) určíme tedy pomocí tečen čáry (16) vedených z bodu σ; naproti tomu osy komplanární odpovídají tečnám z bodů u_3 a u_4 na kruhu (c).

„Mezi osami čáry Γ jsou dvě, jež kolmo protínají osu danou, nečítaje v to dva páry os s danou osou komplanárních."

Určíme přímo z rovnice (16) některé tečny. První dva členy rovnice lze psáti

$$(A\,A' + B\,B')^2 - (A\,B' - A'\,B)^2;$$

čára má tudíž tečny (A, B, C) hovící rovnicím

$$(17^0) \qquad A^2 + B^2 - \frac{2\,C^2}{c^2} = 0, \quad A\,A' + B\,B' = \pm (A\,B' - A'\,B).$$

Jsou to tečny kruhu

$$(17) \qquad x^2 + y^2 - \frac{c^2}{2} = 0$$

rovnoběžné s přímkama

$$(17^b) \qquad \begin{aligned} (A' + B')\,x - (A' - B')\,y &= 0, \\ (A' - B')\,x + (A' + B')\,y &= 0, \end{aligned}$$

jež jsou na sobě kolmy.

Osy kuželosečky (16)

$$A'\,x + B'\,y = 0, \quad A'\,y - B'\,x = 0$$

protínají kruh (c) v bodech, které jsou vrcholy čtverce; jeho dva páry protějších stran jsou zvrhlé kuželosečky svazku

$$\lambda\,(x^2 + y^2 - c^2) = 2\,A'\,B'\,(x^2 - y^2) - 2\,(A'^2 - B'^2)\,x\,y;$$

diskriminant této rovnice

$$c^2\,\lambda\,[\lambda^2 - (A'^2 + B'^2)^2]$$

vymizí pro $\pm\lambda = A'^2 + B'^2$, což dává přímky

$$(A' \mp B')^2 x^2 + (A' \pm B')^2 y^2 \pm 2 (A'^2 - B'^2) x y = (A'^2 + B'^2) c^2$$

čili

$$[(A' \mp B') x \pm (A' \pm B') y]^2 = (A'^2 + B'^2) c^2,$$

rovnoběžné s přímkami (17^b); poněvadž jsou to strany vepsaného čtverce do kruhu (c), jsou tečnami kruhu (17), t. j.

„osy hyperboly (16), rovnoběžka a kolmice na $\overline{u_3 u_4}$ z bodu O, stanoví na kruhu (c) vrcholy čtverce, jehož strany jsou tečnami hyperboly (16).“

Šine-li se přímka $\overline{u_3 u_4}$ zůstávajíc rovnoběžna s pevným směrem, nemění se osy hyperboly a uvedené čtyři tečny, hyperboly tvoří řadu kuželoseček (čar 2. třídy). Z těch jedna se rozpadá ve dva body úběžné na stranách čtverce, příslušná přímka $\overline{u_3 u_4}$ dotýká se kruhu (17); druhé dvě čáry rozpadají se v páry protilehlých vrcholů, bude jeden z bodů u_1, u_2 pevným dvojznačně, rovněž jeden z bodů v_1, v_2 (a sice jednoznačně), tedy střed svazku $v_1 v_2$ leží na kruhu (c), jeho polára pro kruh (15*) padne mimo kruh (c), t. j. přímka $\overline{v_3 v_4}$ kruh (c) neprotne, rovněž tedy leží $\overline{u_3 u_4}$ mimo (c).

Vychází to také z diskriminantu rovnice (16)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\Phi' + A'^2 - B'^2, & 2A'B', & 0 \\ 2A'B', & \frac{1}{3}\Phi' - A'^2 + B'^2, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{2}{3c^2}\Phi' \end{vmatrix},$$

jenž vymizí pro $\Phi' = 0$ (kdy $\overline{u_3 u_4}$ je tečnou kruhu (17)) a pro další dvě řešení pomyslná.

Připomeňme ještě, že podmínka, aby se osy (u_1, u_2) a (u_3, u_4) protínaly — pokud nejsou komplanární — se vyjadřuje vztahem

$$BC' + B'C = 0,$$

ježto z hořejších vztahů vychází

$$B = -\frac{C}{c} \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}.$$

*

V případě, kdy kuželosečka (16) se rozpadá ve dva úběžné body, mají tětivy $\varphi_1 \varphi_2$ kruhu (c) stálý směr, totiž jsou rovnoběžny s tečnou bodu φ_3, a při tom je $\varphi_4 = \varphi_3 \pm \frac{\pi}{2}$. Tu pak osa (φ_3, φ_4) je průsečnice rovin s rovnoběžnými půdorysnými stopami

$$x \cos 2\varphi_3 + y \sin 2\varphi_3 - z\sqrt{3} = 4c \cos \varphi_3$$
$$x \cos 2\varphi_3 + y \sin 2\varphi_3 + z\sqrt{3} = \pm 4c \sin \varphi_3,$$

a tedy je rovnoběžna s rovinou $V\,x\,y$.

Pro osu (φ_1, φ_2) máme podmínku $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 2\varphi_3 \pmod{2\pi}$; béřeme-li úhly φ_1, φ_2 v mezích $-\pi$ a π, bude přesně $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_3$; pro její půdorys máme rovnici (1)

$$x \sin 2\varphi_3 - y \cos 2\varphi_3 = 2c \frac{\sin \varphi_3}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}},$$

t. j. zůstává kolmý na směr $\frac{\pi}{2} + 2\varphi_3$ osy (φ_3, φ_4), jak zřejmo a priori.

Proveďme transformaci souřadnic

$$X = x \cos 2\varphi_3 + y \sin 2\varphi_3, \quad Y = -x \sin 2\varphi_3 + y \cos 2\varphi_3,$$

pevná osa q (φ_3, φ_4) má rovnice

$$(q) \qquad X = 2c(\cos \varphi_3 \pm \sin \varphi_3), \quad z\sqrt{3} = -2c(\cos \varphi_3 \mp \sin \varphi_3)$$

a pro osu p (φ_1, φ_2) nalezneme

$$(p) \qquad Y = -2c \frac{\sin \varphi_3}{\cos(\varphi_1 - \varphi_3)},$$

$$X \cos 2(\varphi_1 - \varphi_3) - z\sqrt{3} = 4c \cos \varphi_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3);$$

hodnotám neodvislým φ_1 odpovídá tak ∞^1 přímek p, jež tvoří plochu sborcenou.

Znamenejme $\varphi_1 - \varphi_3 = \alpha$, $c \cos \varphi_3 = g$, $c \sin \varphi_3 = h$, rovnice (p) znějí pak

$$(18) \qquad Y = -\frac{2h}{\cos \alpha}, \quad X \cos 2\alpha - Z\sqrt{3} = 4g \cos \alpha,$$

kde α je proměnný paramétr. Strikční čára je obrys v rovině $X\,Z$ a je to kuželosečka

$$X_0 = \frac{g}{\cos \alpha}, \quad Z_0\sqrt{3} = -g \frac{1 + 2\cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

čili

$$(19) \qquad X_0(X_0 + Z_0\sqrt{3}) + 2g^2 = 0, \quad Y_0 + 2X_0 \operatorname{tg} \varphi_3 = 0.$$

Plocha os (18) má rovnici

$$(18^*) \qquad Y^2(X + Z\sqrt{3}) = 8h^2 X + 8ghY,$$

z níž vychází, že na ploše leží přímka (prochází bodem V)

$$(20) \qquad X + Z\sqrt{3} = 0, \quad hX + gY = 0.$$

Plocha naše tedy je konoid, jehož řídící útvary jsou rovina $X\,Z$ a přímka (20), mimo to hyperbola (19).

Tento konoid je geometrickým místem os čáry Γ ($a = 2c$), které stojí kolmo na daném směru $\frac{\pi}{2} + 2\varphi_3$ v rovině $V\,x\,y$; řídící rovina je rovnoběžna s osou $V\,z$ a s daným směrem $2\varphi_3$, řídící přímka je průsečnice rovin

$$y = x\,tg\,\varphi_3, \quad x\,cos\,2\varphi_3 + y\,sin\,2\varphi_3 + z\sqrt{3} = 0,$$

t. j.

$$\frac{x}{cos\,\varphi_3} = \frac{y}{sin\,\varphi_3} = \frac{z}{\frac{-1}{\sqrt{3}}\,cos\,\varphi_3}.$$

OBSAH.

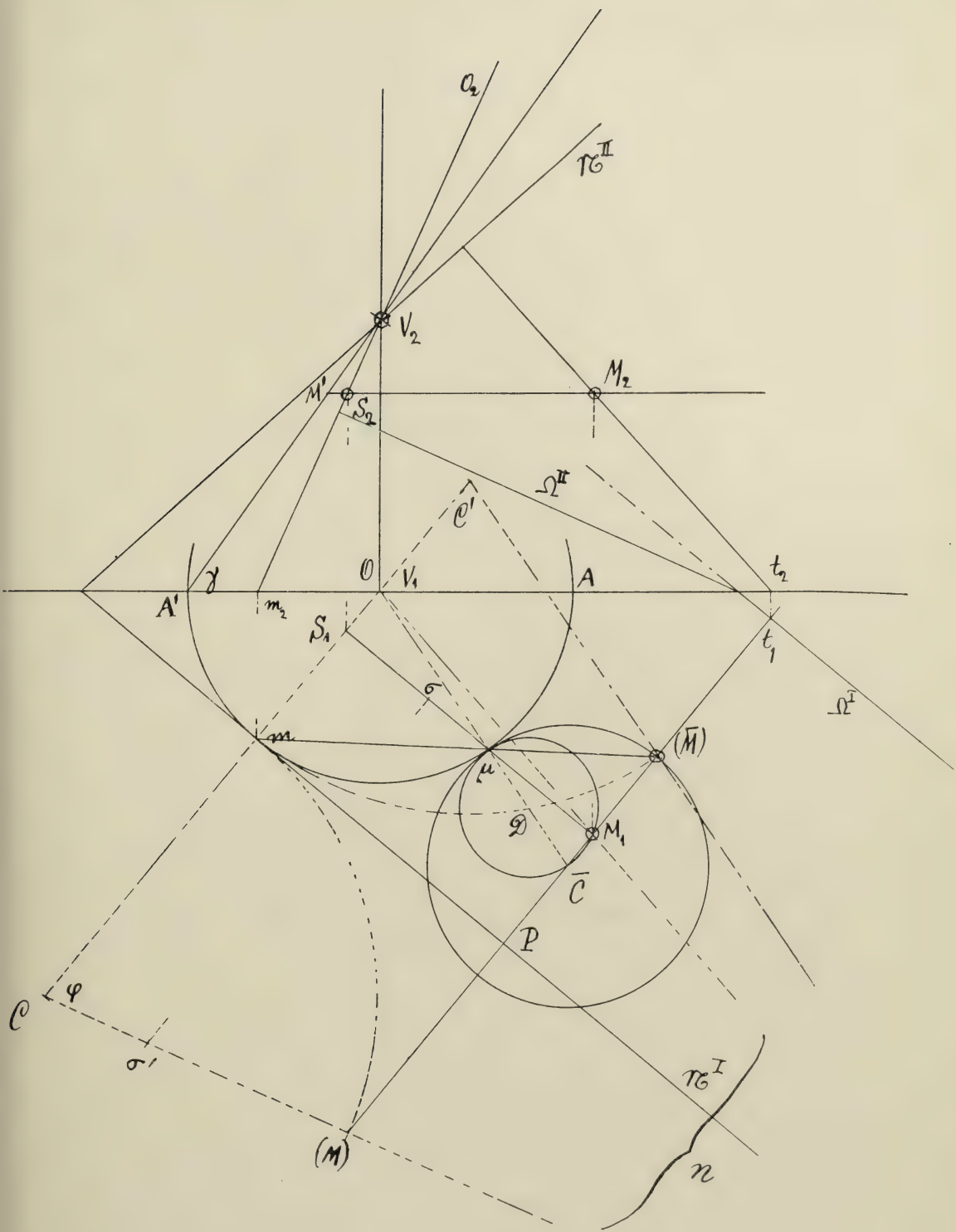
Strana

1. Definice; polární plocha. Vytvoření čáry jako evolventy rotačního kužele. Ekvivalence tohoto processu s kotálením kruhu po kruhu. Hlavní normála a střed křivosti. Čára středů křivosti leží na kuželi rotačním a možno ji vytvořiti pomocí nálepu kruhového 1
2. Konstrukce čáry, její tečny, normální roviny, osy křivosti a roviny oskulační; poloměr křivosti pro čáru a její půdorys 4
3. Elementární odvození povahy půdorysu sf. šroubovice — jakožto epicykloidy. Čára středů křivosti má za půdorys růžici; parametrické vyjádření čáry středů. Délka oblouku sf. šroubovice 6
4. Záběh do theorie růžic. Růžice nalepená na rotační kužel, tak aby vrchol jeho se kryl s její středem, promítá se do základní roviny kužele opět v růžici.
   Zvláštní případ, kdy průmětem je kruh, dává hyppopédu Eudoxovu . . 11
5. Analytické vyjádření sf. šroubovice. Poloměr křivosti nárysu. Vyjádření polohy hlavní normály, normální roviny, tečny, osy křivosti a roviny oskulační. Plocha hlavních normál; její čára strikční leží na rotačním hyperboloidu jednoplochém; po rozvinutí promítajícího válce v rovinu přechází strikční čára v ellipsu. Pronik plochy hlavních normál s válcem $x^2 + y^2 = c^2$ sestává ze dvou různých křivek. Rovnice plochy hlavních normál v případě $a = 2c$ ($\gamma = 60^0$); její řez s normální rovinou bodu A. Některé vlastnosti jistých čar 4. stupně na ploše hlavních normál 13
6. Tětivy stanovené hlavními normálami na základním válci $x^2 + y^2 = c^2$. Plocha tečen; její pronik s válcem $x^2 + y^2 = a^2$ se rozpadá ve dvě čáry (Q) a (Q'); střední epicykloida na ploše tečen, trojiny stálého poměru. Čáry $QP =$ konst. a $Q'P =$ konst. Rotační plochy 2. st. se středem V, vepsané válci (a), protínají plochu tečen v čarách $QP : Q'P =$ konst.; jich půdorysy jsou epicykloidy. Rozvinutí plochy tečen v rovinu. Definice čáry jako sférické evolventy kruhu 25
7. Některé průměty centrální a kosoúhlé čáry Γ v případě $a = 2c$: kardioida, Diokletova cissoida, dvojovála. Konstruktivní zjednodušení, jež v tomto případě nastanou 34
8. Zvláštní případ $a = 3c$. Centrální průměty z bodů vratných a z bodu dvojného 39
9. Další úvahy o ploše hlavních normál ($a = 2c$): Podmínka, aby šest hl. normál mělo společnou sečnu; stanovení zvláštní přímky na oskulačním paraboloidu 41
10. Plocha hlavních normál v případě $a = 3c$; rovnostranné trojúhelníky bodů $(\varphi, \varphi + 120^0, \varphi + 240^0)$ o společné rovině normální 46

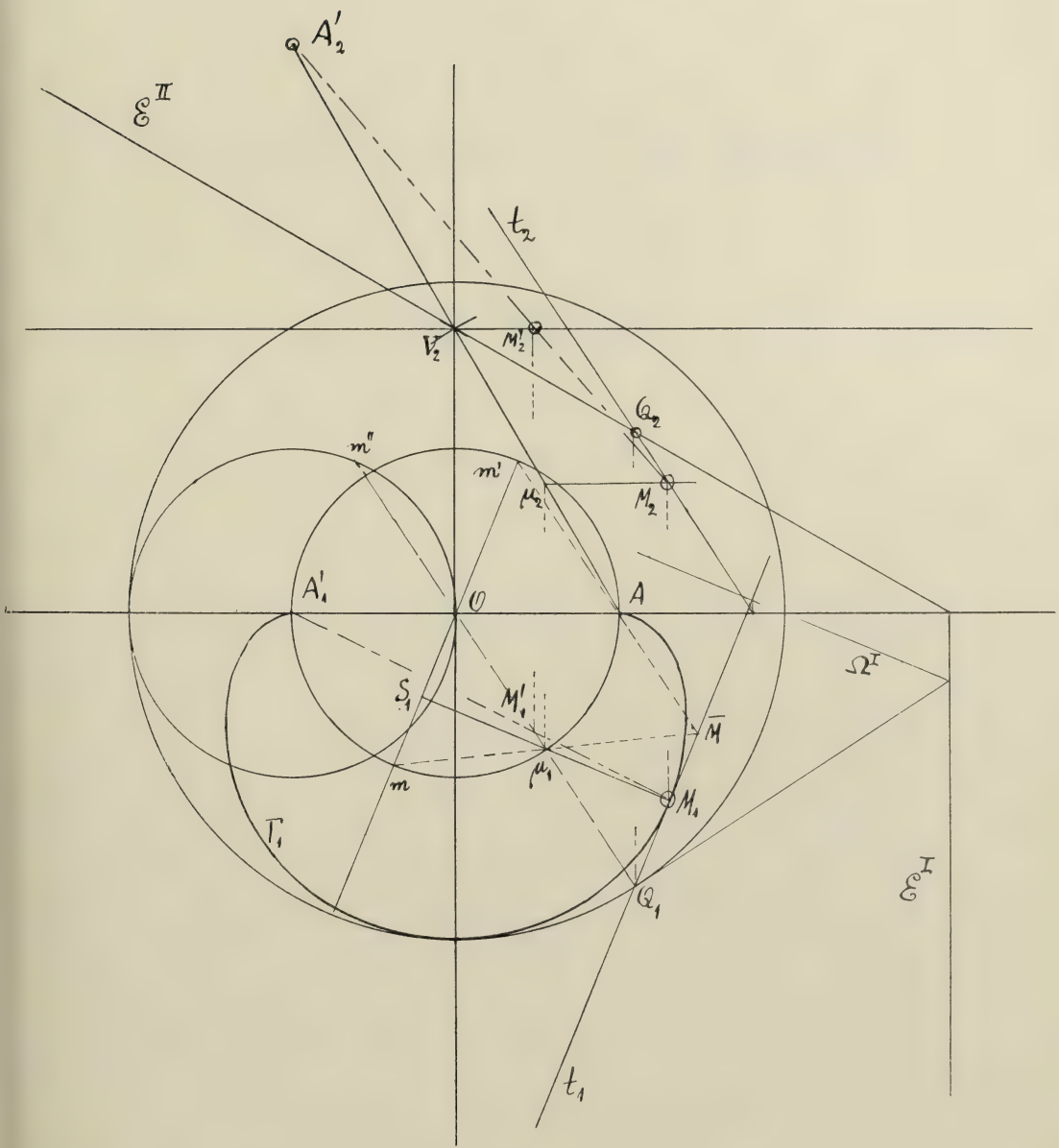
Strana

11. Oskulační rovina a plocha tečen v případě $a = 2c$. Čtveřina oskulačních rovin jdoucích společným bodem. Společné sečny hlavních normál příslušných bodů tvoří komplex 3. stupně. Jednoduchý vztah mezi průseky plochy normál s přímkou směru Oz a oskulačními rovinami příslušných bodů čáry Γ. Konstrukce normál nefroidy z průsečného bodu jiných dvou normál. Parametry průsečíků s rovinou. Zvláštní rovinné čtveřiny. Geometrické místo bodu, v němž se protínají oskulační roviny sestrojené ve třech průsecích čáry s její rovinou oskulační, jest ellipsa.
Osy čáry Γ, které sekou určitou osu, tvoří plochu 2. stupně 50
12. O ploše tečen $a = 2c$. Plochy druhého stupně vepsané ploše tečen se jí dotýkají podél čar 4. stupně a obsahují určité 4 tečny. Průseč plochy s rovinou tečnou promítá se do základní roviny v protiúpatnici strofoidy 59
13. Osy čáry šroubové $a = 2c$. Osy protínající určitou osu čáry Γ tvoří vepsaný hyperboloid. Fokální body kongruence os. Konstrukce os kolmých na danou osu. Osy kolmé na daný směr v základní rovině tvoří konoid 3. stupně . . 72

Tabulka s obrazy 1. a 2.


o_2
$\mathcal{C}^{II}$
V_2
M_2
M'
S_2
Ω^{II}
$\hat{C}'$
γ
O
V_1
A
t_2
A'
m_2
S_1
t_1
σ
Ω^{I}
m
$(\bar{M})$
μ
$\mathcal{D}$
M_1
$\bar{C}$
P
$\mathcal{C}$
φ
σ'
$\mathcal{C}^{I}$
(M)
n

Obr. 1.


A'_2
$\mathcal{E}^{II}$
t_2
V_2
M'_2
Q_2
m''
m'
μ_2
M_2
A'_1
O
A
Ω^I
S_1
M'_1
$\overline{M}$
m
μ_1
M_1
Γ_1
Q_1
$\mathcal{E}^I$
t_1

Obr. 2.

O novém kavkazském druhu rodu Dikerogammarus.

Podává

Dr. Karel Schäferna,
professor gymnasia v Ml. Boleslavi.

(Se 2 tabulkami.)

(Předloženo dne 17. července 1914.)

Ze své cesty po Kavkaze zaslal mi pan PhC. J. Komárek 5 zkumavek se sladkovodními Gammaridy, v nichž poznal jsem ze 4 míst a to: Novorosijska, Čuber-Kari, Čvelieri a Cageri vesměs našeho ubikvista *Gammarus pulex* L.

Gammaridi pocházející ze studánek u města Ordubatu byli mi ihned nápadni svým *slabým prvým párem tykadel* a při bližším přihlédnutí seznal jsem, že mají *na 4. a 5. abdominálním článku* uprostřed na hřbetní straně *po jednom kuželovitém hrbolku*, nesoucím štětiny. I vidno z tohoto znaku, že jedná se o druh rodu *Dikerogammarus*, jak jej stanovil T. R. R. Stebbing, jenž praví: „Agreeing in general with Gammarus. Pleon segments 4 and 5 each raised dorsally to a spiniferous tubercle. Antenna 1st the longer, accessory flagellum well developed. Gnathopods 1 and 2 larger in ♂ than in ♀, 2d larger than 1st".

V celku *náš druh jest charakterisován velikým množstvím štětin a to poměrně tenkých na okončinách* i zovu jej

Dikerogammarus setosus n. sp.

♂♂ jsou velikosti 20—22 *mm*, ♀♀ 16—18 *mm*.

Oči jsou ledvinité.

Antenna 1ho páru dosahující asi $^1/_3$ těla má sice silný násadec o soudečkovitých článcích (opatřený hojnými smyslovými štětičkami), ale flagellum 18tičlenné jest velmi slabé a ne příliš dlouhé, takže jsou obě

antenny téměř stejně dlouhé. Štětinky jsou na flagellu slabé a krátké. Vedlejší bičík 4—5článkový jest složen ze článků dlouhých.

Antenna 2ho páru má dlouhé štětinky vyvinuté v celých hřebíncích na násadci i bičíku. U ♀♀ jest tato výzbroj poněkud v menším počtu. Flagellum 9tičlenné a poměrně silnější flagella antenny prvé.

Palpus mandibulární jest o velmi štíhlých článcích a jest opatřen neobyčejně silnými a hojnými štětinkami na ploše konečného článku.

Na palpech *maxill prvého páru* jsou na vnější straně rovněž hojné štětinky, což rovněž u rodu *Gammarus* nikde neshledáváme.

Gnathopody prvého páru jsou slabší gnathopodů 2ho páru. U ♂ i ♀ jen nepatrně odlišné v propoditu, jenž zejména u 2ho páru vyniká značnou šířkou. Gnathopody 1ho páru mají propodit v celku tvaru trojúhelníkovitého, gnathop. 2ho páru lichoběžníkovitého. U samiček jest propodit obou párů tvaru lichoběžníkovitého. Carpopodit má vnitřní hranu jako úzký výběžek, což zase jest veliký rozdíl proti rodu *Gammarus*.

Epimerální deska 1ho páru jest kosníkovitá a podobně jako epimerální desky ostatních všech okončin thorakálních opatřená hustými neobyčejně dlouhými štětinami. Epimerální desky 3.—5. páru pereiopodů jsou tím větší čím menší jest basipodit.

1. a 2. pár pereiopodů jest zejména na karpopoditu a propoditu opatřen skutečnými kartáčky velmi dlouhých štětin.

Periopoda 3ho až 5ho páru: Basipodit 3ho páru pereiopodů jest krátký, téměř čtvercovitý, na okraji opatřen hojnými štětinami, které, čím dále distálně jdeme, tím jsou delší. Vnitřní strana nese při zadní křídlovité rozšířenině shora dolů jdoucí hřebínky dlouhých a ne příliš tvrdých štětin; i přední kraj má štětinky při vnitřní straně. U samiček jsou v celku tytéž poměry, jen skupiny štětin jsou nepatrně chudší. — Basipodit 4ho páru pereiopodů jest klínovitý a u ♂ poněkud užší než u ♀. Zadní okraj vyniká dlouhými štětinami. Rovněž při křídlovitém rozšíření basipoditu na zad jsou na vnitřní straně shora dolů se táhnoucí shluky dlouhých štětin. — Nejcharakterističtějším jest basipodit 5ho páru pereiopodů. U ♂ jest tento téměř tvaru obdélníkovitého se značnou zadní křídlovitou rozšířeninou. U ♀ jest křídlo to značně větší se zadním krajem obloukovitě vyklenutým, i jest tvaru poloměsíčitého, při čemž zadní roh basipoditu značně i dolů jest protažen. Zařízení toto slouží patrně lepší ochraně embryonů v zárodečných lamellách, jež jsou v celku úzké a nemohl jsem nikde na jich okraji nalézti štětin, ač lamelly ony mají okraje slabě laločnaté. U ♂ jest basipodit na vnitřní straně pokryt rovněž chlupy; samičky pak zase je mají jen o něco málo v menším počtu. Na ostatních článcích jsou pereiopody 3ho—5ho páru opatřeny mocnými svazečky štětinek.

Postranní rozšíreniny 1ho a 2ho článku abdominálního jsou opatřeny kýlem, a nesou obě téměř až do své poloviny (zejména deska druhá) hřebínky dlouhých štětinek, mezi nimiž tu a tam se vyskytne i trn.

Postranní deska 3ho článku abdominálního až na několik slabounkých zadních marginálních štětinek jest i na ploše i na okraji u obou pohlaví úplně lysá.

Basální články *pleopodů* jsou rovněž charakteristické hřebínky štětinek.

Uropod 6ho článku abdominálního jest neobyčejně bohatě opatřen na exopoditu štětinami. Exopodit pak nese jen slabý ve štětinkách téměř skrytý svůj druhý článek. Endopodit jest trojúhelníkovitý a jen málo štětinami opatřený.

4tý a 5tý segment abdominální nese kuželovité hrbolky chápacími štětinkami opatřené.

*

Popsaný druh *Dikerogammarus setosus* nachází se, jak již z počátku bylo zmíněno, ve velmi studených studánkách na břehu řeky Arasu u města Ordubatu (při hranici rusko-perské), tedy v úvodí moře Kaspického.

Rozhlédneme-li se po dosud popsaných druzích rodu *Dikerogammarus*, dostaneme následující přehled jejich výskytu:

D. macrocephalus (O. Sars) v Kaspickém moři ve hloubce 66 *m*.

D. haemobaphes (Eichw.) v Kaspickém a Černém moři při pobřeží do hloubky 75 *m*; též v jezeře Aralském.[1])

D. grimmi (O. Sars) v Kaspickém moři v hloubce 66—203 *m*.

D. verreauxii (Bate) v Novém Hollandu.

D. fasciatus (Say) v studánkách a potůčcích Severní Ameriky.

Jest tedy rod *Dikerogammarus* svými druhy převážnou většinou ve vodách slaných, jen *D. fasciatus* jest pravou formou sladkovodní. Jest tedy náš *D. setosus* druhou skutečnou formou sladkovodní z rodu *Dikerogammarus*.

Jelikož jinak rod tento v několika druzích se vyskytuje v Kaspickém moři a jinde řídko a jelikož řeka Aras jest v oblasti Kaspického moře, jest velmi pravděpodobno, že jest *D. setosus* formou, která ze slané, resp. brakické vody zašla do vod sladkých a stala se tak formou čistě sladkovodní. Byl by to zase doklad, jak formy vod slaných i brakických zacházejí do vod sladkých, jak o tom psal Pelseneer i R. Gurney. V oblasti kaspické pak více než kde jinde může docházeti ku podobným zjevům. Moře Kaspické totiž v dávných dobách představovalo samostatné velké moře Ponto-Aralo-Kaspické, ale později se osamostatnilo a voda jeho do něho ústícími řekami se značně vysladila. Formy, které v onom jezeře pozůstaly, musí býti jistě euryhalinní, neboť jinak by byly již dávno propadly zničení, i mohou tedy jistě snáze než jiné vnikati do vod sladkých. — Stojíme tedy v našem případě zase před jedním „experimentem přírody“,

[1]) Fedtschenko popsal jej jako *Gammarus aralensis* (1875), ale Stebbing jej stahuje pod specii *Dikerogammarus haemobaphes* (Eichw.).

jak Gurney říká: „Natur herself has performed experiments in acclimatisation on a vast scale". — Byla by tedy cesta našeho druhu z jezera Kaspického řekou Arasem do studánek při Arasu ležících. — Jest pak velmi pravděpodobno, že budoucí bádání v oblasti kaspické ukáží nám nová přizpůsobení velmi variabilní skupiny Gammaridů elementu sladkému.

Srovnáme-li pak údaje v literatuře o druhu *Dikerogammarus fasciatus* s našimi údaji o *D. setosus*, vidíme, že tvarově stojí si obě specie blízko. Vyvinuly se oba druhy daleko od sebe geograficky vzdálené z forem mořských, a na základě žití ve stejných podmínkách životních vyvinuly se u obou konvergencí podobné znaky.

Porovnáváním tvarů formy *Dikerogammarus setosus* s tvary mnou popsaného rodu a druhu *Typhlogammarus Mrázeki* jest nápadná podobnost obou ve tvarech i výzbroji. Zejména jsou to tvary gnathopodů pokud se týče jejich propoditů i karpopoditů. U *Typhlogammara* schází druhý apikální článek exopoditu — u *Dikerogammarus setosus* pak jest článek tento zcela nepatrný, zakrsalý. Dále pak jsou to u obou charakteristické skupiny štětinek v podobě štětiček neb hřebínků. I bylo by snad možno viděti v *Dikerogammarus setosus* povrchovou formu, z jejíhož příbuzenstva vzal původ svůj podzemní rod *Typhlogammarus*.

(O popsaném druhu přednášel jsem i na V. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů v Praze, roku letošního o letnicích. Výtah oné přednášky bude uveřejněn ve Věstníku sjezdovém.)

V Mladé Boleslavi, dne 16. června 1914.

Literatura.

C. Spence Bate: Catalogue of the specimens of Amphipodous Crustacea in the collection of the British Museum. London. 1862.

Robert Gurney: The origin and conditions of existence of the fauna of fresh water. Transactions of the Norfolk and Norwich Naturalists Society, vol. IX, 1913.

Pelseneer: L'origine d'animaux d'eau douce.

K. Schäferna: O novém slepém blešivci, Typhlogammarus n. sbg. Věstník kr. čes. Společ. Náuk. Praha. 1906.

Týž: Über eine neue blinde Gammaridenart aus Montenegro. Zoolog. Anzeiger, Bd. XXXI, 1907.

T. R. R. Stebbing: Amphipoda I. Gammaridea. Tierreich. XXI., Berlin. 1906

TABULE I.

1. *Dikerogamarus setosus* ♂ Zvětšení Reichert. lupou 10 ×.
2. Maxilla 1ho páru. Obj. *A*, oc. 3 Zeiss.
3. Mandibulární palpus ,, *A* ,, 3 ,,
4. Gnathopod 2ho páru od ♂ Obj. *A* (bez frontní čočky), oc. 2 Zeiss.
5. ,, 1ho ,, od ♂ ,, ,, ,, ,,
6. Pereiopod 1ho ,, od ♂ ,, ,, ,, ,,
7. ,, 2ho ,, od ♂ ,, ,, ,, ,,

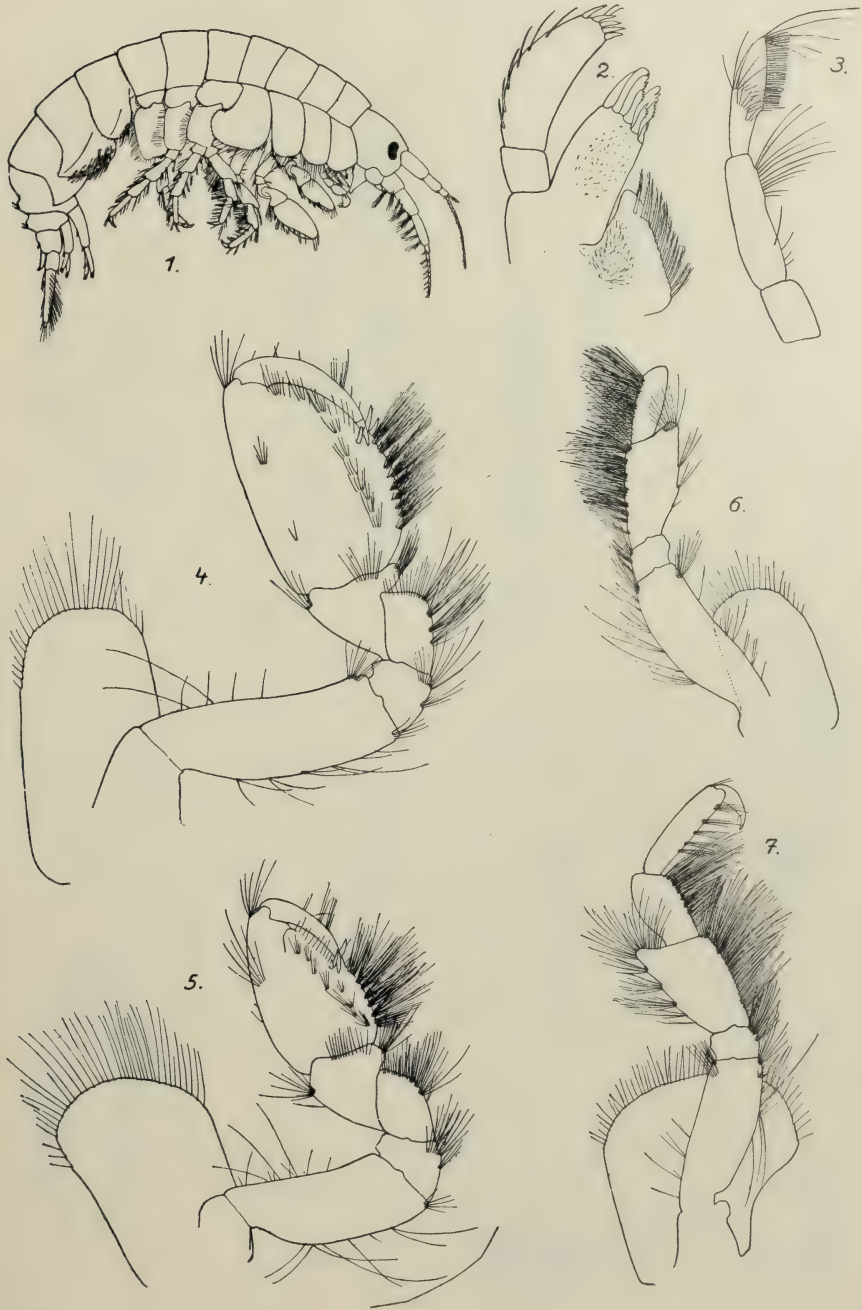
TABULE II.

8. Pereiopod 3ho páru od samečka. Obj. *A* (bez frontní čočky), oc. 2 Zeiss
9. ,, 4ho ,, ,, ,, ,, ,, ,, 2 ,,
10. ,, 5ho ,, ,, ,, ,, ,, ,, 2 ,,
11. ,, 3ho ,, od samičky s vnitřní strany ,, ,, ,, 2 ,,
12. ,, 4ho ,, ,, ,, s vnitřní strany ,, ,, ,, 2 ,,
13. ,, 5ho ,, ,, ,, s vnitřní strany ,, ,, ,, 2 ,,
14. Uropod 3ho páru. Obj. *A*, oc. 2, Zeiss.
15. Postranní deska 1ho segmentu pleopodového. Obj. *A* (bez front. čočky), oc. 2 Zeiss.
16. ,, ,, 2ho ,, ,, ,, ,, ,, ,,
17. ,, ,, 3ho ,, ,, ,, ,, ,, ,,
18. Antenna 1ho páru. Obj. *A*, oc. 2 Zeiss.
19. ,, 2ho ,, ,, ,, ,,

Všechna vyobrazení jsou nakreslena pomocí Abbéova kreslicího přístroje a při reprodukci na ½ zmenšena.

Dr. KAREL SCHÄFERNA:

O novém kavkazském druhu rodu Dikerogammarus.



8.
9.
10.
18.
11.
12.
13.
19.
14.
15.
16.
17.

Odvození pohyblivého radiantu Lyrid z tvaru meteorického roje.

Napsal

Dr. JINDŘICH SVOBODA.

(Předloženo dne 12. června 1914.)

S 1 obrazcem v textu.

Úvod.

V předešlé práci *„O tvaru meteorického roje komety Halleyovy"* dospěl jsem k výsledku, že dráhy většiny meteoritů roj tvořících jsou ellipsy shodné s dráhou komety, jichž roviny se protínají ve spojnici perihelu s afelem komety, takže mají s kometou perihel i afel společný. Po skončení této práce dostalo se mi do rukou Olivierovo pojednání „175 parabolic orbits and other results deduced from over 6200 meteors" (Extracted from Transactions of the American Philosophical Society, N. S. Vol. XXII, Part 1, 1911), kde uvedeny jsou též elementy Aquarid a Orionid vypočtené na základě pozorování. Pro srovnání uvádím tyto elementy Olivierovy vedle svých, které jsem obdržel v práci předešlé:

		Ω °	ω °	i °	q	α °	δ °
Kometa Halleyova		57·3	111·7	162·2	0·587		
Aquaridy	Olivier	47·5	105·3	165·4	0·638	337·9	— 1·5
	Svoboda	44·8	99·8	163·3	0·587	337·2	— 0·9
Olivier-Svoboda		+ 2·7	+ 5·5	+ 2·1	+ 0·051	+ 0·7	— 0·6
Orionidy	Olivier	25·6	87·8	161·4	0·536	91·1	14·9
	Svoboda	23·4	79·3	163·2	0·587	90·7	15·4
Olivier-Svoboda		+ 2·2	+ 8·5	— 1·8	— 0·051	+ 0·4	— 0·5

Nepatrné rozdíly, které leží v mezích pozorovacích chyb, potvrzují správnost svrchu uvedené hypothesy o tvaru meteorického roje. Jest zajímavo, že podobnost některých elementů Aquarid a Orionid byla již Olivierovi nápadná. Uváděje je pod sebou praví o nich: „There is a curious coincidence between some of the elements of the Aquarids and the main Orionid stream. One can see how closely the inclinations agree, and also that the perihelion distances do not differ very greatly." Pro značný rozdíl v elementech ostatních, jehož příčinu neznal, nemohl se odvážiti provésti domněnku o totožnosti obou rojů. Porovnáme-li elementy Orionid s elementy dráhy komety Halleyovy, které jsou uvedeny v čele, pochopíme snadno, proč dřívější methodou z podobnosti elementů nebylo možno objeviti souvislost tohoto meteorického roje s kometou Halleyovou.

Abych hypothesu o tvaru meteorického roje ještě více potvrdil, applikoval jsem ji na známý meteorický roj Lyrid a odvodil jsem týž pohyb radiantu, jaký na základě pozorování obdržel Denning.*)

Roj *Lyrid*, jehož radiant jest činný kolem 21. dubna, souvisí s kometou 1861 I.**) Oppolzer udává tyto elementy její dráhy***):

$$\left.\begin{aligned} T &= 1861 \text{ červen } 3{\cdot}39641 \\ \omega &= 213^0\ 26'\ 19'' \\ \Omega &= 29\ 55\ 42 \\ i &= 79\ 45\ 31 \end{aligned}\right\} 1861{\cdot}0$$

$$\log q = 9{\cdot}9641181$$
$$e = 0{\cdot}98346314$$
$$U = 415{\cdot}430 \text{ roků.}$$

Pro náš výpočet byly tyto elementy zaokrouhleny na minuty a přepočítány na ekliptiku a aequinoctium 1910·0:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 213^0\ 26' \\ \Omega &= 30\ 37 \\ i &= 79\ 46 \end{aligned}\right\} 1910{\cdot}0$$

$$q = 0{\cdot}92070$$
$$e = 0{\cdot}98346.$$

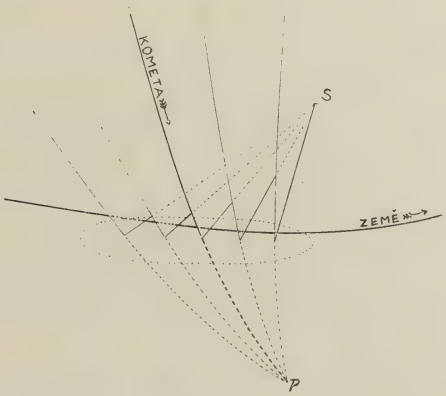
Konstrukcí najdeme, že dráha komety přibližuje se dráze zemské v blízkosti uzlu sestupného. Otáčející se dráha komety kolem spojnice perihelu s afelem neprotne dráhu zemskou, nýbrž, jak se dalším vý-

*) The Observatory, Vol. XXXVIII, April 1914, No. 473, p. 179.

**) Astr. Nachr. LXVIII., 381. LXIX., 33.

***) Dr. J. G. Galle: Verzeichnis der Elemente der bisher berechneten Cometenbahnen usw., p. 90, 243. Leipzig, 1894.

počtem přesvědčíme, posunuje se podél ní (viz obr.) protínajíc rovinu ekliptiky v bodech dráze zemské velmi blízkých. Má-li roj Lyrid tentýž tvar, jaký jsme dokázali u roje komety Halleyovy, prochází Země rojem napříč — tečkovaná ellipsa na obrázku naznačuje průsek roje s rovinou ekliptiky —, a poněvadž elementy drah meteoritů, s nimiž se Země postupně setkává, se velmi rychle mění, obdržíme výpočtem radiant mnohem rychleji na obloze postupující, než by plynulo ze změny apexu za předpokladu, že dráhy meteoritů jsou rovnoběžné s dráhou komety.



Výpočet provedl jsem tímto způsobem: Na dráze zemské v okolí uzlu (v našem případě sestupného) zvolil jsem si určité body, posice země v intervallech dvou dnů. O dráhách meteoritů jsem předpokládal, že jsou téhož tvaru jako dráha komety, s níž mají perihel a afel společný; roviny těchto drah proložil jsem středem Slunce, Země a perihelem komety. K výpočtu jejich elementů odvodil jsem na základě svrchu uvedených předpokladů tyto vzorce:

$$\begin{aligned} \cos n \sin N &= \cos \omega \\ \cos n \cos N &= \sin \omega \cos i \\ \sin n &= \sin \omega \sin i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \omega' \sin i' &= \sin n \\ \sin \omega' \cos i' &= -\cos n \sin (\Omega' - \Omega - N) \\ \cos \omega' &= \cos n \cos (\Omega' - \Omega - N), \end{aligned}$$

kdež značí Ω, ω, i elementy dráhy komety a Ω', ω', i' elementy dráhy meteoritu Zemi potkávajícího. Délka uzlu výstupného Ω' jest dána délkou Slunce $\odot$, kterou najdeme pro příslušné datum v Berl. Jahrbuchu, a sice v případě, že Země potkává roj v uzlu

	výstupném,	sestupném,
jest	$\Omega' = 180^0 + \odot$	$\Omega' = \odot$.

Za směr meteoritů Zemi potkávajících přijal jsem směr tečné v bodě, ve kterém dráha meteoritů protíná rovinu ekliptiky, což nebylo přesnosti výpočtu nijak na újmu, neboť tyto body, jak numerický výpočet ukáže, jsou Zemi velmi blízké. Vzdálenost jejich od Země udává rozdíl průvodičů $r_m - r_z$. Průvodič Země r_z najdeme pro příslušné datum v Berl. Jahrbuchu a radius vektor meteoritu v rovině ekliptiky dává vzorec

$$r_m = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

kdež p jest vzdálenost perihelu komety od Slunce, e numerická excentricita její dráhy a φ pravá anomalie, která jest dána vzdáleností perihelu od uzlu ω' a sice v případě, že Země potkává roj v uzlu

	výstupném,	sestupném,
jest	$\varphi = 360^0 - \omega'$	$\varphi = 180^0 - \omega'$.

Výpočet radiantu skutečného a zdánlivého proveden byl na základě vzorců uvedených v práci předešlé „O tvaru meteorického roje komety Halleyovy".

Výpočet.

Duben	17.	19.	21.	23.	25.	27.
$\odot$ *) =	$26^0\,34'$	$28^0\,31'$	$30^0\,28'$	$32^0\,25'$	$34^0\,22'$	$36^0\,18'$

Poněvadž jest to v uzlu sestupném, jest $\Omega' = \odot$.

$i' =$	$73^0\,54'$	$76^0\,41'$	$79^0\,33'$	$82^0\,29'$	$85^0\,28'$	$88^0\,27'$
$\omega' =$	$214^0\,21'$	$213^0\,52'$	$213^0\,28'$	$213^0\,9'$	$212^0\,57'$	$212^0\,51'$
$\varphi =$	$325^0\,39'$	$326^0\,8'$	$326^0\,32'$	$326^0\,51'$	$327^0\,3'$	$327^0\,9'$
$r_m =$	1·0163	1·0136	1·0115	1·0099	1·0088	1·0083
r_z *) =	1·0041	1·0046	1·0052	1·0057	1·0062	1·0068
$r_m - r_z =$	0·0122	0·0090	0·0063	0·0042	0·0026	0·0015

Jednoduchým výpočtem bychom shledali, že minimum rozdílu průvodičů padá mezi 27. a 28. duben (0·00137); od té doby se pak zase zvětšuje. Poněvadž meteoritů směrem od dráhy komety na obě strany ubývá, musí maximum meteoritů připadati na dobu, kdy jsou dráhy jejich dráze komety nejblíže; to jest, jak se snadno přesvědčíme porovnáním vypočtených elementů s elementy dráhy komety, 21. dubna, což s pozorováním souhlasí.

*) Berl. Jahrbuch, 1910.

Duben	17.	19.	21.	23.	25.	27.
$\sigma =$	162° 40′	162° 55′	163° 8′	163° 17′	163° 23′	163° 26′
Souřadnice apexu						
$L =$	295° 39′	297° 35′	299° 34′	301° 31′	303° 29′	305° 26′
$\psi =$	107° 54′	107° 25′	107° 1′	106° 40′	106° 27′	106° 19′
$\vartheta =$	105° 6′	102° 28′	99° 45′	96° 57′	94° 6′	91° 15′
Poměr rychlostí						
$\frac{v}{V} =$	1·4107	1·4111	1·4114	1·4118	1·4122	1·4126
Úchylka zdánlivého směru od pravého						
$\chi =$	40° 1′	39° 15′	38° 26′	37° 34′	36° 39′	35° 43′
Ekliptikální souřadnice zdánlivého radiantu jsou						
$\lambda =$	262° 9′	266° 56′	271° 26′	275° 39′	279° 34′	283° 11′
$\beta =$	59° 39′	58° 24′	57° 1′	55° 31′	53° 57′	52° 18′
z nichž obdržíme *aequatoreální souřadnice zdánlivého radiantu*:						
$\alpha =$	265° 5′	268° 2′	270° 56′	273° 47′	276° 32′	279° 12′
$\delta =$	36° 20′	34° 59′	33° 35′	32° 10′	30° 43′	29° 17′

Na rychlý postup radiantu Lyrid upozornil již v r. 1890 Denning*): „The Lyrids of April exhibit a radiant which quickly changes its place during the few nights of its operation.“ Teprve letošního roku odvodil na základě pozorování jeho efemeridu,**) která velmi pěkně souhlasí s výsledky, které jsem odvodil počtem na základě svrchu uvedeného předpokladu o tvaru meteorického roje. Pro srovnání uvádím oba výsledky vedle sebe:

	Denning		Svoboda		Den.-Sv.	
	α	δ	α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	°	°	°	°	°	°
Duben 15.	263·5	+ 33				
16.	264·75	+ 33				
17.	266·0	+ 33	265·1	36·3	+ 0·9	— 3·3
18.	267·25	+ 33				
19.	268·5	+ 33	268·0	35·0	+ 0·5	— 2·0
20.	269·75	+ 33				
21.	271·0	+ 33	270·9	33·6	+ 0·1	— 0·6

*) Monthly Notices, Vol. L. p. 415, 1890.
**) The Observatory, Vol. XXXVII., April, 1914, No. 473, p. 179.

	Denning		Svoboda		Den.-Sv.	
	α	δ	α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	0	0	0	0	0	0
22.	272·25	+ 33				
23.	273·5	+ 33	273·8	32·2	— 0·3	+ 0·8
24.	274·75	+ 33				
25.	276·0	+ 33	276·5	30·7	— 0·5	+ 2·3
26.	277·25	+ 33				
27.	278·5	+ 33	279·2	29·3	— 0·7	+ 2·7

Stálou deklinaci v efemeridě Denningově lze si vysvětliti tím, že Denning posice radiantů neodvozuje z pozorování jedné noci, nýbrž průměrem z pozorování vykonaných v několika po sobě jdoucích nocích. Při tomto způsobu vyniknou jen větší změny v souřadnicích, kdežto malé změny, jako zde v deklinacích, které ostatně leží v mezích pozorovacích chyb, se setřou. Uvážíme-li, že první dvě a poslední tři posice efemeridy Denningovy jsou odvozeny interpolací ze středních, dále že posice krajních radiantů nelze určiti s takovou přesností jako posice radiantů kolem doby maxima, musíme přiznati, že shoda zde docílená jest novým důkazem správnosti svrchu uvedené theorie o tvaru meteorického roje.

Snahou dokázati totéž u Perseid přiveden jsem byl k zajímavému objevu že postupující radiant Denningův*) vznikl nesprávnou kombinací meteoritů dvou samostatných rojů, z nichž jeden souvisí s kometou 1862 III., druhý s kometou 1870 I. O tom pojednám v práci další.

*) Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. LIII. p. 210, 1899; Companion to The Observatory, 1914, p. 22.

O zvláštním způsobu určení kuželů a několik příslušných úloh cyklografických.

Napsal

J. Sobotka.

(Se 3 obrazci v textu.)

Předloženo dne 30. září 1914.

1. V časopise Archiv für Mathematik und Physik, roč. 1913, zabývá se E. Müller úlohou, čtyřmi body položiti rotační kužel, daného směru osy a na základě této úlohy řeší úlohu, ke čtyřem cyklům v rovině libovolně daným sestrojiti takový cyklus v jejich rovině, aby dvojice orientovaných tečen jemu společných s cykly danými tvořily stejné úhly.

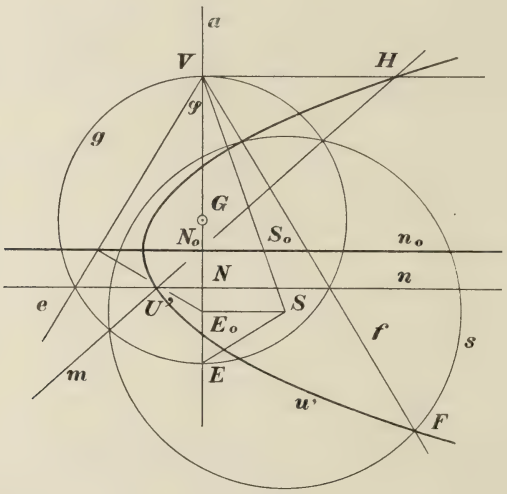
Věnuji zde této zajímavé konstrukci bližší pozornost a zobecním ji pro prostor řešením úlohy, *k daným pěti koulím orientovaným sestrojiti takovou orientovanou kouli, která s danými má společné dotyčné kužele navzájem shodné.* Budiž při řešení tom brán zřetel též k analytickému vyjádření konstrukcí.

2. Ve příčině úlohy *čtyřmi body* A_1, A_2, A_3, A_4 *položiti rotační kužel,* jehož osa by byla rovnoběžna k dané přímce a_0, možno též postupovati zcela elementárně.

Za tím účelem zabývejme se nejprve stanovením průseku u rotačního kužele V s koulí K a vyjádřeme jeho othogonální průmět u' do roviny M, která spojuje střed S plochy kulové s osou a kužele. Veďme (obr. 1.) v rovině M vrcholem V kužele V kružnici g, která má svůj střed G na ose a; m budiž přímka potenční této kružnice a hlavního kruhu s plochy K v rovině M ležícího. Přímka m nechť protíná tečnu v bodu V ke kružnici g v bodě H. Konečně budiž n spojnice průsečíků křivky g s površkami e, f kužele V, ležícími v rovině M. Průsečík U' přímek m, n náleží křivce u', neboť n resp. m jest průmětem průsečné kružnice s kuželem V resp. s koulí K oné koule, která má g za kružnici největší.

Všecky kružnice g tvoří svazek, dotýkajíce se v bodě V; jejich chordály m s kružnicí s tvoří svazek paprsků (m) o středu H, který jest

projektivní ku řadě středů kružnic g, tudíž také ke svazku (n) rovnoběžek n. Svazky (m), (n) vytvořují kuželosečku, která prochází bodem H, majíc v něm tečnu kolmou ku VS. Nekonečně vzdálené přímce svazku (n) přísluší v (m) přímka VH; ježto zde jest přímka SG rovnoběžná ku a, jest nekonečně vzdálená přímka roviny M tečnou k u', a u' jest tedy parabolou.



Obr. 1.

Protíná-li rovina bodem $e \,.\, n$ kolmo ku e jdoucí osu a v bodě E, jest, značí-li U bod křivky u promítající se do U', UE normálou v bodě U ke kuželi V a poloměr US jest normálou v U ke K. Tudíž jest $E\,S$ stopou roviny normálné k u v bodě U a normála k u' v bodě U' jest rovnoběžna ku $E\,S$. Značí-li N průsečík přímky n s a a je-li $\sphericalangle (a\,e) = \varphi$, jest

$$\frac{V\,N}{V\,E} = cos^2\,\varphi.$$

Spustíme-li s bodu S kolmici ku a a s její paty E_0 kolmici ku e a vedeme-li patou této kolmice kolmici n_0 ku a, jež nechť protíná a v bodě N_0, $S\,V$ v bodě S_0, jest

$$\frac{V\,S_0}{V\,S} = \frac{V\,N_0}{V\,E_0} = \frac{V\,N}{V\,E} = cos^2\,\varphi;$$

tudíž jest $N\,S_0 \parallel E\,S$. Vztahujeme-li tedy u' ku n_0, jest pro u' subnormála bodu U' rovna $N_0\,S_0$. Křivka u' má tudíž vlastnost, že délka její subnormály vzhledem ku n_0 jest konstantní. Vidíme opět, že u' jest parabola; tato má n_0 osou a její parametr rovná se $N_0\,S_0 = E_0\,S\,cos^2\,\varphi$.

3. Za účelem řešení úlohy v odst. 2. vytčené položme body A_1, A_2, A_3, A_4 parabolický válec Z, jehož přímky jsou kolmy ku dané přímce a_0, tedy rovnoběžny k rovině N, stojící kolmo ku a_0. Sdružme čtyři tyto

body ve dvakrát tři, na př. A_1, A_2, A_3; A_1, A_2, A_4. Rovina $A_1 A_2 A_3$ protne rovinu N v přímce d a rovinu $A_1 A_2 A_4$ v přímce c. Body A_1, A_2, A_3 prochází parabola p_1 mající osu rovnoběžnou ku d a body A_1, A_2, A_4 prochází parabola p_2 o ose rovnoběžné ku c. Parabolami p_1, p_2 jest válec Z jednoznačně určen. Sestrojíme pak na př. průsečík F_1 paraboly p_1 s přímkou d_1, která jest rovnoběžna ku d a půlí úsečku $A_1 A_2$, z Pascalova šestiúhelníka $P P_1 F_1 A_3 A_2 A_1$, kde P značí na d_1 ležící bod nekonečně vzdálené přímky roviny $A_1 A_2 A_3$ a P_1 jest na této přímce bod ku P soumezný. Rovněž stanovme průsečík F_2 paraboly p_2 s přímkou c_2, která jest rovnoběžna ku c a půlí $A_1 A_2$. Spojnice $F_1 F_2$ udává pak směr válce Z.

Dále sestrojme kouli K o středu S, která prochází body A_1, A_2, A_3, A_4 a položme bodem S rovinu M normálnou ku $F_1 F_2$. Tato rovina vytíná z válce Z parabolu p, která jest orthogonální projekcí průseku ploch Z, K do roviny M. Buďtež e, f přímky spojující průsečíky paraboly p s největším kruhem s koule K v rovině M ležícím a V budiž průsečík přímek e, f, tedy jeden vrchol společného polárního trojúhelníka křivek p, s. Kolmice a s bodu V na osu paraboly p půlí jednu dvojici vrcholových úhlu tvořenou přímkami e, f. Rotací přímky e kolem a vzniká nyní kužel V. Průsečná křivka u ploch V, K promítá se, vzhledem k odst. 2., orthogonálně do roviny M v parabolu u', mající osu téhož směru jako p; a ježto u' má s křivkou p společny ještě průsečíky přímek e, f s kružnicí s, jsou paraboly p, u' totožné a plochy V, K, Z protínají se v křivce u náležíce témuž svazku ploch.

Z toho plyne, že uvedený právě kužel V vyhovuje podmínkám naší úlohy; prochází body A_1, A_2, A_3, A_4 a jeho osa a jest rovnoběžna k dané přímce a_0.

Jsou-li tedy plochy K, Z stanoveny, stačí sestrojiti středem S plochy K rovinu kolmou ke směru válce Z a určiti průsečné křivky její s, u' s plochami K, Z. Vrcholy společného polárního trojúhelníka křivek s, u' jsou vrcholy a jimi jdoucí společné tetivy křivek s, u' jsou vždy dvě přímky rotačních kuželů, které naši úlohu řeší.

4. Má-li parabolický válec procházeti body A_1, A_2, A_3, A_4, můžeme ještě voliti rovinu, k níž jeho směr má býti rovnoběžný; pak jest válec obecně jednoznačně dán.

Pěti body $A_1, \ldots, A_5$ položiti parabolický válec jest úloha neurčitá. Můžeme libovolnými třemi z nich, na př. A_1, A_2, A_3 sestrojiti libovolnou parabolu a tuto promítnouti z bodů A_4, A_5 kuželi A_4, A_5. Roviny vedené body A_4, A_5 rovnoběžně ku $A_1 A_2 A_3$ dotýkají se kuželů A_4, A_5 a mají též rovnoběžné hrany dotyčné, jež jsou též rovnoběžny k ose paraboly p. Posuneme-li nyní jeden z těchto kuželů, na př. druhý z nich do A_5' tak, aby jeho vrchol splynul s vrcholem prvního, splynou zmíněné rovnoběžné roviny tečné i jejich přímky dotyčné a kužele A_4, A_5' protínají se tudíž ještě ve dvou přímkách l, m. Oba válce jdoucí p a rovnoběžné ku l resp. m, vyhovují podmínkám naší úlohy. Obdržíme tím dvojici válců. Abychom

obdrželi všecky takovéto dvojice válců, nutno uvažovati souhrn parabol p, které procházejí body A_1, A_2, A_3.

Zvláštní zájem skytá úloha, šesti body $A_1, \ldots A_6$ sestrojiti parabolický válec, která jest prostorovým zobecněním úlohy, čtyřmi body v rovině sestrojiti parabolu. Leží-li čtyři z bodů těch, na př. $A_1, \ldots, A_4$, v jedné rovině, položme jimi obě (reálné nebo imaginárné) paraboly p_1, p_2 a sestrojme válce body A_5, A_6 a parabolou p_1, resp. body A_5, A_6 a parabolou p_2, způsobem právě uvedeným. Neleží-li však žádné čtyři z daných bodů v jedné rovině, máme zde specielní případ úlohy:

Šesti body $A_1, \ldots, A_6$ položiti kužel, jenž dotýká se dané roviny R *dle jedné površky.*

Rozdělíme dané body ve dvě skupiny po třech, na př. $A_1\,A_2\,A_3$, $A_4\,A_5\,A_6$. Roviny P, Q trojúhelníků $A_1\,A_2\,A_3$, $A_4\,A_5\,A_6$ nechť se protínají v přímce r, roviny P, R v přímce q a roviny Q, R v přímce p. Zvolme na q libovolné dva body K_1, K_2. Body $A_1\,A_2\,A_3\,K_1\,K_2$ v rovině P stanoví kuželosečku k_π a její průsečíky s r určují s body A_4, A_5, A_6 kuželosečku $k_\varkappa$ v rovině Q, která protíná přímku p v bodech K_1', K_2'.

Seznáváme, že každé dvojici bodů K_1, K_2 na q přísluší jednoznačně dvojice K_1', K_2' na p a naopak.

Zvolíme-li v R kružnici nebo jakoukoli pevnou kuželosečku w a promítneme-li na ni z libovolného jejího bodu O dvojice $K_1\,K_2$, $K_1'\,K_2'$ do $\overline{K}_1\,\overline{K}_2$ resp. $\overline{K_1'}\,\overline{K_2'}$, jest tím v rovině R přímce $k = \overline{K}_1\,\overline{K}_2$ jednoznačně přiřazena přímka $k' = \overline{K_1'}\,\overline{K_2'}$ a naopak. Toto přiřazení jest kollineací; neboť zvolíme-li v rovině R libovolnou přímku k a promítneme její průsečíky s křivkou w z bodu O na q do K_1, K_2 a sestrojíme kuželosečku body $A_1\,A_2\,A_3\,K_1\,K_2$ danou, určíme její průsečíky s přímkou r a sestrojíme kuželosečku určenou těmito průsečíky a body A_4, A_5, A_6, protíná tato křivka přímku p ve dvou bodech, jejichž průměty z bodu O na w stanoví jednoznačně přímku k'. Naopak přísluší každé přímce k' jednoznačně přímka k. Libovolný svazek (k) přímek k, o středu K, vytíná na w involuci, která se promítá z bodu O na q rovněž v involuci bodovou. Spojíme-li body každé dvojice této involuce J s body A_1, A_2, A_3 kuželosečkou, obdržíme svazek kuželoseček, jenž vytíná na r involuci J_r. Kuželosečky, které spojují dvojice involuce J_r s body A_4, A_5, A_6, tvoří opět svazek a stanoví na p involuci J', jejímž průmětem z bodu O na w jest opět involuce. Spojnice k' dvojic této involuce jsou přímky příslušné paprskům svazku (k); protínají se všecky v bodě K', pólu involuce naposled uvedené. V našem přiřazení přísluší tedy bodu K jednoznačně bod K' a každé přímce k bodem K jdoucí přímka k' jdoucí bodem K'. Jde tedy skutečně o kollineaci.

V této kollineaci odpovídá kuželosečce w kuželosečka w'. Obě mají čtyři společné tečny t_1', t_2', t_3', t_4'. Počítáme-li tyto ku poli přímek k', odpovídají jim naší kollineací v poli přímek k přímky t_1, t_2, t_3, t_4, dotý-

kající se křivky w. Promítněme z bodu O dotyčný bod kuželosečky w s přímkou t_i na q do T_i a s přímkou t_i' na p do T_i^*. Splynou-li body dvojice $K_1 K_2$ v bodě T_i, splynou vzhledem k naší konstrukci také body příslušné dvojice $K_1' K_2'$ v bodě T_i^*. Přímka $T_i T_i^*$ jest hranou kužele V, který prochází šesti danými body a dotýká se R podél této hrany. Roviny P, Q protínají tento kužel v kuželosečkách, z nichž prvá jde body A_1, A_2, A_3 a dotýká se q v bodě T_i, kdežto druhá jde body A_4, A_5, A_6 a dotýká se p v bodě T_i^*.

Za účelem jednoduchého stanovení uvažované kollineace zvolme čtyři dvojice bodů $K_1 K_2$ na q tak, aby jak kuželosečky $k_\pi^{(i)}$ jimi určené, tak i příslušné kuželosečky $k_\varkappa^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ rozpadly se ve dvojice přímek; na př. tak, aby v rovině P přímky $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ tvořily postupně části kuželoseček $k_\pi^{(1)}$, $k_\pi^{(2)}$, $k_\pi^{(3)}$, $k_\pi^{(4)}$ a přímky $A_5 A_6$, $A_5 A_6$, $A_4 A_5$, $A_4 A_5$ příslušně části kuželoseček $k_\varkappa^{(1)}$, $k_\varkappa^{(2)}$, $k_\varkappa^{(3)}$, $k_\varkappa^{(4)}$, čímž jsou zbývající části těchto kuželoseček rovněž dány. Neboť protíná-li na př. přímka r přímku $A_1 A_2$ v bodě I, přímku $A_5 A_6$ v bodě II, jest

$$k_\pi^{(1)} \equiv (A_1 A_2,\ II\, A_3),\quad k_\varkappa^{(1)} \equiv (A_5 A_6,\ I\, A_4).$$

Zvolíme-li za R rovinu nekonečně vzdálenou, přechází kužel V v parabolický válec. Naše konstrukce nenabývá tím však podstatné změny.

5. Jsou-li v rovině obrazné dány čtyři cykly k_1, k_2, k_3, k_4, možno je známým způsobem pokládati za obrazy čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4 v prostoru. Je-li nyní V předchozím postupem sestrojený vrchol rotačního kužele V, který prochází body A_1, A_2, A_3, A_4 a jehož osa jest kolma k naší rovině obrazné, a je-li w stopní kružnice kužele V a v onen cyklus této roviny, který jest obrazem bodu V, pak tvoří, jak snadno plyne, společné orientované tečny cyklů dvojic $v\,k_1$, $v\,k_2$, $v\,k_3$, $v\,k_4$ stejné úhly ω, neboť jest $\sin\frac{\omega}{2} = \cot\varphi$, značí-li φ úhel, který svírají površky kužele V s jeho osou.

Odvoďme nyní z kužele V kužel V*, k němu vzhledem k naší rovině obrazné orthogonálně affinní, jehož vrchol V^* leží s vrcholem V na téže straně roviny této a má od ní vzdálenost rovnou poloměru R' kružnice w, takže, je-li V' střed cyklu v, jest

$$\frac{V^* V'}{V V'} = tg\,\varphi = \lambda.$$

Bodům $A_1, A_2 \ldots$ odpovídají affinně body $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots$, které zobrazují se v cykly $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots$ Buďte $r_1, r_2, \ldots$ resp. $r_1', r_2', \ldots$ poloměry cyklů $k_1, k_2, \ldots$ resp. $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots$ Pak platí pro každé dva affinní body A_i, $\bar{A}_i$ obecně vztah

$$r_i' = r_i\, tg\,\varphi = \lambda\, r_i.$$

Úloha stanoviti kružnici v, jejíž poloměr budiž R, dá se tedy převésti na úlohu:

V rovině jsou dány čtyři cykly k_1, k_2, k_3, k_4; *sestrojiti jest úměrným zvětšením neb zmenšením jejich poloměrů* r_1, r_2, r_3, r_4 *cykly k nim soustředné* $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, $\bar{k}_3$, $\bar{k}_4$ *tak, aby tyto měly společný tečný cyklus* w.

Při tom jest, dle toho, zdali faktor λ, pro nějž jest $r_i' = \lambda r_i$, jest kladný nebo záporný, smysl cyklů $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, . . , w resp. souhlasný nebo nesouhlasný se smyslem cyklů k_1, k_2, . . , v.

Vyjdeme-li od tohoto pojetí úlohy jako základního a je-li možno cykly $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, . . ., úloze odpovídající, stanoviti, tu pro poloměr R' cyklu w jest obecně

$$R' - \varepsilon r_i' = R' - \varepsilon \lambda r_i = d_i \; (i = 1, \ldots 4),$$

značí-li d_i vzdálenost středů kružnic k_1, k_2, . . . od středu kružnice w, při čemž ε jest $+1$ nebo -1 dle toho, zdali cykly navzájem tečné mají smysl stejný nebo opačný. Z poslední relace plyne

$$\frac{\frac{R'}{\lambda} - \varepsilon r_i}{d_i} = \frac{1}{\lambda}.$$

Sestrojíme-li tudíž ku w soustředný cyklus v o poloměru $R = \frac{R'}{\lambda}$, jest

$$\frac{R - \varepsilon r_i}{d_i} = \frac{1}{\lambda}.$$

Je-li dále ω_i úhel, který tvoří společné orientované tečny cyklů v, k_i, jest $\sin \frac{\omega_i}{2} = \frac{1}{\lambda}$, maje tudíž hodnotu konstantní. Přechází tedy skutečně každé z obou pojetí naší úlohy snadno v druhé.

6. Buďte $\bar{k}_1, \ldots \bar{k}_4$ čtyři cykly, dotýkající se pátého. Mezi poloměry r_i' jejich a mezi středovými vzdálenostmi d_{ik} každých dvou $\bar{k}_i$, $\bar{k}_k$ z nich platí, klademe-li

$$d^2_{ik} - (r_i' - r_k')^2 = t^2_{ik},$$

vztah

$$\begin{vmatrix} 0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{14}^2 \\ t_{21}^2 & 0 & t_{23}^2 & t_{24}^2 \\ t_{31}^2 & t_{32}^2 & 0 & t_{34}^2 \\ t_{41}^2 & t_{42}^2 & t_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

při čemž poloměry r_i' jest nutno bráti kladně nebo záporně dle toho, zdali příslušné cykly mají smysl kladný nebo záporný.

Ježto pak mezi poloměry cyklů daných k_i a hledaných $\bar{k}_i$ platí vztah $r_i' = \lambda r_i$, plyne z determinantu (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & , & d_{12}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_2)^2, & d_{13}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_3)^2, & d_{14}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_4)^2 \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ d_{41}^2 - \lambda^2 (r_4 - r_1)^2, & & d_{42}^2 - \lambda^2 (r_4 - r_2)^2, & d_{43}^2 - \lambda^2 (r_4 - r_3)^2, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & , \ . \ . \ , & d_{14}^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} - (r_1 - r_4)^2 \\ . & , \ . \ . \ , & . \\ . & , \ . \ . \ , & . \\ d_{41}^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} - (r_4 - r_1)^2, & . \ . \ , & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Nyní jest

$$\begin{vmatrix} 0 & , & (r_1 - r_2)^2, & (r_1 - r_3)^2, & (r_1 - r_4)^2 \\ (r_2 - r_1)^2, & 0 & , & (r_2 - r_3)^2, & (r_2 - r_4)^2 \\ (r_3 - r_1)^2, & (r_3 - r_2)^2, & 0 & , & (r_3 - r_4)^2 \\ (r_4 - r_1)^2, & (r_4 - r_2)^2, & (r_4 - r_3)^2, & 0 & \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

jak se snadno přesvědčíme, odečteme-li na př. poslední sloupec tohoto determinantu od ostatních a v determinantu, který se dá pak odloučiti, odečteme poslední řádek od ostatních, čímž dospějeme k determinantu, s nímž počínáme si obdobně. Odtud plyne, že (2) jest třetího stupně v λ^2, resp. v $\sin^2 \frac{\omega}{2}$. Obdržíme tím rovnici tvaru

$$D_1 \lambda^6 - D_2 \lambda^4 + D_3 \lambda^2 - D = 0, \quad (2')$$

resp.

$$D \sin^6 \frac{\omega}{2} - D_3 \sin^4 \frac{\omega}{2} + D_2 \sin^2 \frac{\omega}{2} - D_1 = 0. \quad (2'').$$

V těchto rovnicích značí D_1 součet determinantů, které obdržíme, vypustíme-li v jednom z determinantů (2) v jednotlivých sloupcích po řadě členy obsahující hodnoty r_i, v ostatních členy s d_{ik}^2; D_2 značí součet determinantů, které obdržíme, jestliže v determinantu ve (2) vytčeném vždy ve dvou sloupcích vypustíme členy s hodnotami r_i, v ostatních členy s d_{ik}^2, kdežto pro D_3 nutno v jednotlivých sloupcích po řadě vypustiti hodnoty d_{ik}^2, v ostatních členy obsahující hodnoty r_i a konečně abychom obdrželi D, nutno tam veškeré členy s r_i vypustiti.

Je-li ve zvláštním případě $D = 0$, leží jak známo středy daných cyklů na kružnici a pak skytají naše rovnice (2'), (2'') jenom dvě hodnoty pro λ^2 resp. $\sin^2 \frac{\omega}{2}$.

Vypočítáme-li $\sin^2 \frac{\omega}{2}$ a odtud $tg^2 \varphi = \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$, jest sestrojiti rotační kužele $K_1, \ldots K_4$, jejichž vrcholy splývají s body $A_1, \ldots A_4$,

jejichž osy jsou kolmé k rovině obrazné a jejichž površky svírají s osami úhel φ; tyto kužele jsou pro každou hodnotu $\sin^2 \frac{\omega}{2}$ z (2″) plynoucí příslušnou hodnotou $tg^2 \varphi$ jednoznačně určeny. Jejich rovnice v pravoúhlé soustavě souřadné zní

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = (z - r_i)^2 tg^2 \varphi. \qquad (4)$$

Tyto kužele protínají se v konečnu v kuželosečkách, jejichž roviny jsou dány rovnicí

$$2(a_i - a_k)x + 2(b_i - b_k)y - 2(r_i - r_k)z\, tg^2 \varphi - (a_i^2 + b_i^2 - r_i^2 tg^2 \varphi) + \\ + (a_k^2 + b_k^2 - r_k^2 tg^2 \varphi) = 0, \qquad (5)$$

kde značí a_i, b_i resp. a_k, b_k souřadnice středů kružnic k_i, k_k a kde za i, k dlužno klásti hodnoty 1, . . . 4. Tyto roviny protínají se v jednom bodě, jehož souřadnice možno z (5) lineárně vypočítati a jenž jest společný kuželům $K_1, \ldots K_4$. Orthogonální průmět tohoto bodu do roviny obrazné jest společný střed kružnic v, w.

7. Uvažované úloze možno dáti také následující tvar.

V rovině jsou dány čtyři cykly $k_1, \ldots k_4$; jest sestrojiti pátý cyklus v tak, aby jeho body podobnosti s danými cykly ležely na kružnici w soustředné s v.

Promětné zobecnění této úlohy by bylo následující.

V rovině jest 8 cyklů k_i ($i = 1, \ldots 8$) libovolně dáno; sestrojiti cyklus devátý tak, aby jeho body podobnosti s danými cykly ležely na téže kuželosečce.

Řešení této úlohy spočívá v tom, že dané cykly možno bráti za cyklografické obrazy 8 bodů v prostoru, jimiž možno obecně položiti 4 kužele 2. řádu. Cyklografickým obrazem vrcholu každého z těchto kuželů jest cyklus, který splňuje úlohu danou.

Zvláštním případem této úlohy jest úloha:

V rovině dáno libovolně 6 cyklů a přímka; sestrojiti jest cyklus, který protíná přímku v daném úhlu a jehož body podobnosti s danými cykly leží na kuželosečce dané přímky se dotýkající.

Cykly, které protínají danou přímku pod daným úhlem, jsou obrazy bodů jedné roviny a dané cykly jsou obrazy šesti bodů v prostoru v libovolné poloze. Sestrojíme-li vrchol kužele, který prochází těmito šesti body a dotýká se zmíněné roviny podél jedné hrany, jest obrazem vrcholu toho cyklus, který splňuje naši úlohu.

Další specialisace vede k úloze:

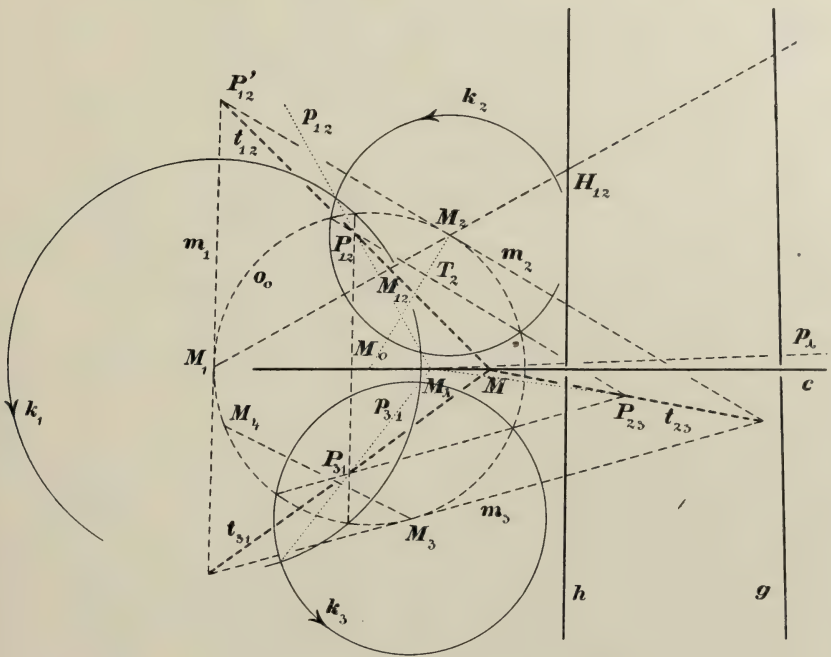
V rovině jsou dány 4 cykly a 2 přímky; sestrojiti cyklus, který protíná přímky v daných úhlech a jehož body podobnosti s danými cykly leží na kuželosečce daných přímek se dotýkající.

Zde nutno sestrojiti takové kužele, které procházejí čtyřmi body $A_1, \ldots A_4$ v prostoru a dotýkají se dvou rovin E_1, E_2. Vrchol V takového kužele leží na průsečnici p obou rovin. Sestrojme na př. rovinu

$A_1 A_2 A_3$, protněme ji s E_1, E_2 v přímkách e_1, e_2 a sestrojme známým způsobem kuželosečku k, která dotýká se e_1, e_2 a prochází body A_1, A_2, A_3. Kuželosečku k promítněme z bodu A_4 a protněme tento kužel přímkou p. Je-li V jeden takový průsečík, jest jeho cyklografickým obrazem cyklus, který odpovídá naší úloze; neboť jest vrcholem kužele jdoucího danými 4 body a dotýkajícího se rovin E_1, E_2.

8. K řešení úloh vytčených v odst. 3. a násl. vedou též následující úvahy jiného druhu.

Uvažujme (obr. 2.) nejprve v rovině tři libovolné cykly k_1, k_2, k_3 o středech M_1, M_2, M_3 a poloměrech r_1, r_2, r_3. Změníme-li poloměry cyklů úměrně



Obr. 2.

v λr_1, λr_2, λr_3, ponechajíce jejich středy, obdržíme pro různé hodnoty λ nové trojice cyklů $k_1^{(\lambda)}$ $k_2^{(\lambda)}$ $k_3^{(\lambda)}$ a seznáme, že orthogonální k nim kružnice o_λ tvoří svazek. Cykly $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$ jsou obrazy tří bodů $A_1^{(\lambda)}$, $A_2^{(\lambda)}$, $A_3^{(\lambda)}$, kružnice o_λ, jejíž střed budiž M_λ, jest kružnicí zúžení rotačního hyperboloidu H_λ, jehož přímky povrchové svírají s rovinou obraznou úhel 45^0 a jenž jest body $A_1^{(\lambda)}$, $A_2^{(\lambda)}$, $A_3^{(\lambda)}$ jednoznačně určen, jakmile žádáme, že jeho kružnice zúžení má ležeti v rovině obrazné. Nazývejme takovýto hyperboloid pravoúhlým, i tehdy, je-li jeho kružnice zúžení imaginární, tedy hyperboloid dvojdílným.

Body M_1, M_2, M_3 položme kružnici o_0 o středu M_0 a o průměru δ. Kružnice $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$ mají s o_0 společné tetivy t_1, t_2, t_3 a buďte T_1, T_2, T_3

průsečíky těchto tetiv s přímkami $M_1 M_0$, $M_2 M_0$, $M_3 M_0$; jest tu $M_i T_i = \frac{\lambda^2 r_i^2}{\delta}$; tudíž jest

$$M_1 T_1 : M_2 T_2 : M_3 T_3 = r_1^2 : r_2^2 : r_3^2.$$

Řady bodů $T_1, \ldots$; $T_2, \ldots$; $T_3, \ldots$ jsou navzájem projektivní, což platí tedy též o svazcích (t_1), (t_2), (t_3) rovnoběžek $t_1 \ldots$; $t_2 \ldots$; $t_3 \ldots$ Tyto svazky jsou dokonce perspektivní, nehoť nekonečně vzdálená přímka roviny přísluší v nich sama sobě. Každé dva z těchto svazků vytvořují tudíž řadu bodovou; svazky (t_1), (t_2) tvoří řadu (P_{12}), při čemž P_{12} značí průsečík $t_1 . t_2$; obdobně tvoří (t_2), (t_3) resp. (t_3), (t_1) řadu (P_{23}) resp. (P_{31}). Buďte t_{12}, t_{23}, t_{31} nositelky těchto řad a buďte m_1, m_2, m_3 tečny ku o_0 v bodech M_1, M_2, M_3. Z naší konstrukce plyne, že

$$(m_1 m_2 t_{12}) = r_1^2 : r_2^2, \quad (m_2 m_3 t_{23}) = r_2^2 : r_3^2, \quad (m_3 m_1 t_{31}) = r_3^2 : r_1^2.$$

Kolmice p_{12}, p_{23}, p_{31} z bodů P_{12}, P_{23}, P_{31} resp. na přímky $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ protínají se ve středu M_λ kružnice o_λ. Mění-li se λ, popisují p_{12}, p_{23}, p_{31} tři projektivní svazky rovnoběžek, v nichž nekonečně vzdálená přímka odpovídá sama sobě; tudíž vytvořují jejich průsečíky M_λ přímku c, která spojuje bod M_0 s oním bodem M, jehož vzdálenosti od stran třístranu $m_1 m_2 m_3$ mají poměr $r_1^2 : r_2^2 : r_3^2$.

Tím jsme ukázali, že středy kružnic o_λ leží na přímce; že tvoří kružnice ty svazek, uvidíme v dalším.

Roviny $A_\lambda = (A_1^{(\lambda)}, A_2^{(\lambda)}, A_3^{(\lambda)})$ tvoří svazek, jehož osa jest společnou osou podobnosti g trojic cyklů $k_1 k_2 k_3$, $k_1^{(\lambda)} k_2^{(\lambda)} k_3^{(\lambda)}$ pro všecky hodnoty λ. Každá rovina A_λ protíná příslušný hyperboloid H_λ v kuželosečce l, která promítá se orthogonálně do naší roviny v kuželosečku l' a která prochází body M_1, M_2, M_3 a tudíž kružnici o_0 protíná ještě ve čtvrtém bodě M_4. Poněvadž g udává směr jedné osy křivky l, tedy též křivky l', obdržíme bod M_4' jako průsečík přímek body M_1, M_2, M_3, resp. ku přímkám $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$ vzhledem ku g antiparallelně vedených. Ježto všecky kuželosečky l' mají jednu osu rovnoběžnou ku g, seznáváme odtud, že tvoří svazek (l') o základních bodech M_1, M_2, M_3, M_4', na o_0 ležících.

Tuto vlastnost seznáme též takto. Plochy H_λ procházejí touž nekonečně vzdálenou kuželosečkou f a roviny A_λ vytínají na ní involuci, která promítá se do roviny obrazné v involuci Σ na její nekonečně vzdálené přímce u_∞ ležící, a kuželosečky l', které procházejí body M_1, M_2, M_3 a vytínají na u_∞ involuci Σ, tvoří svazek. Páry bodové involuce Σ jsou nekonečně vzdálené body přímek, které leží symetricky ku g; tudíž tvoří přímka $M_2 M_3$ s přímkou bodem M_1 jdoucí a k ní vzhledem ku g antiparallelní prvek ve zmíněném svazku, odkud plyne opět bod M_4' jako čtvrtý průsečík kuželoseček l' s o_0.

Kuželosečky l' svazku (l') vytínají na g involuci Π. Ježto pak prů-

sečíky l' s g náleží též kuželosečce l a tudíž také stopní kružnici o_λ hyperboloidu H_λ v rovině obrazné, vytínají též kružnice o_λ na g involuci Π.

Orthogonální kružnice o_λ mají tedy své středy na přímce c a vytínají na přímce g involuci; tvoří tudíž svazek (o_λ). Hyperboloidy H_λ protínají se v konečnu všecky v rovnoramenné hyperbole, která jest souměrna k rovině obrazné a leží v rovině k přímce c kolmé; tvoří tudíž plochy ty specielní svazek ploch 2. stupně.

Jedna kružnice svazku (o_λ) — nazývejme ji o — má střed v bodě M. Jest orthogonální kružnicí jedné trojice $k_1^{(\lambda)}\ k_2^{(\lambda)}\ k_3^{(\lambda)}$; rovnoběžky bodem M ku m_1, m_2, m_3 jsou potenčními přímkami kružnic této trojice a kružnice o_0, tudíž jest o také orthogonální kružnicí ku o_0. Chordála h kružnic o, o_0 jest tudíž chordálou svazku (o_λ); proto jest tato chordála polárou bodu M vzhledem ku o_0. Přímka t_{12} procházející průsečíkem P_{12}' přímek m_1, m_2, protíná $M_1 M_2$ v bodě M_{12}, jehož vzdálenosti od m_1, m_2 buďte δ_1, δ_2. Jest pak

$$\delta_1 = M_1 M_{12} \sin M_2 M_1 P_{12}',\quad \delta_2 = M_2 M_{12} \sin M_1 M_2 P_{12}'.$$

Ježto trojúhelník $M_1 M_2 P_{12}'$ jest rovnoramenný, plyne z toho, ježto M leží uvnitř třístranu $m_1 m_2 m_3$, že

$$M_1 M_{12} : M_{12} M_2 = \delta_1 : \delta_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Průsečík H_{12} přímek h, $M_1 M_2$ jest harmonický ku M_{12} vzhledem k M_1, M_2; tudíž jest

$$M_1 H_{12} : M_2 H_{12} = r_1^2 : r_2^2.$$

Jest tedy chordála h svazku (o_λ) osou podobnosti tří cyklů téhož smyslu, které jsou soustředny s cykly danými k_1, k_2, k_3 a jejichž poloměry jsou úměrny čtvercům poloměrů r_1, r_2, r_3 daných cyklů.

Osa podobnosti g cyklů $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$ stanoví s orthogonální jejich kružnicí o_λ opět svazek kružnic, (v_λ), a jak známo má každá kružnice v_λ tohoto svazku tu vlastnost, že protíná cykly $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$ pod stejnými úhly. Centrála p_λ tohoto svazku jest kolmice z bodu M_λ na g.

Pro všecky hodnoty λ obdržíme svazek (p_λ) rovnoběžných těchto centrál, perspektivní ku řadě středů M_λ, tudíž projektivní ku svazku (p_{12}) přímek p_{12} dříve blíže charakterisovaných.

9. Analytické stanovení svazku (o_λ) plyne kratčeji.

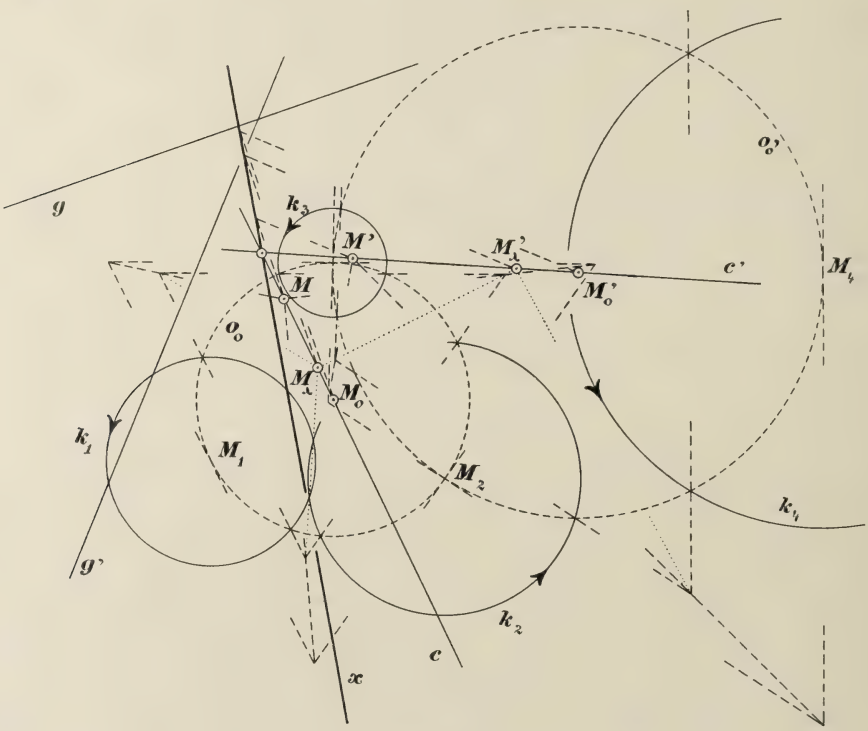
Buďte a_i, b_i, pro $i = 1, 2, 3$, pravoúhlé souřadnice středů M_i a buďte d_i jejich vzdálenosti od počátku souřadnic. Pak jest orthogonální kružnice trojice $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$ dána rovnicí

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ a_1^2 + b_1^2 - \lambda^2 r_1^2, & a_1, & b_1, & 1 \\ a_2^2 + b_2^2 - \lambda^2 r_2^2, & a_2, & b_2, & 1 \\ a_3^2 + b_3^2 - \lambda^2 r_3^2, & a_3, & b_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kterou možno též psáti

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} - \lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ r_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ r_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ r_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

První determinant poslední rovnice označme Δ_1, druhý Δ_2, načež jest $\Delta_1 = 0$ rovnicí kružnice jdoucí body M_1, M_2, M_3 a $\Delta_2 = 0$ jest rovnicí osy podobnosti tří cyklů, které mají středy v bodech M_1, M_2, M_3 a jejichž poloměry mají stejné znaménko, jsouce úměrny čtvercům poloměrů r_1, r_2, r_3.



Obr. 3.

10. Vyjděme nyní (obr. 3.) od čtyř cyklů k_i o poloměrech r_i a středech M_i ($i = 1, \ldots 4$) a uvažujme jinou trojici, na př. $k_3\, k_2\, k_4$, obdobným způsobem jako dříve k_1, k_2, k_3. Obdržíme opět svazek (o_λ') orthogonálních kružnic o_λ' trojic cyklů $k_3^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_4^{(\lambda)}$ o chordále h'. Kružnice o_0' jdoucí body M_3, M_2, M_4, o středu M_0', náleží ovšem také svazku (o_λ'). Rovněž stanoví osa podobnosti g', která jest společna všem trojicím $k_3^{(\lambda)}\, k_2^{(\lambda)}\, k_4^{(\lambda)}$, s orthogonální kružnicí o_λ' každé z těchto trojic svazek kružnic (v_λ') a každá kružnice v_λ' tohoto svazku má tu vlastnost, že protíná cykly $k_3^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_4^{(\lambda)}$ ve stejném úhlu.

Centrála p_λ' tohoto svazku jest kolmicí ze středu M_λ' kružnice o_λ' ku g'.

Pro všecky hodnoty λ obdržíme zde svazek (p_λ') rovnoběžných centrál p_λ', jenž jest ku řadě středů M_λ' perspektivní, tudíž projektivní ku dříve zmíněnému svazku (p_{12}). Jsou tedy též svazky (p_λ), (p_λ') projektivní, a ježto nekonečně vzdálená přímka náleží oběma svazkům odpovídajíc sama sobě, jsou svazky (p_λ), (p_λ') perspektivní a vytvořují přímou řadu bodovou x. Každý bod na x odpovídá jedné hodnotě λ a jest tudíž středem cyklu w_λ, který protíná cykly $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$, $k_4^{(\lambda)}$ ve stejných úhlech.

Na x leží tedy také středy takových cyklů, které mají tu vlastnost, že každý z nich dotýká se jedné čtveřiny cyklů $k_1^{(\lambda)}\, k_2^{(\lambda)}\, k_3^{(\lambda)}\, k_4^{(\lambda)}$. Jak jsme již seznali, jsou možny tři takové cykly w_1, w_2, w_3.

Cykly w_λ samy tvoří svazek (w_λ). Neboť procházejí průsečíky přímky g s cykly o_λ; cykly o_λ, ježto tvoří svazek, vytínají na g involuci, kterou vytínají tudíž také cykly w_λ. Ježto pak středy těchto leží mimo to na přímce x, tvoří svazek; jeho chordálu označme j.

Máme tudíž výsledek:

Ke čtyřem cyklům lze sestrojiti jednu kružnici isogonální; měníme-li poloměry těchto cyklů úměrně zachovávajíce jejich středy, probíhá řečená kružnice svazek kružnic.

Každý cyklus w_λ můžeme pokládati za stopu pravoúhlého hyperboloidu H_λ, jehož osa jest kolma k rovině obrazné a jenž prochází body $A_1^{(\lambda)}$, $A_2^{(\lambda)}$, $A_3^{(\lambda)}$, $A_4^{(\lambda)}$, jejichž obrazy jsou cykly $k_1^{(\lambda)}$, $k_2^{(\lambda)}$, $k_3^{(\lambda)}$, $k_4^{(\lambda)}$ o poloměrech λr_1, λr_2, λr_3, λr_4, pro příslušnou hodnotu λ; neboť w_λ protíná tyto čtyři cykly ve stejných úhlech. Zobrazme tuto plochu orthogonálně affinně vzhledem ku rovině obrazné tak, aby body $A_1^{(\lambda)}$, $A_2^{(\lambda)}$, $A_3^{(\lambda)}$, $A_4^{(\lambda)}$ přešly v body A_1, A_2, A_3, A_4; pak přechází H_λ v rotační plochu $H_\lambda{}^*$. Při tom jsou obě plochy H_λ, $H_\lambda{}^*$ stejného druhu, t. j. obě buďto jednodílné nebo dvojdílné, je-li λ reálné, jsou však druhu nestejného, je-li λ imaginárné. Všecky takovéto plochy $H_\lambda{}^*$ tvoří svazek $(H_\lambda{}^*)$, neboť procházejí body $A_1, \ldots, A_4$ a dotýkají se kružnice nekonečně vzdálené v jejích průsečících s rovinou obraznou M. Normálná rovina N přímkou x ku M jest společnou hlavní rovinou všech ploch tohoto svazku.

Mezi těmito plochami jsou zejména:

1. Válcová plocha $H_1{}^*$, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžny ku j; zde jest $\lambda = \infty$.

2. Rotační paraboloid $H_2{}^*$, pro který jest $\lambda = 0$; kružnice o_0, o_0' jsou orthogonálními průměty kuželoseček c_1, c_2, ve kterých protínají paraboloid roviny $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$; rovina kolmá ke stopě g roviny $A_1A_2A_3$ a jdoucí bodem M_0 jest symetrálnou rovinou plochy $H_2{}^*$ a kolmá rovina ku g' bodem M_0' jest druhou takovou rovinou; obě protínají se tudíž v ose paraboloidu. Stopou této osy na M jest tudíž onen bod přímky x, v němž protínají se kolmice z M_0 ku g a z M_0' ku g'.

3. Pravoúhlý hyperboloid H_3^*, jenž má střed v rovině obrazné M. Průsečík centrál obou svazků (o_λ), (o_λ') jest totiž středem kružnice o_λ, která splývá s příslušnou kružnicí o_λ' a protíná všecky čtyři cykly $k_1^{(\lambda)}, \ldots, k_4^{(\lambda)}$, které odpovídají příslušné hodnotě λ, orthogonálně, pročež jest též kružnicí svazku (w_λ). Prochází tudíž přímka x také průsečíkem centrál svazků (o_λ), (o_λ'); příslušná plocha H_3 jest pravoúhlý hyperboloid, který má střed v rovině M, pročež jest také plocha H_3^* souměrna k rovině M.

Další konstrukce cyklů w_1, w_2, w_3 jest tím dána. Stanovíme průsek kterýchkoli dvou ploch H_λ^* s rovinou N, na př. kuželové plochy a válcové plochy jako v odst. 2., a postupujeme dále známým způsobem.

11. Budiž nyní dáno pět orientovaných ploch kulových čili sfér K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 o poloměrech r_1, r_2, $\ldots r_5$ a o středech M_1, M_2, $\ldots M_5$ a buďte $K_1^{(\lambda)}$, $K_2^{(\lambda)}$, $\ldots K_5^{(\lambda)}$ sféry k nim soustředné o poloměrech resp. λr_1, λr_2, $\ldots \lambda r_5$.

Vytkněme si nejprve libovolnou trojici daných sfér, na př. $K_1 K_2 K_3$ a uvažujme příslušné trojice $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)}$. Pro určitou hodnotu λ tvoří orthogonální koule k trojici $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)}$ svazek $\Sigma_{123}^{(\lambda)}$, jehož základní kružnice o_λ leží v rovině $M_1 M_2 M_3$ a jehož centrála n_λ prochází středem M_λ kružnice o_λ, jsouc k její rovině kolma. Měníme-li λ, dostáváme jiné svazky $\Sigma_{123}^{(\lambda)}$. Základní kružnice jejich o_λ, které leží v rovině $M_1 M_2 M_3$, tvoří rovněž svazek, (o_λ), o centrále c. Jedním prvkem svazku (o_λ) jest kružnice o_0 jdoucí body M_1, M_2, M_3, jiný prvek obsahuje osu podobnosti h sfér K_1', K_2', K_3', které jsou soustředny ku K_1, K_2, K_3 a jejichž poloměry jsou v poměru r_1^2, r_2^2, r_3^2, jak z předchozího přímo plyne. Centrály n_λ svazků $\Sigma_{123}^{(\lambda)}$ vyplňují rovinu, která prochází přímkou c a jest kolma ku přímce h.

Přejděme k jiné trojici daných sfér, na př. $K_1 K_2 K_4$ a uvažujme příslušné trojice $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_4^{(\lambda)}$ pro různé hodnoty λ. Obdržíme tím opět pro každé λ svazek $\Sigma_{124}^{(\lambda)}$ koulí orthogonálních o centrále n_λ'. Základní kružnice o_λ' těchto svazků $\Sigma_{124}^{(\lambda)}$ tvoří zase svazek kružnic (o_λ'), v rovině $M_1 M_2 M_4$ ležící, jehož chordála h' jest osou podobnosti sfér K_1', K_2', K_4', jichž poloměry jsou v poměru $r_1^2 : r_2^2 : r_4^2$. Centrály n_λ' vyplňují rovinu N_λ', která prochází centrálou c' svazku (o_λ') a jest kolma ku h'.

Každé dvě přímky n_λ, n_λ' příslušné témuž λ protínají se ve středu S_λ orthogonální koule M_λ koulí $K_1^{(\lambda)}$, $K_2^{(\lambda)}$, $K_3^{(\lambda)}$, $K_4^{(\lambda)}$. Z toho plyne, že středy S_λ koulí M_λ, které jsou orthogonální ke čtveřinám $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)} K_4^{(\lambda)}$, pro různé hodnoty λ, leží na přímce a_λ, která prochází středem S_0 koule M_0, tetraedru $M_1 M_2 M_3 M_4$ opsané, a stojí kolmo k rovině podobnosti H sfér K_1', K_2', K_3', K_4', jejichž poloměry jsou ve vzájemném poměru $r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 : r_4^2$. Ježto tyto orthogonální koule protínají mimo to rovinu $M_1 M_2 M_3$ (rovněž jako rovinu $M_1 M_2 M_4$) ve svazku kružnic, tvoří svazek, který jest určen prvky M_0 a H.

Budiž G rovina podobnosti sfér $K_1^{(\lambda)}$, $K_2^{(\lambda)}$, $K_3^{(\lambda)}$, $K_4^{(\lambda)}$; ona jest společna všem čtveřinám, které obdržíme, udílíce λ všecky možné hodnoty.

Normála q_λ bodem S_λ ku G jest pro každé λ geometrickým místem středů takových koulí, které protínají sféry $K_1^{(\lambda)}, \ldots K_4^{(\lambda)}$ ve stejných úhlech a o nichž víme, že tvoří svazek. Přímky q_λ vyplňují rovinu Q_λ jdoucí přímkou a_λ kolmo ku G.

Uvažujeme-li čtveřinu sfér $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)} K_5^{(\lambda)}$, dospějeme stejným postupem ku přímce a_λ', která jest geometrickým místem středů S_λ' orthogonálních koulí M_λ' ke čtveřinám $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)} K_5^{(\lambda)}$. Přímka a_λ' jde tedy středem S_0' koule M_0', která jest opsána tetraedru $M_1 M_2 M_3 M_5$ a jest kolma ku rovině podobnosti H' sfér K_1', K_2', K_3', K_5', jež jsou soustředny s plochami K_1, K_2, K_3, K_5 a jejichž poloměry jsou v poměru $r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 : r_5^2$. Orthogonální koule M_λ' tvoří opět svazek, stanovený prvky M_0' a H'.

Přímky a_λ, a_λ' protínají se v bodě S; neboť obě protínají normálu n_0 v bodě M_0 k rovině $M_1 M_2 M_3$ vztyčenou a jsou kolmé ku přímce h; leží tedy v rovině jdoucí přímkou n_0 kolmo ku h. Bod S jest nyní středem koule, která jest orthogonalná ke všem pěti koulím $K_1^{(\lambda)}$, $K_2^{(\lambda)}$, $K_3^{(\lambda)}$, $K_4^{(\lambda)}$, $K_5^{(\lambda)}$, pro hodnotu λ jim příslušnou.

Normála q_λ' z bodu S_λ' ku G' jest pro každé λ geometrickým místem středů takových koulí, které protínají sféry příslušné čtveřiny $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)} K_5^{(\lambda)}$ ve stejných úhlech a tvoří svazek stanovený rovinou G' a koulí M_λ'. Přímky q_λ' vyplňují rovinu Q_λ' jdoucí přímkou a_λ' kolmo ku G'. Roviny G, G' procházejí přímkou g, která jest společnou osou podobnosti trojic sfér $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)}$ pro všecky hodnoty λ. Přímky q_λ, q_λ', příslušné téže hodnotě λ, protínají se, ježto leží v rovině kolmé ku g, v bodě T_λ, jenž jest středem koule W_λ, protínající všech pět sfér $K_1^{(\lambda)}, \ldots K_5^{(\lambda)}$, téže hodnotě λ příslušných, ve stejných úhlech. Body T_λ tvoří přímou řadu, jejíž nositelkou jest průsečnice x rovin Q_λ, Q_λ'.

12. Přímku x obdržíme nejjednodušeji, vedeme-li body S_0 resp. S_0' kolmice a_λ resp. a_λ' ku H resp. H' a dále těmitéž body kolmice q_0 resp. q_0' ku G resp. G'; přímka x spojuje pak body $a_\lambda . a_\lambda'$, $q_0 . q_0'$.

Každá kulová plocha W_λ prochází průsekem roviny G s M_λ a má svůj střed na x. Ježto pak, mění-li se λ, vytvořuje koule M_λ svazek koulí, tudíž její průsek s rovinou G svazek kružnic, tvoří právě uvažované koule W_λ, které vytínají tento svazek z G a mají středy na x, svazek koulí (W_λ).

Můžeme tedy říci:

K pěti sférám lze sestrojiti jednu kouli isogonálnou; měníme-li úměrně poloměry sfér, zachovávajíce jejich středy, probíhá zmíněná koule svazek kulový.

Koule W_1 tohoto svazku, která má střed v bodě $a_\lambda . a_\lambda'$, náleží svazku $(M_0 H)$ resp. $(M_0' H')$ a jest takto jednoduše určena. Rovněž koule W_2 svazku (W_λ), jež má střed v bodě $q_0 . q_0'$, jest jednoduše dána, náležíc svazku $(M_0 G)$ resp. $(M_0' G')$. Tím jest stanoven svazek (W_λ) a jeho potenční rovina P. Budiž i základní kružnicí tohoto svazku, ať reálnou nebo imaginárnou.

Nyní jest postup další pro řešení naší obecnější úlohy vyslovené v odstavci 1. patrný. Vytkněme z pěti sfér daných libovolné dvě a otočme je kolem přímky x, až jejich středy padnou do roviny přímkou x jdoucí; na př. otočme K_2 kolem x až M_2 padne do roviny $[M_1 x]$. Buďte pak M_l, M_k středy koulí takto otočených. Orientaci koulí v koule orientované čili sféry možno jak známo stanoviti tím, že béřeme poloměr koule kladně orientované kladně a naopak; při tom průsečné kružnice s rovinou $L = (M_l M_k x)$ obou našich ploch kulových orientujeme jako cykly k_l, k_k kladně nebo záporně dle toho, jsou-li to řezy s koulí kladně nebo záporně orientovanou.

Protíná-li L kružnici i v bodech J_1, J_2 a jsou-li k_l, k_k cyklografické obrazy v rovině L bodů L, K, řešíme nyní ,vzhledem k předchozímu, úlohu:

„V rovině L položiti jest body J_1, J_2 cyklus w tak, aby jeho body podobnosti s cykly k_l, k_k ležely na kružnici ku w soustředné."

Jest zde třeba rovinu N, jdoucí přímkou x kolmo ku L, protíti plochou kulovou, jdoucí kružnicí i a body L, K, v kružnici s a položiti orthogonálními průměty bodů J_1, J_2, L, K do roviny N onu parabolu p, jejíž osa jest rovnoběžna ku x. Každý vrchol společného polárního trojúhelníka křivek s, p zobrazuje se cyklograficky do roviny L jako cyklus w, jenž má vlastnost žádanou. Obdržíme opět tři takové cykly w_1, w_2, w_3.

13. Obecně jest pro grafické provedení výhodno, bráti vhodně volenou rovinu, přímkou x jdoucí, za rovinu L na př. rovinu orthogonálně promítající do roviny předem vytčené za rovinu průmětnou. Pak otočme tři z daných sfér K_i $(i = 1, \ldots 5)$ kolem x tak, aby jejich středy padly do L, což jest pro každou z nich ovšem možno dvojím způsobem. Buďte K_I, K_{II}, K_{III} jejich nové polohy a M_I, M_{II}, M_{III} buďte nové polohy jejich středů; dále buďte k_I, k_{II}, k_{III} cykly, v nichž tyto sféry protínají rovinu L.

Sestrojme nyní v rovině L cykly w_1, w_2, w_3, které mají středy na x a z nichž každý má tu vlastnost, že jeho body podobnosti s cykly k_I, k_{II}, k_{III} leží na kružnici k němu soustředné. Za tím účelem považujme L jako rovinu obraznou zobrazení cyklografického, při čemž sklopíme rovinu tu do naší základní roviny průmětné. Buďte A_I, A_{II}, A_{III} ony body, které zobrazují se na L v cykly k_I, k_{II}, k_{III}.

Položme dále přímkou x rovinu N kolmou ku L, stanovme v rovině N stopní kružnici s plochy kulové jdoucí A_I, A_{II} A_{III} a mající střed v N, promítněme body A_I, A_{II}, A_{III} orthogonálně na N a položme jejich průměty onu parabolu p, jejíž osa jest rovnoběžna ku x. Pak jsou w_1, w_2, w_3 cyklografickými obrazy na L vrcholů společného polárního trojúhelníka křivek s, p.

Cykly w_1, w_2, w_3 jako kružnicemi největšími jsou stanoveny jednoznačně tři sféry W_1, W_2, W_3; ony mají tu vlastnost, že body podobnosti každé z nich s danými pěti sférami K_1, ... K_5 leží na kouli k ní soustředné, čili, což jest v podstatě totéž, že společné opsané kužele každé z těchto

sfér W_1, W_2, W_3 se sférami danými $K_1, \ldots K_5$ jsou shodné. Rovněž jest jasno, že tato úloha jest totožna s úlohou:

Ku pěti daným sférám $K_1, \ldots K_5$ *sestrojiti pět soustředných s nimi sfér* $K_1^{(\lambda)}, \ldots K_5^{(\lambda)}$, *aby poloměry jejich byly úměrny k poloměrům daných a aby sféry ty měly společnou kouli dotyčnou* W'.

Takovéto koule existují tři: W_1', W_2', W_3'; jsou soustředny se sférami W_1, W_2, W_3 a vznikají z těchto touž úměrnou změnou poloměrů jako pět hledaných sfér $K_1^{(\lambda)}, \ldots K_5^{(\lambda)}$ z daných sfér $K_1, \ldots K_5$. Každá z koulí W_1', W_2', W_3' prochází body podobnosti daných sfér $K_1, \ldots K_5$ s jednou ze sfér W_1, W_2, W_3 právě sestrojených, čímž jest její konstrukce rovněž dána. Při tom jest reciproká hodnota faktoru úměrnosti λ rovna $\sin \frac{\omega}{2}$, značí-li ω úhel při vrcholu kuželů prve zmíněných v jejich rovinách osových.

14. Ježto koule W' dotýkají se sfér $K_1^{(\lambda)}, \ldots K_5^{(\lambda)}$, platí pro faktor úměrnosti λ podmínka daná následujícím determinantem:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_2)^2, & d_{13}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_3)^2, \\ d_{21}^2 - \lambda^2 (r_2 - r_1)^2, & 0 & d_{23}^2 - \lambda^2 (r_2 - r_3)^2, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{51}^2 - \lambda^2 (r_5 - r_1)^2, & d_{52}^2 - \lambda^2 (r_5 - r_2)^2, & d_{53}^2 - \lambda^2 (r_5 - r_3)^2, \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{14}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_4)^2, & d_{15}^2 - \lambda^2 (r_1 - r_5)^2 \\ d_{24}^2 - \lambda^2 (r_2 - r_4)^2, & d_{25}^2 - \lambda^2 (r_2 - r_5)^2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ d_{54}^2 - \lambda^2 (r_5 - r_4)^2, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

kde značí opět d_{ik} vzdálenosti středů koulí $K_i^{(\lambda)}$, $K_k^{(\lambda)}$. Tato rovnice jest v λ^2 zdánlivě stupně pátého; ježto však determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & (r_1 - r_2)^2 & \ldots & (r_1 - r_5)^2 \\ (r_2 - r_1)^2 & 0 & \ldots & (r_2 - r_5)^2 \\ (r_3 - r_1)^2 & (r_3 - r_2)^2 & \ldots & (r_3 - r_5)^2 \\ (r_4 - r_1)^2 & (r_4 - r_2)^2 & \ldots & (r_4 - r_5)^2 \\ (r_5 - r_1)^2 & (r_5 - r_2)^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

má karakteristiku tři, o čemž se přesvědčíme stejným způsobem jako v odst. 3., možno rovnici (7) uvésti na tvar

$$D_1 \lambda^6 - D_2 \lambda^4 + D_3 \lambda^2 - D = 0; \qquad (7')$$

hledáme-li místo λ úhly ω pro možné gruppy kuželů, obdržíme rovnici

$$D \sin^6 \frac{\omega}{2} - D_3 \sin^4 \frac{\omega}{2} + D_2 \sin^2 \frac{\omega}{2} - D_1 = 0. \qquad (7'')$$

Zde značí D determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & . & . \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & . & . \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & d_{45}^2 \\ . & . & . & d_{54}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

kdežto D_3, D_2, D_1 obdržíme z (7), jestliže vypustíme všemi možnými způsoby vždy v jednom resp. dvou resp. třech sloupcích veličiny d_{ik}^2, v ostatních sloupcích veličiny $\lambda^2 (r_i - r_k)^2$ a determinanty takto vzniklé vždy sečteme.

Je-li $D = 0$, jest naše úloha kvadratickou; v tomto případě leží středy pěti koulí daných na téže kouli.

14. Orthogonální koule čtveřin $K_1^{(\lambda)} K_2^{(\lambda)} K_3^{(\lambda)} K_4^{(\lambda)}$ jsou vyjádřeny rovnicí

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2-\lambda^2 r_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2+c_1^2-\lambda^2 r_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2-\lambda^2 r_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4^2+b_4^2+c_4^2-\lambda^2 r_4^2 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

čili rovnicí

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4^2+b_4^2+c_4^2 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} - \lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ r_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ r_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ r_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ r_4^2 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Píšeme-li tuto rovnici zkráceně

$$\Delta_1 - \lambda^2 \Delta_2 = 0,$$

značí $\Delta_1 = 0$ rovnici plochy kulové jdoucí středy M_1, M_2, M_3, M_4 a $\Delta_2 = 0$ rovinu podobnosti čtyř sfér, jež jsou se sférami K_1, K_2, K_3, K_4 soustředné a jejichž poloměry jsou úměrny čtvercům poloměrů těchto sfér.

Rovina podobnosti sfér $K_1^{(\lambda)}, \ldots K_4^{(\lambda)}$ dá se známým způsobem vyjádřiti rovnicí

$$\lambda \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ \varepsilon_1 r_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \varepsilon_4 r_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

kterou pišme ve zkráceném tvaru

$$\lambda \Delta_3 = 0.$$

Při tom jest dle orientace sfér K_i buďto $\varepsilon_i = +1$ nebo $\varepsilon_i = -1$. Možno tedy koule, které protínají sféry čtveřiny $K_1^{(\lambda)}\, K_2^{(\lambda)}\, K_3^{(\lambda)}\, K_4^{(\lambda)}$ ve stejných úhlech ω a jejichž poloměr budiž označen ϱ, vyjádřiti rovnicí

$$\Delta_1 - \lambda^2 \Delta_2 + \lambda \Delta_3 \varrho \cos\omega = 0.$$

Z poslední rovnice možno vypočísti souřadnice ξ, η, ζ středů těchto koulí. Užijeme-li zkráceného označení determinantů elementy hlavní diagonály a klademe-li determinant $[a_1 b_2 c_3 1_4]$ roven δ, jest

$$\begin{aligned}
2\delta\xi &= [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, b_2 c_3 1_4] + \lambda\, [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, b_2 c_3 1_4]\, \varrho \cos\omega - \lambda^2 [r_1^2 b_2 c_3 1_4],\\
2\delta\eta &= -[(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 c_3 1_4] - \lambda\, [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 c_3 1_4]\, \varrho \cos\omega + \lambda^2 [r_1^2 a_2 c_3 1_4], \quad (10)\\
2\delta\zeta &= [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 b_3 1_4] + \lambda\, [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 b_3 1_4]\, \varrho \cos\omega - \lambda^2 [r_1^2 a_2 b_3 1_4],
\end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne eliminací λ^2 a $\lambda \varrho \cos\omega$

$$\begin{vmatrix}
2\delta\xi - [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, b_2 c_3 1_4], & [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, b_2 c_3 1_4], & [r_1^2 b_2 c_3 1_4]\\
2\delta\eta + [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 c_3 1_4], & -[\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 c_3 1_4], & -[r_1^2 a_2 c_3 1_4]\\
2\delta\zeta - [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 b_3 1_4], & [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 b_3 1_4], & [r_1^2 a_2 b_3 1_4]
\end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Rovněž tak obdržíme, kladouce v indexech všude 5 místo 4 a značíce $\delta' = [a_1 b_2 c_3 1_5]$,

$$\begin{vmatrix}
2\delta'\xi - [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, b_2 c_3 1_5], & [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, b_2 c_3 1_5], & [r_1^2 b_2 c_3 1_5]\\
2\delta'\eta + [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 c_3 1_5], & -[\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 c_3 1_5], & -[r_1^2 a_2 c_3 1_5]\\
2\delta'\xi - [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 b_3 1_5], & [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 b_3 1_5], & [r_1^2 a_2 b_3 1_5]
\end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Rovnice (11), (12) určují přímku x.

K rovnicím (10) obdržíme rovnice obdobné, klademe-li v nich rovněž v indexech 5 místo 4, tedy též δ' místo δ. Eliminací $\varrho \cos\omega$ z kterýchkoli dvou z těchto šesti rovnic obdržíme pro každou hodnotu λ^2, ze (7) plynoucí, rovnici roviny, která prochází středem jedné z hledaných koulí W_i resp. W_i'; tedy na př. rovnici roviny

$$\begin{vmatrix}
2\delta\xi - [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, b_2 c_3 1_4] + \lambda^2 [r_1^2 b_2 c_3 1_4], & [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, b_2 c_3 1_4]\\
2\delta\eta + [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, a_2 c_3 1_4] - \lambda^2 [r_1^2 a_2 c_3 1_4], & -[\overline{\varepsilon_1 r_1}\, a_2 c_3 1_4]
\end{vmatrix} = 0.$$

a t. d. Poloměry ϱ koulí W' obdržíme pak z každé rovnice zmíněné gruppy šesti rovnic, značí-li (ξ, η, ζ) dříve stanovené souřadnice jejího středu a značí-li λ jednu z hodnot z rovnice (7') plynoucích, při čemž nutno klásti $\cos\omega = \pm 1$.

Tak jest na př.

$$\varepsilon\varrho = \frac{2\delta\xi - [(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\, b_2 c_3 1_4] + \lambda^2 [r_1^2 b_2 c_3 1_4]}{\lambda\, [\overline{\varepsilon_1 r_1}\, b_2 c_3 1_4]}. \quad (13)$$

O novém způsobu titrace kyanovodíku a jeho solí.

Část I.

Napsal

Prof. Dr. **CYRILL KRAUZ.**

(Předloženo dne 24. dubna 1914.)

Často jsme nuceni stanoviti kyanovodík titračně v různých směsích anorganických i organických, ke kterémuž účeli se původní methoda Volhardova mnohdy nehodí; jsou to hlavně směsi cukerné, ať již přirozené neb umělé, kde stříbrnatých roztoků v prostředí neutralném a méně ještě alkalickém k titraci použiti nelze. Rovněž i stará, dnes skorem již zapomenutá methoda Mohrova, spočívající v titraci roztoků kyanovodíkových silně ammoniakalných roztokem síranu měďnatého, hodí se k účelům těm velmi málo, jestiť již sama sebou nepřesná: reakce při tom probíhající není jediná, jest komplikována několika reakcemi vedlejšími, její průběh jest nestejný — nespolehlivý.

I hleděl jsem tudíž nalézti methodu, jíž v každém směru dalo by se použiti s výhodou. Nejprve zamýšlel jsem methodu Mohrovu modifikovati tak, že přídavkem nějakého vhodného indikatoru dal by se nejmenší přebytek při titraci použité mědi ihned zřetelně poznati. Toho není však možno za starých Mohrem udržovaných podmínek, t. j. za silné ammoniakality roztoku docíliti. Zkusil jsem tudíž titrovati roztoky tak dalece neutrálné pokud odpovídají stupni neutrality vodných roztoků kyanidů alkalických; bylo tudíž na fenolftalein zbarvení vždy červené, nepocházelo však od ammoniaku. V tom případě dařila se věc velmi dobře.

Princip titrace měl spočívati as v těchto bodech: Dokud jest v roztoku, k němuž síranu měďnatého se přikapuje, ještě CN' přítomen, potud síran měďnatý se odbarvuje; je-li však jont ten spotřebován, lze prvý, sotva znatelný přebytek soli měďnaté přídavkem některého citlivého reagens ihned dokázati. Toto citlivé reagens musí odpovídati třem hlavním podmínkám: musí býti indifferentní vůči CN' a nesmí titraci samé překážeti, musí skýtati se síranem měďnatým dostatečně intensivné zbarvení

neb sedlinu a musí býti dostatečně citlivé. Po delším hledání nalezen takovýto indikator ve ferrokyanidu draselnatém, jenž za daných podmínek poskytuje se síranem měďnatým intensivně červenou sedlinu a to teprve tehdy, když byl veškerý kyanovodík spotřebován.

V této části práce vypracována methoda na čistém kyanidu draselnatém a brány při tom v úvahu především meze přesnosti při různé koncentraci roztoků odměrných i titrovaných, zjištěn přesný průběh reakce, vymezen vliv množství použitého indikatoru, jeho koncentrace a konečně vliv teploty.

Ve druhé části práce podány budou výsledky docílené touto methodou za přítomnosti různých látek anorganických i organických, jakož i podána applikace methody té na různých případech praktických.

1. Průběh reakce.

Jakožto látek výchozích použito nejčistšího kyanidu draselnatého, dusičnanu stříbrnatého a síranu měďnatého. Za základ vzat nejprve dusičnan stříbrnatý, z něhož připraven roztok přesně $n/10$, jehož 1 cm^3 odpovídá 0·013 g KCN a titrací tímto roztokem stanovena hodnota výchozího kyanidu: odvážených 8·2785 g KCN rozpuštěno na 500 cm^3 vody; 10 cm^3 tohoto roztoku vyžadovalo 12·70 cm^3 $n/10$ $AgNO_3$ (jako střed tří parallelních titrací), což odpovídá: $12{\cdot}70 \times 0{\cdot}013 \times 50 = 8{\cdot}255$ *g KCN v 500 cm³*.

Mimo to stanoveno množství KCN též vážkově (srážením AgCN u přít. HNO_3 a vyžíháním na kovové Ag). Z 10 cm^3 roztoku kyanidového získáno na konec 0·2755 g Ag, což odpovídá 0·1658 g KCN, čili v 500 cm^3 původního roztoku: 8·2900 g KCN

Odváženo	: *8·2785 g KCN,*
Nalezeno titrací	: 8·2550 g KCN,
Nalezeno vážkově	: 8·2900 g KCN,
Střed	: *8·2842 g KCN.*

Možno tudíž k našim účelům považovati kyanid použitý za 100%ní.

Dále připraveny normalné roztoky síranu měďnatého rozpuštěním nejčistšího $CuSO_4 . 5\,aq = M = 249{\cdot}5$. Pro roztok normalný odváženo (na základě dvojmocenství kovu, resp. dibasicity kyseliny) přesně 124·75 g soli té na 1 litr a roztoky další: $n/2$, $n/5$, $n/10$, $n/20$ a $n/100$ připraveny příslušným zředěním roztoku normalného.

Při smísení roztoků síranu měďnatého a kyanidu draselnatého vylučuje se předem bleděmodrá sedlina kyanidu měďnatého $Cu(CN)_2$, jež přídavkem dalšího kyanidu se rozpustí a roztok se stává bezbarvým.

Dle Traedwella (viz Traedwell: Lehrbuch d. analytischen Chemie I. Bd.) prochází při tom reakce:

a) $2\ CuSO_4 + 4\ KCN = 2\ Cu(CN)_2 + 2K_2SO_4$,

b) $\begin{matrix} Cu(CN)_2 \\ Cu(CN)_2 \end{matrix} = (CN)_2 + Cu_2(CN)_2$,

c) $Cu_2(CN)_2 + 6\ KCN = [Cu_2(CN)_8]K_6$,

což možno shrnouti v idealnou rovnici jedinou:

$$CuSO_4 + 5\ KCN = Cu(CN)_4K_3 + CN + K_2SO_4,$$

čili, že na 1 mol $CuSO_4$ je zapotřebí 5 molů KCN, tedy:

$CuSO_4 \cdot 5\ aq = 249{\cdot}5$ odpovídá 5 KCN = 325, následkem toho odpovídal by

1 *cm*³ *n* $CuSO_4$ 0·1625 *g* KCN a 1 *cm*³ našeho roztoku (16·5570 *g* KCN v 1 *l*) 0·102 *cm*³ *n* $CuSO_4$,

1 *cm*³ *n*/2 $CuSO_4$ 0·08125 *g* KCN a 1 *cm*³ našeho roztoku (16·5570 *g* KCN v 1 *l*) 0·204 *cm*³ *n*/2 $CuSO_4$,

1 *cm*³ *n*/5 $CuSO_4$ 0·0325 *g* KCN a 1 *cm*³ našeho roztoku (16·5570 *g* KCN v 1 *l*) 0·509 *cm*³ *n*/5 $CuSO_4$,

1 *cm*³ *n*/10 $CuSO_4$ 0·01625 *g* KCN a 1 *cm*³ našeho roztoku (16·5570 *g* KCN v 1 *l*) 1·01 *cm*³ *n*/10 $CuSO_4$,

1 *cm*³ *n*/20 $CuSO_4$ 0·008125 *g* KCN a 1 *cm*³ našeho roztoku (16·5570 *g* KCN v 1 *l*) 2·03 *cm*³ *n*/20 $CuSO_4$,

1 *cm*³ *n*/100 $CuSO_4$ 0·001625 *g* KCN a 1 *cm*³ našeho roztoku (16·5570 *g* KCN v 1 *l*) 10·10 *cm*³ *n*/100 $CuSO_4$.

Aby se zjistilo, probíhá-li vskutku reakce v tomto smyslu, odměřeno vždy po 10 *cm*³ roztoku kyanidového a titrováno jednotlivými roztoky měďnatými za přídavku vždy stejného množství indikatoru, to j. 0·5 *cm*³ 10%ho roztoku ferrokyanidu draselnatého. Teplota byla laboratorní a činila 17—18° C. Výsledky, jež jsou vždy středem dvou parallelních titrací, sestaveny jsou v tabulku:

Odměřeno ⊙ KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4 . 5\ aq$	Spotřebováno *cm*³	Theorie vyžaduje *cm*³	Přechod zbarvení
10 *cm*³	*n*	1·265	1.01	intens. a přes.
10 *cm*³	*n*/2	2·60	2·02	,, ,,
10 *cm*³	*n*/5	6·525	5·05	,, ,,
10 *cm*³	*n*/10	13·025	10·1	,, ,,
10 *cm*³	*n*/20	as 26·0	20·2	méně přesný
10 *cm*³	*n*/100	as 140·0	10·1	velmi nepřesný

Z tabulky vidno, že s klesající koncentrací síranu měďnatého přesnost se zmenšuje, neboť barevný přechod jest již méně intensivný. Koncentrace roztoků *n* až *n*/10 jest stejně výhodna, *n*/20 již méně, a koncentrace *n*/100 jest již nepoužitelna. Další závažné faktum jest, že spotřeba roztoku měďnatého jest větší než theorie předvídá dle známé, výše citované rovnice ($CuSO_4 + 5$ KCN) a nejen to, ve vyšší spotřebě té jeví se zde *zcela přesná pravidelnost*. Nastává tudíž možnost, že rovnice jak jest uvedena v Traedwellově učebnici takto zředěným roztokům neodpovídá. K potvrzení této domněnky možno dospěti touto úvahou:

1 cm^3 našeho roztoku kyanidového chová 0·016557 g KCN; z tabulky kontrolní jest patrno, že toto množství spotřebovalo:

$\frac{1·265}{10}$ $cm^3 = 0·1265$ cm^3 n $CuSO_4$,

$\frac{2·6}{10}$ $m^3 = 0·2600$ cm^3 $n/2$ $CuSO_4$,

$\frac{6·525}{10}$ $cm^3 = 0·65$ cm^3 $n/5$ $CuSO_4$,

$\frac{13·025}{10}$ $cm^3 = 1·3025$ cm^3 $n/10$ $CuSO_4$; odpovídá tudíž 1 cm^3 našeho kyanidu 0·13025 cm^3 n $CuSO_4$ (5 aq). Ježto pak 1 cm^3 n $CuSO_4$ (5 aq) obsahuje 0·12475 g $CuSO_4 \cdot 5$ aq tedy odpovídá 0·016557 g KCN : 0.0162487 g $CuSO_4 . 5$ aq, což přepočteno na veličiny molekulové:

KCN : x $CuSO_4 \cdot 5$ aq = 65 : x = 0·16557 : 0·0162487, $x = 63·7$, t. j. na 65 č. KCN připadá 63·7 č. $CuSO_4 \cdot 5$ aq a konečně z úměry:

65 : 63·7 = x (KCN) : 249·5 ($CuSO_4 \cdot 5$ aq), $x = 3·91$, čili, že *na 1 molekulu (249·5) $CuSO_4 \cdot 5$ aq připadají 4 (3·91) molekuly KCN.*

Nelze tudíž rovnice výše citované pro tyto poměry použíti a lze tu počítati jedině s rovnicí, jež v plné míře souhlasí s případem pro soli nikelnaté:

$$NiCl_2 + 2\ KCN = 2\ KCl + Ni(CN)_2,$$
$$Ni(CN)_2 + 2\ KCN = Ni(CN)_4K_2,$$

čili $NiCl_2 + 4\ KCN = Ni(CN)_4K_2 + 2\ KCl$, tedy pro náš případ platí schema:

$$CuSO_4 + 4\ KCN = Cu(CN)_4K_2 + K_2SO_4.$$

Tomu ostatně nasvědčuje ještě i okolnost, že nižádným způsobem nebylo možno konstatova i za našich podmínek reakčních přítomnost volného kyanu, jenž dle schematu Traedwellem uváděného při reakci vzniká.

2. Vliv množství přidávaného indikatoru a koncentrace roztoku kyanidového.

Jakožto kapalin odměrných použito roztoků $CuSO_4 \cdot 5$ aq n, $n/2$, $n/5$, $n/10$ a $n/20$ a titrovány postupně roztoky chovající 0·1, 0·25, 0·5, 1·0, 5·0, 10·0 20·0% KCN za současného přidávání různého množství 10%ho roztoku ferrokyanidu draselnatého. Dle výše dokázané reakce: $CuSO_4 + 4\ KCN = Cu(CN)_4K_2 + K_2SO_4$ odpovídá 249·5 č. $CuSO_4 \cdot 5$ aq : 4 × 65 = 260 č. CKN, čili

1 cm^3 n	$CuSO_4 \cdot 5$ aq	odpovídá	0·1300 g KCN,
1 cm^3 $n/2$	,,	,,	0·0650 g KCN,
1 cm^3 $n/5$	,,	,,	0·0260 g KCN,
1 cm^3 $n/10$	,,	,,	0·0130 g KCN,
1 cm^3 $n/20$	,,	,,	0·0065 g KCN.

Na základě těchto dat provedena nyní řada titrací, jejichž výsledky shrnuty jsou v příslušné tabulky.

a) Roztok chovající 0·1% KCN.

Přidáno indikátoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
1 kapka	5 cm^3	normalným	0·04	0·03845	vesměs přesný a rychlý	titrováno z byrety dělené na $^1/_{100}$ cm^3
3 „			0·04			
5 „			0·05			
10 „			0·045			
1 cm^3			0·045			
5 „			0·045			
10 „			0·06			
1 kapka	5 cm^3	$^1/_2$ normalným	0·08	0·0779	vesměs přesný a rychlý	titrováno z byrety dělené na $^1/_{100}$ cm^3
3 „			0·09			
5 „			0·1			
10 „			0·105			
1 cm^3			0·12			
5 „			0·11			
10 „			0·11			
1 kapka	5 cm^3	$^1/_3$ normalným	0·2	0·19225	jasný a přesný	byreta $^1/_{100}$ cm^3
3 „			0·2			
5 „			0·21			
10 „			0·22			
1 cm^3			0·25			
5 „			0·28		se stoup. množst. indikátoru tvoří se sedlina těžce rozp.	
10 „			0·30			
1 kapka	5 cm^3	$^1/_{10}$ normalným	0·4	0·3845	jasný a přesný avšak značně volnější	byreta $^1/_{10}$ cm^3
3 „			0·4			
5 „			0·4			
10 „			0·4			
1 cm^3			0·5			
5 „			0·6		méně přesný	
10 „			0·65			
1 kapka	5 cm^3	$^1/_{20}$ normalným	0·8	0·779	dosti volný	byreta $^1/_{10}$ cm^3
3 „			0·8			
5 „			0·8			
10 „			0·85		málo jasný nepřesný	
1 cm^3			0·9			
5 „			1·05			
10 „			1·20			

Z tabulky vidno, že v roztoku 0·1%ním probíhá reakce nejhladčeji a nejpřesněji za použití roztoků měďnatých $n/5$ a $n/10$. Roztoky jak zředěnější, tak koncentrovanější jsou méně výhodny. Podobně i přebytek

indikatoru jest na závadu. Množství indikatoru nad 10 kapek jest již nepříznivo, tvoří se snadno tmavočervená sedlina v prostředí reakčním dosti zvolna rozpustná, což jest na újmu rychlosti i přesnosti titrace.

b) Roztok chovající 0·25% KCN.

Přidáno indikatoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
1 kapka			0·105		méně přesný	
3 „			0·1			
5 „			0·95		přesný	byretou dělenou na $^1/_{100}$ cm^3
10 „	5 cm^3	n	0·1	0·0961		
1 cm^3			0·12			
5 „			0·13			
10 „			—			
1 kapka			0·195		méně přesný	
3 „			0·195		přesný	
5 „			0·195		velmi přesný	byretou
10 „	5 cm^3	$n/2$	0·20	0·1922	málo přesný	dělenou
1 cm^3			0·23		roztok již příliš žlutý až hnědý, přechod velmi nepřesný	na $^1/_{100}$ cm^3
5 „			0·25			
10 „			0·28			
1 kapka			0·5		méně přesný	
3 „			0·5		velmi přesný a rychlý	
5 „			0·5			byretou
0 „	5 cm^3	$n/5$	0·55	0·4806		dělenou
1 cm^3			0·65		roztok příliš žlutý až hnědý, přechod nepřesný	na $^1/_{100}$ cm^3
5 „			0·65			
10 „			0·65<			
1 kapka			0·95<		málo přesný,	
3 „			0·95		přesný	
5 „			1·0		a rychlý	byretou
10 „	5 cm^3	$n/10$	1·0	0·961	roztok hnědý	dělenou
1 cm^3			1·20		přechod nejasný a nepřesný	na $^1/_{100}$ cm^3
5 „			1·30			
10 „			1·35			
1 kapka			2·0		málo přesný	
3 „			1·95		přesný	
5 „			1·95		a rychlý	byretou
10 „	5 cm^3	$n/20$	2·25	1·922		dělenou
1 cm^3			2·4		nepřesný	na $^1/_{10}$ cm^3
5 „			2·5			
10 „			2·6		vel. nepřesný	

Tabulka poučuje nás o tom, že se stoupající koncentrací prostředí titrovaného jest stoupající množství indikatoru na závadu. Nejvýhodnější množství indikatoru jest zde 5—10 kapek, koncentrace pak roztoků titračních $n/2$ až $n/10$.

c) Roztok chovající 0·5% KCN.

Přidáno indikatoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
1 kapka			0·2<			
3 „			0·2<			
5 „			0·2		vesměs přesný	titrováno z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	n	0·2	0·19215		
1 cm^3			0·2>			
5 „			0·25			
10 „			0·25			
1 kapka			0·4<			
3 „			0·4<			
5 „			0·4		velmi přesný	titrováno z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/2$	0·4>	0·3843		
1 cm^3			0·4>		přesný	
5 „			0·45			
10 „			0·45		málo jasný	
1 kapka			0·95			
3 „			1·0		velmi přesný	
5 „			1·0			titrováno z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/5$	1·05	0·95075	málo přesný, vadí žluté až hnědé barvení se roztoku	
1 cm^3			1·15			
5 „			1·2			
10 „			1·3			
1 kapka			2·15		méně přesný	
3 „			2·05			
5 „			2·0		přesný	titrováno z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/10$	2·1	1·9215		
1 cm^3			2·4		méně přesný	
5 „			2·5		vadí zbarvení, nepřesný	
10 „			2·6			
1 kapka			4·0		nejasný	
3 „			3·9			
5 „			4·0		velmi přesný	titrováno z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/20$	4·2	3·8430	méně jasný	
1 cm^3			4·7			
5 „			4·8		nejasný a nepřesný	
10 „			5·2			

I v tomto případě se potvrzuje totéž co v případech předešlých.

d) Roztok chovající 1% KCN.

Přidáno indikátoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
1 kapka			0·4		méně jasný	
3 „			0·4		jasný a přesný	
5 „			0·4			z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	n	04>	0·3845		
1 cm^3			0·4>		nejasný a nepřesný	
5 „			0·45			
10 „			0·5			
1 kapka			0·8		nepřesný	
3 „			0·75		přesný	
5 „			0·75			z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/2$	0·8	0·7690		
1 cm^3			0·8		nepřesný	
5 „			0·9			
10 „			1·0			
1 kapka			1·95		nepřesný	
3 „			1·95		přesný	
5 „			1·95>			z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/5$	1·95	1·9225		
1 cm^3			2·05		velmi nepřesný	
5 „			2·2			
10 „			2·5			
1 kapka			3·9		vel. nepřesný	
3 „			3·85		přesný	
5 „			3·85>			z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/10$	3·95	3·845		
1 cm^3			4·4		nepřesný	
5 „			4·8		velmi nepřesný	
10 „			5·3			
1 kapka			10·0		vel. nepřesný	
3 „			7·9		přesný	
5 „			7·8			z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/20$	8·2	7·690		
1 cm^3			9·1		velmi nepřesný	
5 „			9·6			
10 „			11·3			

Množství indikatoru 5—10 kapek zůstává stále nejvýhodnější; koncentrace roztoků titračních nesmí v tom případě klesnouti již pod $n/10$, jelikož titrace roztokem $n/20$ jest již vůbec nepoužitelnou. Nepřesnost přechodů barevných spočívá v tom, že roztok za přebytku indikatoru se barví intensivně žlutě, později hnědě, tak že vlastní kriterium reakce rozpoznati se dá pouze těžce.

e) Roztok chovající 5% KCN.

Přidáno indikatoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
1 kapka			2·0		nepřesný	
5 „			1·9>		velmi přesný	byretou dělenou na $^1/_{10}$ cm^2
10 „	5 cm^3	n	1·9>	1·9225		
5 cm^3			2·05		velmi nejasný	
10 „			2·10			
1 kapka			3·9		nepřesný	
5 „			3·8		velmi přesný	byretou dělenou na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/2$	3·8	3·845		
5 cm^3			4·0		velmi nejasný	
10 „			4·2			
1 kapka			9·7		nepřesný	
5 „			9·6		velmi přesný	byretou dělenou na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/5$	9·6	9·6125		
5 cm^3			9·7		velmi nejasný	
10 ..			10			
1 kapka			19·3		nepřesný	
5 „			19·2		velmi přesný	byretou dělenou na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/10$	19·2	19·225	přesný	
5 cm^3			20·2		neupotřebitelný	
10 „			20·9			
1 kapka			38·5		nepřesný	
5 „			38·5		přesný	byretou dělenou na $^1/_{10}$ cm^3
10 „	5 cm^3	$n/20$	38·5	38·45		
5 cm^3			41·6		neupotřebitelný	
10 „			43·5			

Jak již z předchozích tabulek bylo patrno, stává se titrace v koncentrovanějších roztocích značně nepřesnou, což potvrzuje se i při roztoku 5% KCN. Hlavně u přítomnosti většího množství indikatoru (ferrokyanidu draselnatého) jest průběh reakce nepoužitelný. Roztok titrovaný

barví se totiž v míru přidávání potřebného kyanidu velmi intensivně žlutě až žlutohnědě, kterézto zbarvení maskuje takřka úplně přechod v onen karakteristický odstín tmavočervený naznačující konec reakce. I zde se osvědčuje 5—10 kapek indikatoru a titrovati lze všemi roztoky skorem stejně přesně.

j) *Roztok chovající 10% KCN.*

Přidáno indikatoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
1 kapka	5 cm^3	*n*	3·5	3·845	vel. nejasný	z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
5 „			3·2		neupotřebitelný	
10 „			?		nelze již vůbec titrovati	
5 cm^3			?			
1 kapka	5 cm^3	*n*/2	6·7	7·69	barví se červeně, zbarvení mizí zředěním	z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
5 „			6·3			
10 „			?		velmi nejasný	
5 cm^3			?			
1 kapka	5 cm^3	*n*/5	17·7	19·225	méně přesný	z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
5 „			17·6		dobrý	
10 „			18·5		vel. nejasný	
5 cm^3			19·5			
1 kapka	5 cm^3	*n*/10	38·6	38.45	méně přesný	z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
5 „			38·45		velmi dobrý	
10 „			38·5		vel. nejasný	
5 cm^3			39·2			
1 kapka	5 cm^3	*n*/20	77·2	76·90	méně jasný	z byrety dělené na $^1/_{10}$ cm^3
5 „			76·85		dobrý	
10 „			76·95		dosti dobrý	
5 cm^3			77·65			

Jest patrno, že v roztocích koncentrovanějších jest titrace již velmi nepřesna a roztoky *n*, *n*/2 a *n*/5 nedá se již ani provésti, ježto směs se barví ihned po vpravení první kapky kyanidu hnědě, tak že nelze konce reakce vůbec rozeznati. Menší spotřeba mědi (as o $^1/_5$), značné zahřívání se roztoku a *hlavně vývoj bublinek plynu, v němž skonstatován kyan,* nasvědčuje tomu, že reakce v mediu koncentrovaném (kolem 10% KCN) probíhá ve smyslu původního schema Traedwellem uváděného: $CuSO_4 + 5\,KCN = Cu(CN)_4K_3 + CN + K_2SO_4$. Roztok 10%ní KCN lze titrovati správně pouze roztokem *n*/10ným, poměrně dobře probíhá též titrace roztokem *n*/20, není však možno jí odporučiti.

g) Roztok chovající 20% KCN.

Přidáno indikatoru	Odměřeno roztoku KCN	Titrováno roztokem $CuSO_4$	Spotřeba v cm^3	Theorie vyžaduje cm^3	Přechod zbarvení	Poznámka
3 kapky	5 cm^3	*n*	as 4	7·69	vel. nejasný	barví se hnědě
10 „			?		nelze vůbec titrovati	vyvíjí silně kyan a zahřívá se
5 cm^3			?			
10 „			?			
3 kapky	5 cm^3	*n*/2	as 11	15·38	vel. nejasný	barví se hnědě a vyvíjí kyan
10 „			?		nelze vůbec titrovati	
5 cm^3			?			
10 „			?			
3 kapky	5 cm^3	*n*/5	35·0	38·45	vel. nepřesný	barví se hnědě a vyvíjí kyan
10 „			as 34		vel. nejasný	
5 cm^3			?		neupotřebitelný	
10 „			?			
3 kapky	5 cm^3	*n*/10	as 23(!)	76·90	velmi nejasný	slabý vývoj kyanu
10 „			as 26(!)		neupotřebitelný	
5 cm^3			?			
10 „			?			
3 kapky	5 cm^3	*n*/20	as 146	153·8	velmi nejasný	kyan se nevyvíjí
10 „			as 142			
5 cm^3			as 147·5		dosti dobrý	
10 „			153·75			

Z tabulky této vidno, že roztok 20%ní vůbec nelze již titrovati, spotřeba síranu měďnatého jest pravidelně mnohem menší, což znovu mluví pro platnost schema ($CuSO_4 + 5\,KCN$) podobně jako při roztoku 10%ním.

Ze všech právě popsaných pokusů v tabulkách *a*—*g* uvedených plyne, že methodou touto možno přesně titrovati roztoky kyanidů až do koncentrace 5% KCN, při čemž sluší použiti k titraci roztoků měďnatých *n*/2 až *n*/10 a přidávati indikatoru 5—10 kapek. Koncentrace jiné jsou méně výhodny.

3. Vliv teploty.

K pokusům v tomto směru vykonaným použito 0·5%ho roztoku kyanidu draselnatého, jenž titrován pak postupně jednotlivými roztoky *n* až *n*/20ným při teplotách od 0° až do 90° C. Při titracích udržována konstantně příslušná temperatura a kontrolována vnořeným teploměrem v kapalině titrované.

10 cm³ 0·5%ho roztoku KCN za přídavku 5 kapek indikatoru spotřebovalo při teplotě T cm³ roztoku $CuSO_4$:

Roztoku	při 0°	5°	10°	15°	20°	35°	50°	70°	90°	Theorie
n	0·4	0·4	0·4	0·4>	0·4>	0·4>	0·45	0·45	0·5	0·384
n/2	0·75	0·75	0·75	0·75	0·8	0·8	0·85	0·9	0·9>	0·769
n/5	1·90	1·90	1·95	1·95	1·95>	2·1	2·2	2·25	2·3	1·93
n/10	3·85	3·85	3·9	3·9>	4·0	4·2	4·3	4·7	4·6	3·84
n/20	7·70	7·7	7·8	8·1	8·0	8·1	8·1	8·4	9·1	7·69

Pokusy vykonané poukazují na použitelnost methody při teplotě od 0° až do 20° C zcela přesnou. S dále stoupající teplotou klesá již přesnost, stávají se již výsledky pravidelně vyššími, mnohdy až o 15—20%.

Résumé.

1. Kyanovodík možno stanoviti v podobě kyanidu draselnatého přímou titrací síranem měďnatým aniž by bylo nutno alkalisovati jej ammoniakem jako při methodě Mohrově. Přebytek jontu Cu dá se konstatovati velmi dobře přidáním roztoku ferrokyanidu draselnatého jakožto indikatoru.

2. Reakce při tom probíhající vyjadřuje se schematem:

$$CuSO_4 + 4\ KCN = K_2\ Cu(CN)_4 = K_2\ SO_4$$

a nikoliv

$$CuSO_4 + 5\ KCN = Cu(CN)_4\ K_3 + CN + K_2\ SO_4 \text{ (zjednodušeně).}$$

3. Schema posléze uvedené vstupuje v platnost teprve při roztocích odpovídajících vyšší koncentraci nežli 10% KCN.

4. Přesně možno titrovati roztoky kyanidové nepřesahující koncentrace 5% KCN a to hodí se k tomu ½ až $^1/_{10}$ normálné roztoky síranu měďnatého; roztok *n* jest příliš koncentrovaný, roztok pak *n*/20 již příliš zředěný.

5. Indikatoru nejlépe jest používati v podobě 10%ho roztoku vodného ferrokyanidu draselnatého a přidávati ho vždy 5 kapek; menší množství bývá nedostatečno, větší pak vede k vyšším nálezům.

6. Teplota, při níž možno titrovati, smí se pobybovati v mezích 0°—20° C, s vyšší temperaturou roste již spotřeba roztoku měďnatého a získávají se tím vyšší výsledky.

7. Při titraci dlužno roztoku měďnatého přidávati po kapkách a roztokem titrovaným neustále energicky pohybovati. Titruje se, až poslední

kapka $CuSO_4$ vyvolá přechod zbarvení intens. žlutého v odstín tmavočervený; přechod jest okamžitý a velmi dobře patrný.

8. Applikace methody této na jiné kyanidy a kyanovodík sám u přítomnosti látek anorganických i organických bude v době nejbližší publikována jakožto druhý díl tohoto pojednání.

Ústav obecné chemie organické a technologie potravin na c. k. české vys. škole technické cís. Františka Josefa v Brně.

O sborcených hyperboloidech v souvislosti s lineárními komplexy.

Napsal

Dr. **VÁCLAV SIMANDL,**

assistent české techniky v Brně.

(Předloženo dne 16. října. 1914.)

Dvěma libovolnými přímkovými hyperboloidovými řadami, totiž dvěma libovolnými přímkovými řadami na dvou různých hyperboloidech nelze obecně stanoviti lineární komplex tak, aby tento obsahoval přímky řady jedné a přímky řídicí řady, řady druhé. Když to však nastává, tu mají naše hyperboloidové řady, a tudíž též hyperboloidy, jakožto nositelé jejich, zvláštní polohu. A studiem hyperboloidových řad a hyperboloidů v této poloze se budeme zabývati. Dále pak budeme studovati ještě speciálnější polohu hyperboloidových řad a hyperboloidů, kdy totiž přímková řada jednoho hyperboloidu leží s oběma řadami druhého hyperboloidu vždy v určitém lineárním komplexu.

Seznáme, že dva hyperboloidy v uvedených polohách definují jednu, resp. dvě sborcené plochy stupně čtvrtého rodu 1. Tyto plochy vyplněny jsou, jak ukážeme, diagonálami prostorových čtyřúhelníků, jejichž dvě a dvě protější strany leží vždy na jednom z dvou uvažovaných hyperboloidů. Při speciálnější z našich poloh dospějeme pak ku zajímavé konfiguraci dvou sborcených ploch 4. stupně a čtyř lineárních komplexů, které jsou navzájem v involuci.

Úvahy naše vedou nás přímo ku zvláštním systémům hyperboloidových přímkových řad, to jest ku takovým systémům těchto řad, které vzhledem k dané jedné hyperboloidové řadě nebo k daným několika řadám mají jednu z našich speciálních poloh neboli, jak budeme říkati, které jsou k nim v involuci, resp. v dvojnásobné involuci. A podobně budeme definovati systémy sborcených hyperboloidů. Posléze provedeme některé konstruktivné úlohy týkající se těchto hyperboloidových systémů a jejich pronikových systémů.

1. O dvou hyperboloidových přímkových řadách v involuci.

Máme-li dvě hyperboloidové přímkové řady té vlastnosti, že dvě přímky jedné řady protínají tytéž dvě přímky druhé řady tak, že tyto čtyři přímky tvoří prostorový čtyřúhelník, tu budeme říkati o takových dvou řadách, že jsou v involuci.

Buďte α^2 a β^2 dvěma přímkovými řadami této vlastnosti, a buďtež a_1, a_2 dvěma přímkami řady α^2 a b_1, b_2 dvěma přímkami řady β^2 takovými, že tvoří spolu prostorový čtyřúhelník. Považujme nyní přímky a_1, a_2 za dvojinu konjugovaných polár lineárního komplexu, ve kterém jest obsažena řada β^2. Že takový lineární komplex skutečně existuje, jest patrno z naší zvláštní polohy přímkových řad α^2 a β^2. Označme si ten lineární komplex Γ. Uvažujme pak libovolnou přímku a_x přímkové řady α^2 a sestrojme si ku této přímce konjugovanou poláru a_y vzhledem ku lineárnímu komplexu Γ. Ježto víme, že dvě dvojiny konjugovaných polár lineárního komplexu vždy tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, musí a_y též ležeti na přímkové řadě α^2, neboť v našem případě tvoří tu čtveřinu přímky: a_1, a_2, a_x, a_y. Uvažujíce všecky přímky a_x řady α^2 dostaneme tak obyčejnou involuci dvojin a_x, a_y na řadě α^2. Involuci tu si označíme J_α. Jelikož a_x, a_y tvoří vždy dvojinu konjugovaných polár lineárního komplexu Γ, a jelikož tomuto komplexu náležejí všecky přímky přímkové řady β^2, musí každá dvojina přímková involuce J_α vytínati v řadě přímkové β^2 dvojinu přímek b_x, b_y tak, že

$$a_x,\ a_y,\ b_x,\ b_y$$

jest prostorový čtyřúhelník. Dvojiny přímek b_x, b_y tvoří na β^2 patrně zase involuci, kterou si označíme J_β. Jest též zřejmo, že dvojiny přímek a_1, a_2 a b_1, b_2 jsou dvojinami uvedených involucí J_α a J_β.

Můžeme tedy vysloviti větu:

Máme-li dvě přímkové řady hyperboloidové té vlastnosti, že dvě přímky jedné řady protínají tytéž dvě přímky druhé řady, tu existuje na každé řadě hyperboloidové obyčejná involuce přímek taková, že vždy dvě přímky dvojiny jedné involuce protínají obě přímky určité dvojiny involuce druhé.

O dvou takových přímkových hyperboloidových řadách budeme říkati, že jsou v involuci.

Jest patrno, že každá přímková řada hyperboloidová jest se svou řídicí řadou v involuci. Řídicí řadou dané řady rozumíme patrně řadu, která s danou řadou náleží témuž hyperboloidu.

Buďtež α_1^2, β_1^2 dvě přímkové řady, které jsou řídicími řadami dříve uvažovaných řad α^2, β^2. Jest patrno, že uvažovaný lineární komplex Γ obsahuje přímkové řady: α_1^2, β^2. Když si stanovíme lineární komplex Γ_1 dvojinou konjugovaných polár b_1, b_2 a přímkovou řadou α^2, která jest v něm obsažena, tu vidíme, že tento lineární komplex Γ_1 obsahuje řady: α^2, β_1^2. Z toho vidíme:

Je-li přímková řada hyperboloidová vzhledem k určité řadě přímkové hyperboloidové v involuci, tu leží s řídicí řadou této řady v určitém lineárním komplexu.

Lze snadno nahlédnouti, že zmíněné lineární komplexy, které si označíme symbolicky:

$$\Gamma \equiv \{\alpha_1^2, \beta^2\}; \quad \Gamma_1 \equiv \{\alpha^2, \beta_1^2\},$$

jsou v involuci a patrně jsme zde též dospěli k větě v geometrii útvarů přímkových známé (Sturm: Liniengeometrie I. p. 134), že jsou-li dvě hyperboloidové řady obsaženy v témže lineárním komplexu, že též jejich řídicí řady jsou v určitém lineárním komplexu obsaženy. Tato věta a pak opak hoření věty, jehož správnost snadno lze nahlédnouti, že totiž leží-li nějaká řada hyperboloidová s jinou řadou hyperboloidovou v témže lineárním komplexu, že pak ona řada s řídicí řadou této jest v involuci, opravňují nás k vyslovení věty:

Jsou-li dvě hyperboloidové přímkové řady v involuci, jsou též v involuci jejich řídicí řady.

Vyslovme dále větu:

Jsou-li dvě přímkové hyperboloidové řady v involuci, tu lze každou touto řadou proložiti lineární komplex, který jest v involuci ku všem ∞^2 lineárním komplexům, které procházejí druhou řadou.

Tak při našich involutorních řadách α^2 a β^2 lze řadou α^2 resp. řadou β^2 proložiti lineární komplex $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ resp. lineární komplex $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$, který jest v involuci ku všem ∞^2 lineárním komplexům, které procházejí řadou β^2 resp. řadou α^2. Při involutorních řadách α_1^2 a β_1^2 jsou to pak tytéž lineární komplexy, řadou α_1^2 lineární komplex $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ a řadou β_1^2 pak lineární komplex $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$.

Jest patrno, že poslední uvedená věta platí též obráceně.

Vzhledem ku hyperboloidům (jakožto nositelům našich přímkových řad) můžeme pak vysloviti věty, jež z předchozího přímo vyplývají:

Máme-li dva sborcené hyperboloidy A^2 *a* B^2 *o přímkových řadách* α^2, α_1^2 *resp.* β^2, β_1^2 *té vlastnosti, že dvě přímky řady* α^2 *protínají dvě přímky řady* β^2 *tak, že tvoří s těmito sborcený čtyřúhelník, pak existuje takových čtyřúhelníků* ∞^1 *a sice dvě skupiny. Dvojice protějších stran první skupiny tvoří přímkové dvojice obyčejných involucí v přímkách řad* α^2 *a* β^2, *dvojice pak protějších stran druhé skupiny jsou dvojicemi obyčejných involucí v přímkách řad* α_1^2 *a* β_1^2.

Dva takové sborcené hyperboloidy A^2 *a* B^2, *které jsou nositeli dvou dvojin přímkových řad v involuci, budeme označovati jakožto dva hyperboloidy s přímkovými řadami v involuci.*

Danou přímkovou řadou hyperboloidovou prochází ∞^2 lineárních komplexů, a každý tento komplex obsahuje ∞^6 přímkových řad hyperboloidových, které jsou v involuci ku řídicí řadě dané přímkové řady hyperboloidové.

Existuje tudíž ku dané přímkové řadě hyperboloidové ∞^8 přímkových řad hyperboloidových, které jsou s ní v involuci.

Tudíž též můžeme vysloviti větu:

Ku danému hyperboloidu existuje ∞^8 hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, které jsou s řadami daného hyperboloidu v involuci.

Jakožto příklad dvou hyperboloidů s přímkovými řadami v involuci můžeme považovati též dva hyperboloidy, které mají jednu přímku společnou, což lze velmi snadno nahlédnouti. Hyperboloidů takových existuje patrně vzhledem k danému hyperboloidu ∞^7, systém těchto hyperboloidů jest obsažen v systému ∞^8 hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, které jsou s řadami daného hyperboloidu v involuci, kterýžto systém, jak později seznáme, jest kvadratickým a který budeme označovati Σ_8^2.

2. O dvou přímkových hyperboloidových řadách v dvojnásobné involuci.

Uvažujme nyní dvě přímkové řady hyperboloidové α^2 a β^2 a jejich řídicí řady α_1^2 a β_1^2 té vlastnosti, že netoliko dvojiny α^2, β^2 a α_1^2, β_1^2 jsou v involuci, nýbrž též dvojiny α^2, β_1^2 a α_1^2, β^2 čili, že existují čtyři lineární komplexy:

$$\{\alpha^2, \beta^2\}, \{\alpha_1^2, \beta_1^2\}, \{\alpha^2, \beta_1^2\}, \{\alpha_1^2, \beta^2\},$$

jichž symbolické označení, kterého budeme nadále v této práci užívati, nám ukazuje, kterými hyperboloidickými přímkovými řadami tyto 4 lineární komplexy procházejí. Přicházíme tak ku pojmu dvou hyperboloidických přímkových řad, které jsou v involuci, a které jsou současně obsaženy v témže lineárním komplexu.

Dva lineární komplexy $\{\alpha^2, \beta^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ pronikají se v lineární kongruenci, která jest polárně invariantní vzhledem ku hyperboloidu A^2, nositeli to přímkových řad α^2 a α_1^2. To jest patrno z toho, že řídicí přímky této kongruence jsou diagonálami sborceného čtyřúhelníka na A^2, jehož dvě a dvě protější strany jsou přímkami řad α^2 a α_1^2, které současně náležejí lineárním komplexům $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ a $\{\alpha^2, \beta^2\}$. Tato vzhledem ku A^2 polárně invariantní lineární kongruence musí patrně obsahovati řadu β^2, ježto tato jest obsažena v obou našich uvažovaných lineárních komplexech.

Zcela analogicky, jako jsme právě teď ukázali, že β^2 se nachází v lineární kongruenci, která jest polárně invariantní vzhledem ku hyperboloidu A^2, lze též dokázati, že α^2 jest obsažena v polárně invariantní kongruenci vzhledem ku hyperboloidu B^2 nositeli to řad β^2, β_1^2. Lineární kongruence tato jest pronikem lineárních komplexů $\{\alpha_1^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$.

Máme tedy větu:

Jsou-li dvě přímkové řady hyperboloidové v involuci a jsou-li zároveň obsaženy v témže lineárním komplexu, pak jest každá z těchto řad obsažena

v lineární kongruenci, která jest polárně invariantní vzhledem ku hyperboloidu, který jest nositelem řady druhé.

Dvě přímkové řady hyperboloidové této vlastnosti budeme nazývati řadami v dvojnásobné involuci.

Právě odvozená věta platí však též obráceně. Buďtež p, q konjugovanými polárami hyperboloidu A^2 a uvažujme v lineární kongruenci $[p, q]$ libovolnou hyperboloidovou řadu β^2. Řídicí řada β_1^2 této řady jest pak v involuci ku oběma řadám α^2 a α_1^2 hyperboloidu A^2, neboť dvě přímky řady β_1^2 totiž přímky p, q jakožto konjugované poláry hyperboloidu A^2 tvoří pokaždé se dvěma přímkami řad α^2 a α_1^2 sborcený čtyřúhelník, což k involutornosti našich přímkových řad, jak jsme dříve byli ukázali, úplně postačí. Jest tedy též β^2 ku oběma řadám α^2, α_1^2 v involuci dle věty dříve dokázané o involutornosti řídicích řad. Z toho ale vyplývá zase existence čtyř lineárních komplexů:

$$\{\alpha^2, \beta^2\}, \{\alpha^2, \beta_1^2\}, \{\alpha_1^2, \beta^2\}, \{\alpha_1^2, \beta_1^2\}.$$

Z předešlé věty jest pak patrno, že řada α^2 jest obsažena v polárně invariantní lineární kongruenci vzhledem ku hyperboloidu B^2 nositeli to řady β_1^2. Můžeme tedy vysloviti obráceně větu předchozí:

Máme-li dvě přímkové hyperboloidové řady té vlastnosti, že každá z těchto řad jest obsažena v lineární kongruenci, která jest polárně invariantní vzhledem ku hyperboloidu, který jest nositelem řady druhé, pak jsou obě řady v involuci a současně jsou obsaženy v témže lineárním komplexu.

Dva hyperboloidy, které jsou nositeli přímkových řad v dvojnásobné involuci, budeme nazývati dvěma hyperboloidy s přímkovými řadami v dvojnásobné involuci.

Uvažujme nyní dva takové hyperboloidy s řadami v dvojnásobné involuci. Jak jsme právě o takových přímkových řadách ukázali, jest každá taková řada obsažena v lineární kongruenci, která jest polárně invariantní vzhledem ku hyperboloidu, který jest nositelem řady druhé, čili lépe řečeno, ku tomu z našich hyperboloidů, na kterém tato řada neleží. Nalézají se tudíž řídicí přímky této kongruence vždy v řadě, která jest řídicí řadou uvažované řady. Nacházejí se tudíž v kterékoli řadě ze čtyř přímkových řad našich dvou uvažovaných hyperboloidů dvě dvojiny přímek, které jsou řídicími přímkami dvou lineárních kongruencí polárně invariantních vždy vzhledem k tomu z našich dvou hyperboloidů, na kterém tato řada neleží, neboli které jsou dvojinou konjugovaných polár vždy ku tomuto hyperboloidu.

Můžeme tudíž vysloviti větu:

Na každém z dvou hyperboloidů s přímkovými řadami v dvojnásobné involuci leží sborcený čtyřúhelník, který se svými diagonálami tvoří polární tetraedr druhého hyperboloidu.

Dlužno podotknouti, že ku této konfiguraci dvou ploch 2. stupně analyticky a jinou cestou přišel již A. Voss.[1])

Čtyři lineární komplexy, ku kterým vedou dva hyperboloidy s přímkovými řadami v dvojnásobné involuci a které jsme si byli vzhledem k přímkovým řadám v nich obsaženým označili:

$$\{\alpha^2, \beta^2\}, \{\alpha^2, \beta_1^2\}, \{\alpha_1^2, \beta^2\}, \{\alpha_1^2, \beta_1^2\},$$

tvoří takovou konfiguraci čtyř lineárních komplexů, že každý z nich jest vzhledem ku třem ostatním v involuci. To lze snadno nahlédnouti z toho, že každý z těchto 4 lineárních komplexů, jak z našeho symbolického označení jest přímo patrno, obsahuje přímkové řady, jejichž řady řídicí jsou obsaženy v ostatních lineárních komplexech. A dva lineární komplexy, které procházejí různými přímkovými řadami téhož hyperboloidu, jsou zajisté v involuci.

Ku dané přímkové řadě hyperboloidové existuje ∞^7 hyperboloidických řad, které jsou s ní v involuci a současně vždy obsaženy v nějakém lineárním komplexu. To lze nahlédnouti z toho, že ku hyperboloidu, který jest nositelem dané řady, existuje ∞^4 polárně invariantních lineárních kongruencí, z nichž každá zase obsahuje ∞^3 přímkových řad hyperboloidových. Ku tomuto množství ∞^7 našich přímkových řad neboli ku tomuto 7mocnému systému dospěli bychom též jakožto ku proniku dvou 8mocných systémů přímkových řad, které jsou v involuci jednak ku řadě dané, jednak ku její řadě řídicí.

Vysloviti lze tudíž věty:

Ku dané hyperboloidové přímkové řadě existuje ∞^7 přímkových řad, které jsou k dané řadě v dvojnásobné involuci.

Ku danému hyperboloidu existuje ∞^7 hyperboloidů, které obsahují řady, které jsou ku řadám daného hyperboloidu v dvojnásobné involuci.

Dva hyperboloidy, které se protínají v sborceném čtyřúhelníku, jsou speciálním případem dvou hyperboloidů s dvojnásobně involutorními řadami. Vzhledem ku danému hyperboloidu tvoří takové hyperboloidy systém ∞^5 hyperboloidů, polárně to invariantních hyperboloidů vzhledem ku danému hyperboloidu. Systém ten jest obsažen v našem 7mocném právě uvedeném systému, ku kterému se ještě vrátíme, a o kterém seznáme, že jest lineárný, a který budeme označovati Σ_7.

---

[1]) A. Voss: Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades (Mathematische Annalen sv. 10 p. 143).

V pojednání tomto věta o naší konfiguraci jest na str. 174. A. Voss uvažuje v tomto pojednání plochy 2. stupně jakožto souhrn všech jejich tečen (speciální komplex), a konfiguraci naši nazývá simultanním systémem dvou speciálních komplexů 2. stupně (viz str. 167), přišed k tomu pojmu od algebraického, před tím vysvětleného (viz str. 154) pojmu systému dvou simultanních quadratických forem.

3. O sborcené ploše 4. stupně stanovené dvěma hyperboloidy s přímkovými řadami v involuci.

Buďtež A^2 a B^2 danými dvěma sborcenými hyperboloidy s přímkovými řadami v involuci a buďtež α^2, $\alpha_1{}^2$ resp. β^2, $\beta_1{}^2$ těmito řadami. Na těchto čtyřech přímkových řadách máme čtyři obyčejné involuce, které jsme si byli označili:

$$J_\alpha,\ J_{\alpha'},\ J_\beta,\ J_{\beta'}.$$

Přímky a_1, a_2 libovolné dvojiny involuce J_α protínají vždy přímky b_1, b_2 určité dvojiny involuce J_β. Podobně libovolné přímky a_1', a_2' tvořící dvojinu involuce $J_{\alpha'}$ protínají vždy určité dvě přímky b_1', b_2' tvořící dvojinu involuce $J_{\beta'}$. Dospíváme tak ku dvěma množstvím ∞^1 sborcených čtyřúhelníků:

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \quad \text{a} \quad a_1',\ a_2',\ b_1',\ b_2'.$$

Bude pak naší úlohou stanoviti geometrické místo dvojin diagonálných stran d_1, d_2 resp. d_1', d_2' těchto sborcených čtyřúhelníků. Studujme třeba geometrické místo diagonál d_1, d_2.

Budiž k^4 proniková křivka hyperboloidů A^2 a B^2. Na této prostorové křivce čtvrtého stupně prvního druhu vytínají dvojiny přímek involuce J_α nebo involuce J_β určitou involutorní korrespondenci [2, 2] a geometrické místo spojnic odpovídajících si bodů v této involutorní korrespondenci jest naší hledanou plochou sborcenou. Libovolnou přímkou p v prostoru proložme si libovolnou rovinu π. Tato rovina protíná k^4 ve čtyřech bodech a jelikož v naší korrespondenci každému bodu odpovídají dva body, odpovídá rovině π osm rovin. A podobně naopak kterékoli rovině z těchto osmi rovin odpovídá týmže způsobem osm rovin. Máme tedy ve svazku rovin o ose p korrespondenci [8, 8], která má 16 rovin samodružných, od kterých však nutno odečísti čtyři roviny procházející čtyřmi samodružnými body svrchu uvedené involutorní korrespondence [2, 2]. Dospěli bychom tudíž k sborcené ploše 12. stupně. Tento stupeň však se redukuje na polovinu, to jest na 6. stupeň, když uvážíme involutornost naší korrespondence [2, 2], a že tudíž každou přímku této plochy bychom mohli považovati za dvojnásobnou. K této ploše náležejí však též přímky hyperboloidové řady β^2 nebo řady α^2, dle toho, jestli naší korrespondenci [2, 2] na k^4 vyťaly dvojiny involuce J_α nebo involuce J_β. Sníží se tudíž stupeň naší plochy sborcené ještě o dvě a dospíváme tudíž ku sborcené ploše stupně čtvrtého.

Speciálním případem této plochy jest patrně též t. ř. „zobecněný cylindroid“, který lze považovati za souhrn diagonál sborcených čtyřúhelníků, jejichž dvě a dvě protější strany přísluší si jakožto dvojiny

přímek ve dvou projektivních involucích v různých přímkových systémech téhož hyperboloidu.[1])

Naši sborcenou plochu označme si P^4, a jako tato jest geometrickým místem dvojin diagonál d_1, d_2 budiž P_1^4 geometrickým místem diagonál d_1', d_2'. Samozřejmo jest, že tato plocha jest též 4. stupně.

Buďtež:

$$u_\alpha,\ v_\alpha;\ u_\alpha',\ v_\alpha';\ u_\beta,\ v_\beta;\ u_\beta',\ v_\beta'$$

postupně samodružnými přímkovými dvojinami našich 4 involucí:

$$J_\alpha,\ J_\alpha',\ J_\beta,\ J_\beta'.$$

Leží pak dvě přímkové dvojiny: u_α, v_α, u_β, v_β na sborcené ploše P^4. Protínají totiž přímku u_α dvě přímky m_1' a m_2' z přímkové řady β^2 a máme pak sborcený čtyřúhelník, jehož dvě protější strany jsou nekonečně blízkými splývajíce v u_α, a druhými dvěma stranami jsou přímky m_1' a m_2'. Diagonálami pak tohoto čtyřúhelníka jsou patrně dvě přímky v u_α splývající. Možno tudíž přímku u_α jakožto diagonálu považovati za přímku plochy P^4. Zcela analogicky platí to o přímkách u_β, v_α, v_β. Ploše P_1^4 náležejí pak zase z týchže důvodů přímky u_α', u_β', v_α', v_β'.

Naše dva hyperboloidy A^2 a B^2 stanoví nám, jak jsme dříve ukázali, dva lineární komplexy, které jsme vzhledem ku hyperboloidovým řadám v nich obsaženým označili: $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$. Lineární komplex $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ možno si mysliti vytvořen ∞^1 lineárními kongruencemi, jejichž dvojiny přímek řídicích jsou dvojinami přímek involuce J_α' v řadě α_1^2 nebo involuce J_β v řadě β^2. Podobně involuce J_α nebo involuce J_β' v řadách α^2 resp. β_1^2 vedou ku lineárnímu komplexu $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$. Z toho vytvoření našich lineárních komplexů vyplývá, že přímky sborcených ploch P^4 a P_1^4 jsou obsaženy v lineární kongruenci oběma těmto lineárním komplexům společné. Neboť na př. dvojina přímek d_1, d_2 plochy P^4, dvojice to diagonál libovolného čtyřúhelníka z ∞^1 sborcených čtyřúhelníků a_1, a_2, b_1, b_2, protíná i přímky a_1, a_2, dvojinu to involuce J_α v řadě α^2, i dvojinu b_1, b_2, dvojinu to involuce J_β v řadě β^2, a náleží tudíž oběma lineárním komplexům $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ a tudíž i jejich lineární kongruenci. Podobně přímky plochy P_1^4 náležejí téže lineární kongruenci.

Z toho nutně vyplývá, že řídicí přímky lineární kongruence lin. komplexů $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ jsou též řídicími přímkami ploch P^4 a P_1^4 a sice dvojnásobnými řídicími přímkami, ježto tyto sborcené plochy jsou stupně čtvrtého. Jsou tedy naše sborcené plochy stupně čtvrtého rodu 1.

Ježto jsme ukázali, že samodružné přímky našich uvažovaných involucí, totiž přímky u_α, v_α; u_β, v_β, náležejí ploše P^4 a přímky u_α', v_α'; u_β', v_β'

---

[1]) O zobecněném cylindroidu. Rozpravy České Akademie 1914. Č. 12. Poznamenati dlužno, že uvedený zde důkaz biquadratičnosti plochy P^4 jest podobný druhému důkazu biquadratičnosti zobecnělého cylindroidu v citovaném zde pojednání (viz pag. 8 a 9).

náležejí ploše P_1^4, tu musí těchto 8 přímek býti obsaženo v téže lineární kongruenci, a tudíž míti tytéž dvě společné transversály, které si označíme t_1, t_2. Nebo-li přímky t_1, t_2 jsou společnými diagonálami sborcených čtyřúhelníků:

$$u_\alpha,\ v_\alpha,\ u_\alpha',\ v_\alpha' \text{ a } u_\beta,\ v_\beta,\ u_\beta'\ v_\beta'.$$

Částí proniku ploch P^4 a P_1^4 jest patrně prostorová křivka k^4, pronik to obou našich hyperboloidů A^2 a B^2, nebo-li tato křivka jest geometrickým místem vrcholů sborcených čtyřúhelníků, jejichž diagonály naše sborcené plochy čtvrtého stupně vyplňují. Plochy tyto P^4 a P_1^4 nalézajíce se v téže lineární kongruenci $[t_1, t_2]$ mohou míti křivku k^4 jen tehdy společnou, když se stotožňují.

Stotožňuje se tudíž plocha P^4 *s plochou* P_1^4.

Náleží tudíž ploše P^4 osm přímek:

$$u_\alpha,\ v_\alpha,\ u_\beta,\ v_\beta,\ u_\alpha',\ v_\alpha',\ u_\beta',\ v_\beta',$$

a rozpadá se tudíž proniková křivka stupně osmého s hyperboloidy A^2 a B^2 vždy v prostorovou křivku 4. stupně prvního druhu, pronikovou to křivku těchto hyperboloidů a vždy čtyři bisekanty této křivky, jež tvoří sborcený čtyřúhelník. Dvojné řídicí přímky t_1, t_2 naší sborcené plochy P_1^4 jsouce diagonálami dvou sborcených čtyřúhelníků ležících na hyperboloidech A^2 a B^2 jsou společnými konjugovanými polárami obou těchto hyperboloidů. Jsou tedy jednou dvojinou protějších hran společného polárného tetraedru obou hyperboloidů A^2 a B^2.

Plocha naše P^4 není zcela obecnou sborcenou plochou stupně čtvrtého se dvěma dvojnými řídicími přímkami, to jest plochou vytvořenou spojnicemi bodů na dvou mimoběžných bodových řadách vztažených k sobě libovolnou zcela obecnou korrespondencí [2, 2]. V našem případě, abychom obdrželi totiž plochu P^4 musí býti tato korrespondence projektivností dvou obyčejných involucí. To vyplývá z existence ∞^1 sborcených čtyřúhelníků na P^4, a toto množství ∞^1, jak známo, existuje, existuje-li jeden takový čtyřúhelník.[1]) A v našem případě jedním takovým čtyřúhelníkem jest čtyřúhelník $u_\alpha, v_\alpha, u_\alpha', v_\alpha'$ nebo čtyřúhelník $u_\beta, v_\beta, u_\beta', v_\beta'$.

Shrneme-li hlavní výsledky našich úvah o sborcené ploše diagonál sborcených čtyřúhelníků, tu dostáváme věty:

Dva hyperboloidy A^2 *a* B^2 *obsahující přímkové řady v involuci vedou ku dvěma skupinám* ∞^1 *sborcených čtyřúhelníků. Dvojiny protějších stran čtyřúhelníků těchto tvoří přímkové dvojiny obyčejných involucí v dvojinách přímkových řad* α^2, β^2 *a* α_1^2, β_1^2, *které jsou v involuci.*

Diagonály obou těchto skupin ∞^1 *sborcených čtyřúhelníků vyplňují tutéž sborcenou plochu* P^4 *stupně čtvrtého se dvěma řídicími dvojnými přímkami, které jsou současně řídicími přímkami lineární kongruence lineárních*

[1]) R. Sturm: Liniengeometrie III., § 591, pag. 108.

komplexů $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ *a* $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ *a jednou dvojinou protějších hran společného polárného tetraedru obou uvažovaných hyperboloidů.*

Plocha P^4 *obsahuje dále* ∞^1 *sborcených čtyřúhelníků.*

Plochu P^4 *budeme nazývati sborcenou plochou diagonál příslušnou dvěma hyperboloidům s přímkovými řadami v involuci.*

Na pronikové křivce k^4 našich hyperboloidů A^2, B^2 vidíme, že vytínají odpovídající si přímkové dvojiny involucí J_α a J_β nebo involucí J_α' a J_β' vrcholy sborcených čtyřúhelníků, jejichž protější strany leží právě na hyperboloidech A^2 a B^2 a diagonály na P^4. Ve svazku ploch 2. stupně o základní křivce k^4 existuje ∞^2 dvojin hyperboloidů. Vzhledem pak ku existenci ∞^8 hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, které jsou v involuci ku řadám daného hyperboloidu, existuje patrně v každém svazku ploch 2. stupně o libovolné základní křivce k^4 ∞^1 dvojin hyperboloidových s řadami, které jsou v involuci.

Můžeme tedy vysloviti větu:

Dána-li libovolná prostorová křivka čtvrtého stupně prvního druhu, tu existuje na ∞^1 *způsobů množství* ∞^1 *sborcených čtyřúhelníků, jejichž vrcholy leží na této prostorové křivce a jejichž dvě a dvě protější strany vyplňují dva sborcené hyperboloidy. Diagonály těchto čtyřúhelníků leží na sborcené ploše 4. stupně rodu 1.*

4. Dva speciální případy sborcené plochy P^4.

Uvažujme dva speciální případy naší sborcené plochy diagonál P^4. Případy ty jsou dány dvěma speciálními polohami našich hyperboloidů A^2 a B^2 a to, když proniková křivka k^4 těchto dvou hyperboloidů se rozpadá:

1. v kubickou křivku prostorovou a jednu její bisekantu;
2. v kuželosečku a dvě různoběžné její unisekanty.

Případ první.

Budiž p přímka společná našim hyperboloidům A^2 a B^2 a to jejich přímkovým řadám α^2 a β_1^2. Jsou pak dvojiny řad: α^2, β^2 a α_1^2, β_1^2 involutorními dvojinami přímkových řad, neboť patrně lze proložiti řadami α^2, β_1^2 lineární komplex. Hledejme nyní dvojiny samodružných přímek čtyřech involucí J_α, J_β, J_α', J_β' na našich čtyřech přímkových řadách α^2, β^2, α_1^2, β_1^2. Vytkněme si libovolnou přímku a řady α^2 a ta protínejž dvě přímky b_1, b_2 řady β^2. Tyto přímky b_1, b_2 vytínají z řady α^2 kromě přímky a ještě vždycky naši význačnou společnou přímku p. Odpovídá tudíž v involuci J_α v řadě α^2 libovolné přímce a této řady vždycky přímka p. Jest tedy involuce J_α involucí parabolickou a v přímce p splývají oba dvojné paprsky této involuce. Zcela analogicky lze ukázati, že též involuce J_β' jest involucí parabolickou o v přímce p splývajících dvojných přímkách

této involuce. Involuce J_α' není parabolickou, neboť libovolná přímka a_1' řady α_1^2 protíná v řadě β_1^2 přímku p a určitou přímku b', kteréžto dvě přímky řady β_1^2 kromě přímky a_1' protínají ještě určitou přímku a_2' řady $\alpha^2{}_1$, a přísluší tedy v involuci J_α' každé jiné přímce a_1' jiná přímka a_2'. Buďtež u_α', v_α' samodružnými přímkami této involuce. Rovněž tak involuce J_β nemůže býti parabolickou. Buďtež pak u_β, v_β, jejími samodružnými paprsky.

O dvojných přímkách sborcené plochy diagonál P^4 jsme v předešlém odstavci ukázali, že jsou společnými transversálami dvojin samodružných přímek všech čtyř involucí J_α, J_α', J_β, J_β'. V našem případě pak speciálním, jak z předešlých úvah jest patrno, splývají obě tyto společné transversály v jedinou přímku p hyperboloidům A^2 a B^2 společnou. Přechází tedy sborcená plocha P^4 v plochu o dvou řídicích přímkách splývajících.

Rovněž jest patrno, že lineární kongruence lineárních komplexů $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ v tomto speciálním případě jest parabolickou o splývajících řídicích přímkách v přímce p, sestávajíc se ze všech tečen k hyperboloidu A^2 nebo B^2 v bodech přímky p. Lineární komplex $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ jest v tomto případě speciálním komplexem o přímce p jakožto přímce řídicí. Máme tudíž větu:

Mají-li dva hyperboloidy jednu přímku společnou, tu jest sborcená plocha diagonál, příslušná těmto dvěma hyperboloidům obsahujícím involutorní řady přímkové, sborcenou plochou stupně čtvrtého se dvěma splývajícími dvojnými přímkami. Touto jedinou splývající řídicí přímkou jest pak přímka oběma hyperboloidům společná.

Případ druhý.

Buďtež m, n dvěma různoběžnými přímkami společnými dvěma hyperboloidům A^2, B^2, kteréžto hyperboloidy obsahují následkem toho řady, které jsou v involuci. Budiž přímka m společnou přímkou řad α^2, β_1^2 a přímka n přímkou řad α_1^2, β^2. Jak z úvah při předešlém speciálním případu provedených jest patrno, jsou v tomto druhém případě všecky 4 involuce, vyskytující se na našich řadách, parabolickými. A to u involucí J_α, J_β' splývají obě dvojné přímky vždy v přímce m a u involucí J_α', J_β v přímce n.

Všimněme si nyní dvou skupin našich ∞^1 sborcených čtyřúhelníků, jejichž geometrické místo diagonál hledáme. Budiž a libovolná přímka v řadě α^2. Ta protíná řadu β^2 vždycky v přímce n a určité přímce b, kterážto přímka s přímkou n protíná zase přímky a, m řady α^2 tak, že máme sborcený čtyřúhelník m, n, a, b. Přímky m, n se nemění, každé přímce a přísluší pak určitá přímka b a naopak.

Přímky m, n protínejtež se v bodě P, přímky a, b v bodě Q. Bod P jest pevný, bod Q se patrně pohybuje po kuželosečce k^2, která s přímkami m, n náleží proniku našich hyperboloidů A^2 a B^2. Spojnice $\overline{PQ}$

tvoří vždy jednu diagonálu našich sborcených čtyřúhelníků, a jejich souhrn vyplňuje kužel 2. řádu K^2 o vrcholu P, jehož přímky procházejí kuželosečkou k^2. Kužel ten náleží tedy patrně k našemu geometrickému místu diagonál P^1.

Zbývající diagonály našich sborcených čtyřúhelníků jsou spojnicemi bodů M, N, kde tyto body znamenají průsečíky přímek b, m a a, n. Řady bodů M, N leží na různoběžných přímkách m, n a jsou projektivnými, a tudíž spojnice jejich $\overline{MN}$ obalují kuželosečku $\varkappa^2$ ležící v rovině π různoběžek m, n.

Jest patrno, že kdybychom byli studovali druhou skupinu sborcených čtyřúhelníků m, n, a', b' vytvořených involutorními řadami α_1^2, β_1^2, že bychom byli dospěli ku těmže útvarům K^2 a $\varkappa^2$. Dále vidíme, že v tomto druhém speciálním případě jsou oba lineární komplexy: $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$, $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ speciálními, majíce za řídicí přímky, přímky n resp. m, a že jejich kongruence lineární se rozpadá v prostorový svazek přímkový o vrcholu P a v rovinné přímkové pole π.

Ukázali jsme tedy:

Mají-li dva hyperboloidy A^2, B^2 *dvě různoběžné přímky společné, tu sborcená plocha diagonál* P^1, *příslušná těmto dvěma hyperboloidům, rozpadá se v kužel 2. řádu* K^2, *jehož vrcholem jest průsečík společných přímek, a v křivku 2. třídy* $\varkappa^2$, *jež jest obsažena v rovině těchto přímek.*

Jako jsme přímky kužele K^2 dostali spojením jednotlivých bodů pronikové kuželosečky k^2 s bodem P, tak jednotlivé tečny kuželosečky $\varkappa^2$ dostáváme v průsečnicích roviny π s rovinami, které obalují dotyčný kužel dle k^2 oběma hyperboloidům společný. To jest patrno z toho, že spojnice bodů M, N lze pokládati za průsečnice roviny π a vždy roviny proložené přímkami a, b, kterážto poslednější jest patrně tečnou rovinou oběma hyperboloidům společnou. Z toho jest patrn úplně duální charakter konfigurace této.

5. O konfiguraci dvou sborcených ploch diagonál a čtyř lineárních komplexů vyskytujících se při dvou hyperboloidech obsahujících přímkové řady v dvojnásobné involuci.

Buďtež zase A^2 a B^2 dva sborcené hyperboloidy s přímkovými řadami v dvojnásobné involuci. Jsou-li α^2, α_1^2 resp. β^2, β_1^2 jejich přímkovými řadami, pak, jak jsme v odst. 2. byli ukázali, jest každá z těchto řad v involuci ku všem ostatním řadám, a existují pak čtyři lineární komplexy:

$$\{\alpha^2, \beta^2\}, \{\alpha^2, \beta_1^2\}, \{\alpha_1^2, \beta^2\}, \{\alpha_1^2, \beta_1^2\},$$

z nichž rovněž, jak jsme byli ukázali, každý jest ku všem ostatním v involuci.

V případě dvojnásobné involuce existují na každé z našich čtyř hyperboloidových přímkových řad dvě involuce v přímkách těchto řad, kteréžto involuce tam indukují vždy dvě řady přímkové, které náležejí jinému hyperboloidu než řada původní.

Buďtež samodružné dvojiny přímkové involucí v řadě α^2 indukovaných řadami β^2, β_1^2:

$$u_{\alpha\beta},\ v_{\alpha\beta};\ u_{\alpha\beta_1},\ v_{\alpha\beta_1},$$

v řadě α_1^2 indukovaných týmiž řadami:

$$u_{\alpha_1\beta},\ v_{\alpha_1\beta};\ u_{\alpha_1\beta_1},\ v_{\alpha_1\beta_1},$$

v řadě β^2 indukovaných řadami α^2, α_1^2:

$$u_{\beta\alpha},\ v_{\beta\alpha};\ u_{\beta\alpha_1},\ v_{\beta\alpha_1},$$

v řadě β_1^2 indukovaných týmiž řadami:

$$u_{\beta_1\alpha},\ v_{\beta_1\alpha};\ u_{\beta_1\alpha_1},\ v_{\beta_1\alpha_1}.$$

Společné dvojiny vždy dvou soumístných těchto involucí označme si postupně:

$$r_{\alpha\beta},\ s_{\alpha\beta};$$
$$r'_{\alpha\beta},\ s'_{\alpha\beta};$$
$$r_{\beta\alpha},\ s_{\beta\alpha};$$
$$r'_{\beta\alpha},\ s'_{\beta\alpha}.$$

První napsané dvě dvojiny přímkové jsou pak patrně dvěma dvojinami konjugovaných polár hyperboloidu B^2, druhé dvě dvojiny pak dvojinami konjugovaných polár hyperboloidu A^2.

V tomto případě dvou sborcených hyperboloidů A^2, B^2 s dvojnásobně involutorními řadami máme 4 skupiny ∞^1 sborcených čtyřúhelníků, což vyplývá ze čtyř různých kombinací dvou hyperboloidových řad. Dospíváme pak ku dvěma sborceným plochám diagonál prostorových čtyřúhelníků, a sice ku ploše P_1^4 od přímkových dvojin přímkových řad:

$$\alpha^2,\ \beta^2;\ \alpha_1^2,\ \beta_1^2;$$

a k ploše P_2^4 od dvojin přímkových řad:

$$\alpha^2,\ \beta_1^2;\ \alpha_1^2,\ \beta^2.$$

Dvojné řídicí přímky t_1, t_1' plochy P_1^4 jsou společnými diagonálami dvou sborcených čtyřúhelníků:

$$u_{\alpha\beta},\ v_{\alpha\beta},\ u_{\alpha_1\beta_1},\ v_{\alpha_1\beta_1};\ u_{\beta\alpha},\ v_{\beta\alpha},\ u_{\beta_1\alpha_1},\ v_{\beta_1\alpha_1};$$

dvojné pak řídicí přímky t_2, t_2' plochy P_2^4 jsou společnými diagonálami sborcených čtyřúhelníků:

$$u_{\alpha\beta_1},\ v_{\alpha\beta_1},\ u_{\alpha_1\beta},\ v_{\alpha_1\beta};\ u_{\beta\alpha_1},\ v_{\beta\alpha_1},\ u_{\beta_1\alpha},\ v_{\beta_1\alpha};$$

Přímky t_1, t_1' jsou však též řídicími přímkami lineární kongruence lineárních komplexů $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$, rovněž tak jako přímky t_2, t_2' jsou řídicími přímkami kongruence komplexů $\{\alpha^2, \beta^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta_1^2\}$. Zároveň, jak jsme dříve v odstavci 3. ukázali, jsou dvojiny přímek t_1, t_1' a t_2, t_2' dvěma dvojinami protějších stran společného polárného tetraedru plochám A^2 a B^2. Tvoří tedy přímky t_1, t_1', t_2, t_2' prostorový čtyřúhelník. Jsou-li jeho diagonálami přímky t_3, t_3', máme společný polárný tetraedr hyperboloidů A^2 a B^2 o třech dvojinách protějších hran:

$$t_1,\ t_1';\ t_2,\ t_2';\ t_3,\ t_3'.$$

Přímky dvojiny t_3, t_3' jsouce oběma transversálami dvou dvojin řídicích přímek dvou lineárních kongruencí $[t_1, t_1']$ a $[t_2, t_2']$, které jsou kongruencemi dvojin lineárních komplexů $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$, $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ a $\{\alpha^2, \beta^2\}$, $\{\alpha_1^2, \beta_1^2\}$, jsou zároveň oběma společnými přímkami všech těchto čtyř lineárních komplexů.

Máme tedy souvislost následující:

Dva hyperboloidy s dvojnásobně involutorními přímkovými řadami stanoví způsobem zde uvedeným čtyři lineární komplexy a dvě plochy diagonál sborcených čtyřúhelníků. Dvě dvojiny řídicích dvojných přímek těchto ploch a dvojina přímek všem čtyřem našim lineárním komplexům společných tvoří tři dvojiny protějších hran polárného tetraedru oběma našim hyperboloidům společného.

Analogicky jako dvojiny přímek t_1, t_1' a t_2, t_2' byly společnými diagonálami vždy dvou sborcených čtyřúhelníků na našich hyperboloidech A^2 a B^2 totiž těch čtyřúhelníků, jejichž protější strany byly vždycky samodružnými přímkami některé z osmi obyčejných involucí na řadách těchto hyperboloidů se vyskytujících, jsou i přímky t_3, t_3' společnými diagonálami dvou sborcených čtyřúhelníků, totiž čtyřúhelníků

$$r_{\alpha\beta},\ s_{\alpha\beta},\ r'_{\alpha\beta},\ s'_{\alpha\beta};\quad r_{\beta\alpha},\ s_{\beta\alpha},\ r'_{\beta\alpha},\ s'_{\beta\alpha},$$

jejichž protější strany jsou, jak jsme byli ukázali, společnými přímkovými dvojinami vždy dvou našich, na každé z našich 4 přímkových řad se vyskytujících, involucí. Diagonály každého z těchto čtyřúhelníků prostorových, že jsou dvojinami konjugovaných polár hyperboloidu, na kterém čtyřúhelník leží, jest samozřejmo, že pak jsou dvojinami konjugovaných polár hyperboloidu druhého, plyne z toho, že jsou společnými dvojinami dvou soumístných involucí. A že tyto diagonály obou posledních našich sborcených čtyřúhelníků musí splývat, jest vidno zase z toho, že pro ně právě jen třetí dvojina t_3, t_3' protějších hran společného polárného tetraedru zbývá.

Ku větě vyslovené v odst. 2., že totiž při dvou hyperboloidech s přímkovými řadami v dvojnásobné involuci leží na každém hyperboloidu sborcený čtyřúhelník, jenž s diagonálami svými tvoří polárný tetraedr hyperboloidu druhého, můžeme zde nyní dodati, že tyto diagonály jsou společny oběma sborceným čtyřúhelníkům, a že tvoří jednu dvojinu

konjugovaných polár vzhledem k oběma hyperboloidům. Jsou totiž těmito diagonálami přímky t_3, t_3', oněmi pak sborcenými čtyřúhelníky dva čtyřúhelníky $r_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$, $r'_{\alpha\beta}$, $s'_{\alpha\beta}$ a $r_{\beta\alpha}$, $s_{\beta\alpha}$, $r'_{\beta\alpha}$, $s'_{\beta\alpha}$.

Vyhledejme nyní 6 dvojin řídicích přímek šesti lineárních kongruencí, ve kterých se pronikají podvojně naše 4 lineární komplexy jsoucí ve vzájemné involuci.

Především jest z předchozích úvah patrno, že první dvě dvojiny z našich 4 lineárních komplexů, totiž komplexové dvojiny:

$$\{\alpha^2, \beta^2\}\ \{\alpha_1^2, \beta_1^2\};\ \{\alpha^2, \beta_1^2\},\ \{\alpha_1^2, \beta^2\}$$

pronikají se ve dvou lineárních kongruencích, jejichž řídicími přímkami jsou dvojiny přímkové:

$$t_1, t_1';\ t_2, t_2'$$

dvojné to řídicí přímky ploch P_1^4 a P_2^4.

Uvažujme další čtyři dvojiny lineárních komplexů:

$$\{\alpha_1^2, \beta^2\},\ \{\alpha_1^2, \beta_1^2\};\ \{\alpha^2, \beta_1^2\}\ \{\alpha_1^2, \beta_1^2\};$$
$$\{\alpha^2, \beta^2\},\ \{\alpha^2, \beta_1^2\};\ \{\alpha^2, \beta^2\},\ \{\alpha_1^2, \beta^2\}.$$

Dvojiny řídicích přímek lineárních kongruencí těmito dvojinami komplexovými stanovených nalézají se, jak snadno lze nahlédnouti, postupně na přímkových řadách:

$$\alpha^2;\ \beta^2$$
$$\alpha_1^2;\ \beta_1^2$$

a jsou patrně společnými dvojinami vždy dvou soumístných involucí na těchto řadách indukovaných postupně vždy dvěma řadami:

$$\beta^2,\ \beta_1^2;\ \alpha^2,\ \alpha_1^2$$
$$\beta^2,\ \beta_1^2;\ \alpha^2,\ \alpha_1^2,$$

to jest jsou to již dříve uvažované přímkové dvojiny:

$$r_{\alpha\beta},\ s_{\alpha\beta};\ r_{\beta\alpha},\ s_{\beta\alpha}$$
$$r'_{\alpha\beta},\ s'_{\alpha\beta};\ r'_{\beta\alpha},\ s'_{\beta\alpha}.$$

Jest známo,[1]) že 6 dvojin řídicích přímek šesti lineárních kongruencí obsažených vždy ve dvou lineárních komplexech ze čtyř navzájem involutorních komplexů, jest dvojinami protějších stran 3 tetraedrů, a že všecky tyto tetraedry mají společnou jednu dvojinu protějších přímek, která jest zároveň dvojinou přímek všem 4 lineárním komplexům společnou, a která jediná není dvojinou řídicích přímek jedné ze 6 lineárních kongruencí. V naší konfiguraci 4 lineárních komplexů, která jest jen speciálním případem oné obecné 4 lineárních komplexů v involuci, jest, jak

[1]) Viz na př. R. Sturm: Liniengeometrie I. § 183, pag. 240.

z úvah předešlých patrno, umístění 6 dvojin řídicích přímek následující:

Čtyři lineární komplexy ve vzájemné involuci dané dvěma hyperboloidy s přímkovými řadami v dvojnásobné involuci pronikají se podvojně v 6 lineárních kongruencích. Řídicí přímky těchto 6 kongruencí tvoří vždy dvě dvojiny protějších hran tří tetraedrů, z nichž prvý jest polárný k oběma hyperboloidům, z druhých dvou pak každý jest polárný k jednomu hyperboloidu a dvě dvojiny jeho protějších hran se nacházejí na druhém hyperboloidu. Tyto tři tetraedry mají jednu dvojinu přímek společnou, tu dvojinu, která jest obsažena ve všech 4 našich lineárních komplexech a to jest jediná dvojina, která není dvojinou řídicích přímek žádné z našich 6 lineárních kongruencí.

Uvažujme nyní postupně všecky 4 trojiny z našich 4 lineárních komplexů, a vyhledejme vždy společnou hyperboloidovou přímkovou řadu, ve které se pronikají lineární komplexy každé této trojiny. Tyto tři trojiny seřaďme si následovně:

$$\{\alpha^2,\ \beta_1^2\},\ \{\alpha_1^2,\ \beta^2\},\ \{\alpha_1^2,\ \beta_1^2\};$$
$$\{\alpha^2,\ \beta^2\},\ \{\alpha_1^2,\ \beta^2\},\ \{\alpha_1^2,\ \beta_1^2\};$$
$$\{\alpha^2,\ \beta^2\},\ \{\alpha^2,\ \beta_1^2\},\ \{\alpha_1^2,\ \beta_1^2\};$$
$$\{\alpha^2,\ \beta^2\},\ \{\alpha^2,\ \beta_1^2\},\ \{\alpha_1^2,\ \beta^2\}.$$

Tři lineární komplexy každé této trojiny vytínají pak vždy společně dvojinu přímek na dvojinách přímkových řad:

$$\alpha^2,\ \beta^2;\ \alpha^2,\ \beta_1^2;\ \alpha_1^2,\ \beta^2;\ \alpha_1^2,\ \beta_1^2;$$

kteroužto dvojinu na těchto dvojinách přímkových řad můžeme si mysliti vyňatu postupně vždy lineárním komplexem:

$$\{\alpha_1^2,\ \beta_1^2\};\ \{\alpha_1^2,\ \beta^2\};\ \{\alpha^2,\ \beta_1^2\};\ \{\alpha^2,\ \beta^2\},$$

tu však vidíme, že těmito dvojinami jsou samodružné dvojiny na našich 4 přímkových řadách vyskytujících se 8 obyčejných involucí na počátku tohoto odstavce uvedených, a sice postupně vždy na dvou řadách přímkových, v hořením pořádku uvažovaných, jsou to vždy dvě dvojiny přímek:

$$u_{\alpha\beta_1},\ v_{\alpha\beta_1};\quad u_{\beta\alpha_1},\ v_{\beta\alpha_1};$$
$$u_{\alpha\beta},\ v_{\alpha\beta};\quad u_{\beta_1\alpha_1},\ v_{\beta_1\alpha_1};$$
$$u_{\alpha_1\beta_1},\ v_{\alpha_1\beta_1};\quad u_{\beta\alpha},\ v_{\beta\alpha};$$
$$u_{\alpha_1\beta},\ v_{\alpha_1\beta};\quad u_{\beta_1\alpha},\ v_{\beta_1\alpha}.$$

Tím jsme nalezli 4 hledané přímkové řady, jež jsou dány postupně těmito hyperboloidickými přímkovými čtveřinami.

Všimneme-li si blíže jednotlivých hyperboloidických čtveřin přímkových zde uvedených, tu vidíme, že každou tuto čtveřinu tvoří vždy dvě dvojiny samodružných přímek těch involucí na dvou přímkových řadách v dvojnásobné involuci, které na každé z těchto přímkových řad

vytíná vždy řídicí řada řady druhé. Tak jsou přímky $u_{\alpha\beta_1}$, $v_{\alpha\beta_1}$ samodružnými přímkami involuce, kterou vytínají v přímkách řady α^2 přímky řady β_1^2, řídicí to řady řady β^2, a přímky $u_{\beta\alpha_1}$, $v_{\beta\alpha_1}$ jsou samodružnými přímkami involuce, kterou vytínají v přímkách řady β^2 přímky řady α_1^2, řídicí to řady řady α^2. Podobně to platí o přímkách v dalších třech skupinách.

Máme tedy následující souvislost:

Dvě dvojiny samodružných přímek involucí indukovaných dvěma přímkovými řadami v dvojnásobné involuci vždy na řídicí řadě druhé řady tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek. Při dvou hyperboloidech s řadami v dvojnásobné involuci dospíváme tímto způsobem ku 4 hyperboloidichým čtveřinám přímek. Tyto 4 hyperboloidické čtveřiny přímek stanoví 4 přímkové řady a tyto jsou společným pronikem vždy tří ze čtyř lineárních komplexů stanovených našemi dvěma hyperboloidy v této zvláštní poloze.

6. Speciální případ předešlého.

Všimněme si jednoho speciálního případu dvou hyperboloidů A^2 a B^2 s dvojnásobně involutorními přímkovými řadami, to jest případu, kdy oba hyperboloidy mají čtyři přímky společné. Buďtež t_a, t_b přímky společné řadám α^2, β^2 a t_a', t_b' přímky společné řadám α_1^2, β_1^2 našich dvou uvažovaných hyperboloidů. Pak z našich čtyř lineárních komplexů, při této konfiguraci dvou hyperboloidů se vyskytujících, existují především dva, totiž lineární komplex $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$, který jest dán přímkami řady α^2 a přímkami t_a', t_b' nebo přímkami řady β_1^2 a přímkami t_a, t_b, a lineární komplex $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$ daný přímkami řady α_1^2 a přímkami t_a, t_b, nebo přímkami řady β^2 a přímkami t_a', t_b'. Jsou tedy přímky prostorového čtyřúhelníka t_a, t_b, t_a', t_b' oběma uvedeným lineárním komplexům společné, a jsou tudíž diagonály m, n tohoto čtyřúhelníka společnou dvojinou konjugovaných polár obou uvažovaných lineárních komplexů.

Další dva lineární komplexy z našich čtyřech lin. komplexů zastupují v tomto případě dvě lineární kongruence. Totiž dvě lineární kongruence o řídicích přímkách: t_a, t_b a t_a', t_b', neboť řadami α^2, β^2 resp. řadami α_1^2, β_1^2 tyto lineární kongruence procházejí. Ježto řídicí přímky těchto dvou kongruencí tvoří vždy dvě protější strany prostorového čtyřúhelníka, jest kterýkoli lineární komplex lineární kongruence $[t_a, t_b]$ v involuci s kterýmkoliv lineárním komplexem lineární kongruence $[t_a', t_b']$. Avšak též jest každý z lineárních komplexů svazků o základních kongruencích $[t_a, t_b]$ a $[t_a', t_b']$ v involuci ku lineárním komplexům $\{\alpha^2, \beta_1^2\}$ a $\{\alpha_1^2, \beta^2\}$, neboť tyto dva lineární komplexy, jak jsme právě byli ukázali, obsahují čtyři přímky t_a, t_b, t_a', t_b', z nichž první dvě jsou společnou dvojinou konjugovaných polár všech komplexů prvního, druhé dvě druhého svazku našich lineárních komplexů.

Ze dvou sborcených ploch diagonál P_1^4 a P_2^4, vyskytujících se při dvou hyperboloidech s dvojnásobně involutorními řadami, přechází první plocha P_1^4 ve dvě dvojiny přímek t_a, t_b a t_a', t_b'. Jsou totiž t_a, t_b společnými diagonálami všech sborcených čtyřúhelníků, jejichž dvě a dvě protější strany se nacházejí na hyperboloidových řadách α_1^2, β_1^2, což vyplývá z toho, že každá řada tato jest polárně invariantní vzhledem ku hyperboloidu, který jest nositelem řady druhé. A zcela analogicky to platí o přímkách t_a', t_b' vzhledem ku přímkovým řadám α^2, β^2. Plocha P_2^4 pak přechází v tomto speciálním případě ve dvě lineární kongruence $[t_a, t_b]$ a $[t_a', t_b']$, neboť každou přímku l lineární kongruence $[t_a, t_b]$ lze považovati za diagonálu jednoho ze sborcených čtyřúhelníků, jehož dvě a dvě protější strany se vyskytují na dvou přímkových řadách, které jsou v involuci. V našem případě jsou to přímky řady α^2 jdoucí průsečíky přímky l s přímkami t_a, t_b, přímkami jedné dvojiny vyskytující se na α^2, a přímky t_a, t_b přímkami druhé dvojiny vyskytující se na β^2. Podobně zcela lze to dokázati i o přímkách lineární kongruence $[t_a', t_b']$.

7. O quadratickém hyperboloidovém systému Σ_8^2 a o lineárním hyperboloidovém systému Σ_7.

Ukázali jsme v odstavci 1., že ku každé přímkové řadě hyperboloidové existuje ∞^8 přímkovych řad, které jsou s ní v involuci, a že tedy též ku danému hyperboloidu existuje ∞^8 hyperboloidů s řadami, které jsou ku řadám daného hyperboloidu v involuci. Tento systém budeme označovati Σ_8^2 a jeho kvadratičnost dokážeme tím, že v každém svazku hyperboloidů existují dva hyperboloidy této vlastnosti. V úvahu vezmeme speciální svazek hyperboloidů procházejících čtyřmi přímkami, které tvoří prostorový čtyřúhelník. Tímto speciálním svazkem lze zcela obecný svazek nahraditi dle známého Schubertova principu o zachování počtu prostorových individuí („Princip von der Erhaltung der Anzahl"), že počet tento zůstává zachován, když obecný útvar, na kterém počet těch individuí závislým jest, nahradíme útvarem speciálnějším.[1])

Obecný svazek ploch stupně druhého nahradíme zde svazkem speciálnějším, při kterém základní křivka čtvrtého stupně 1. druhu nahrazena jest prostorovým čtyřúhelníkem. Buďtež m, n jednou dvojinou a p, q druhou dvojinou protějších stran našeho prostorového čtyřúhelníka, který jest základní křivkou hyperboloidového svazku S_1, a budiž A^2 hyperboloid, k němuž hledáme hyperboloidy s řadami, jež jsou ku jeho řadám v involuci. Buďtež α^2, α_1^2 zase přímkovými řadami tohoto hyperboloidu. Proložme si hyperboloidovou řadou α^2 a přímkami m, n lineární komplex, který si symbolicky označíme:

$$\{m, n; \alpha^2\}.$$

[1]) H. Schubert: Kalkül der abzählenden Geometrie, pag. 12.

Tento lineární komplex má s lineární kongruencí $[p, q]$ společnou určitou přímkovou řadu ξ^2, a hyperboloid X^2, který jest nositelem této řady, jest patrně hyperboloidem systému našeho Σ_8^2, daného hyperboloidem A^2.

Ku témuž hyperboloidu dospěli bychom zcela analogickou cestou, kdybychom uvažovali pronik lineární kongruence $[m, n]$ s lineárním komplexem:

$$\{p, q; \alpha_1^2\},$$

kteryžto pronik není ničím jiným nežli přímkovou řadou ξ_1^2, která jest řídicí řadou řady ξ^2. To vyplývá ze známé věty geometrie útvarů přímkových, kterou jsme zde již jednou uvedli, že prochází-li dvěma přímkovými řadami lineární komplex, že též jejich řídicími řadami lze lineární komplex proložiti.

Stanovíme-li si dále dva lineární komplexy:

$$\{p, q; \alpha^2\} \text{ a } \{m, n; \alpha_1^2\}$$

a hledáme jejich přímkové řady, které leží v lineárních kongruencích:

$$[m, n] \text{ resp. } [p, q],$$

tu tyto řady: η^2 resp. η_1^2 náležejí témuž sborcenému hyperboloidu Y^2 našeho speciálního svazku S_1, obsaženému současně v systému Σ_8^2. Z úvah našich jest zároveň patrno, že kromě hyperboloidů X^2, Y^2 žádné jiné hyperboloidy v systémech S_1 a Σ_8^2 obsaženy nejsou.

Můžeme tedy vysloviti větu:

Systém všech ∞^8 hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, jež jsou k řadám daného hyperboloidu v involuci, jest quadratickým.

Z toho vyplývá dále, že systém všech hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, které jsou ku řadám k ($k \leqq 9$) daných hyperboloidů v involuci, tvoří ∞^{9-k} hyperboloidů, a že stupeň tohoto systému jest 2^k; lze tedy ten systém označiti

$$\sum_{9-k}^{2^k}.$$

Zvláště pak jest vytknouti:

Ku daným 9 hyperboloidům existuje 512 hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, které jsou ku řadám daných 9 hyperboloidů v involuci.

Každou z přímkových řad α_i^2, α_{1i}^2 daných 9 hyperboloidů:

$$A_i^2 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots 9$$

můžeme pak spojiti s řadou β_{1k}^2, β_k^2 oněch 512 hyperboloidů:

$$B_k^2 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots 512$$

tak, že těmito prochází vždy lineární komplex:

$$\{\alpha_i^2, \beta_{1k}^2\} \text{ nebo } \{\alpha_{1i}^2, \beta_k^2\};$$

každých těchto lineárních komplexů existuje patrně $9 \cdot 2^9 = 4608$, a ježto máme takové dvě skupiny, vidíme, že tak dospíváme od 9 libovolných hyperboloidů ku zvláštní konfiguraci 9216 lineárních komplexů. V této konfiguraci 9216 lineárních komplexů jest pak ku každému lineárnímu komplexu 521 komplexů v involuci. Tak ku určitému lineárnímu komplexu této konfigurace, komplexu:

$$\{\alpha_{i_1}^2 \ \beta_{1k_1}^2\},$$

kde i_1, k_1 jsou určitá pevná čísla, jsou v involuci patrně lineární komplexy:

$$\{\alpha_{1i_1}^2 \ \beta_{k}^2\} \text{ a } \{\alpha_{1i}^2 \ \beta_{k_1}^2\}.$$

Těchto lineárních komplexů jest 521, neboť prvých jest 512 a druhých 9, ježto k a i mohou nabýti 512 resp. 9 různých hodnot.

Podobně ku určitému lineárnímu komplexu:

$$\{\alpha_{1i_1}^2, \ \beta_{k_1}^2\}$$

jest v involuci celkem 521 lineárních komplexů:

$$\{\alpha_{i_1}^2, \ \beta_{1k}^2\} \text{ a } \{\alpha_{i}^2, \ \beta_{1k_1}^2\}.$$

Z předešlých úvah vidíme, že systém všech ∞^8 hyperboloidových řad přímkových, které jsou ku dané řadě v involuci, neboli systém všech hyperboloidových řad obsažených ve všech ∞^2 lineárních komplexech danou přímkovou řadou procházejících, jest lineárným. Jest totiž z předešlého důkazu quadratičnosti systému Σ_8^2 patrno, že ve svazku přímkových řad obsažených v dané lineární kongruenci existuje pouze jedna přímková řada, která jest ku dané přímkové řadě v involuci. Tak v našem případě ku přímkovým řadám α^2, α_1^2 existují ve svazku přímkových řad procházejících přímkami p, q a obsažených v lineární kongruenci $[m, n]$ postupně involutorní přímkové řady ξ_1^2 a η^2. Ve svazku pak přímkových řad jdoucích přímkami m, n a obsažených v lineární kongruenci $[p, q]$ jsou ku těmže řadám α^2 a α_1^2 postupně v involuci řady ξ^2 a η_1^2.

Z lineárnosti systému všech ∞^8 přímkových řad, které jsou ku dané přímkové řadě v involuci, vyplývá lineárnost systému všech ∞^7 hyperboloidů, které obsahují řady, jež jsou ku řadám daného hyperboloidu v dvojnásobné involuci. Lze totiž hyperboloidy tohoto systému považovati za nositele přímkových řad lineárního systému ∞^7 přímkových řad, kterýžto systém jest pronikovým systémem dvou lineárních systémů ∞^8 přímkových řad, které jsou v involuci ku oběma přímkovým řadám daného hyperboloidu.

Systém těchto hyperboloidů budeme označovati Σ_7. Jeho lineárnost ještě potvrdíme existencí jediného hyperboloidu tohoto systému Σ_7, který se nachází ve speciálním lineárním systému S_2 všech ∞^2 hyperboloidů procházejících dvěma mimoběžkami m, n a jednou jejich příčkou p. Pro-

ložme si přímkovými řadami α^2, α_1^2 daného hyperboloidu A^2 a přímkami m, n dva lineární komplexy: $\{m, n; \alpha^2\}$ a $\{m, n; \alpha_1^2\}$, tyto dva lineární komplexy pronikají se v určité lineární kongruenci $[u, v]$, jejíž řídicí přímky u, v musí protínati přímky m, n, ježto tyto dvě přímky jsou oběma našim lineárním komplexům společné. Hyperboloid pak přímkami p, u, v stanovený jest jediný hyperboloid v našem speciálním lineárním systému S_2, který obsahuje přímkové řady, které jsou ku řadám daného hyperboloidu v dvojnásobné involuci.

Můžeme tedy vysloviti větu:

Systém všech ∞^7 hyperboloidů, které obsahují řady, jež jsou ku řadám daného hyperboloidu v dvojnásobné involuci, jest lineárný.

Z toho vyplývá též na př., že danou přímkou lze proložiti jeden hyperboloid s přímkovými řadami, které jsou v dvojnásobné involuci vzhledem ku řadám tří libovolných hyperboloidů. Hyperboloid ten jest totiž pronikem lineárního systému všech ∞^6 hyperboloidů, jež danou přímkou procházejí a lineárního systému všech ∞^3 hyperboloidů, jež mají řady vzhledem ku řadám tří libovolných hyperboloidů involutorní.

8. Konstruktivné úlohy ku systémům Σ_8^2, Σ_7^2 a Σ_6^8 se vztahující.

V odstavci tomto provedeme některé úlohy konstruktivné vztahující se ku systémům Σ_8^2, Σ_7^4 a Σ_6^8, kteréžto systémy jsou vyplněny od všech hyperboloidů, které obsahují přímkové řady, jež jsou ku řadám jednoho, dvou a tří daných hyperboloidů v involuci. Budeme totiž konstruktivně hledati:

I. 2 hyperboloidy daného systému Σ_8^2 obsažené ve speciálním svazku všech ∞^1 hyperboloidů jdoucích přímkami daného prostorového čtyřúhelníka.

II. 4 hyperboloidy daného systému Σ_7^4 obsažené v speciálním lineárním systému S_2 všech ∞^2 hyperboloidů jdoucích dvěma mimoběžnými přímkami a jednou jejich příčkou.

III. 8 hyperboloidů daného systému Σ_6^8 obsažených v speciálním lineárním systému S_3 všech ∞^3 hyperboloidů jdoucích dvěma mimoběžnými přímkami.

I.

Budiž m, n jedna a p, q druhá dvojina protějších stran základního prostorového čtyřúhelníka, kterým procházejí hyperboloidy svazku S_1. Budiž pak A^2 sborcený hyperboloid, jemuž přísluší Σ_8^2 známým způsobem zde uvedeným.

Protínejtež přímky m, n v řadě α^2 hyperboloidu A^2 přímky:

$$a_{m_1},\ a_{m_2};\ a_{n_1},\ a_{n_2};$$

v řadě pak α_1^2 téhož hyperboloidu přímky:

$$a_{m_1}', \; a_{m_2}'; \; a_{n_1}', \; a_{n_2}'.$$

Dále protínejtež přímky p, q v těchže přímkových řadách α^2, α_1^2 postupně přímky:

$$a_{p_1}, \; a_{p_2}; \; a_{q_1}, \; a_{q_2};$$
$$a'_{p_1}, \; a'_{p_2}; \; a'_{q_1}, \; a'_{q_2}.$$

Sestrojme pak transversály vždy čtyř přímek:

$$p, \; q, \; a_{m_1}, \; a_{m_2}; \quad p, \; q, \; a'_{m_1}, \; a'_{m_2};$$
$$p, \; q, \; a_{n_1}, \; a_{n_2}; \quad p, \; q, \; a'_{n_1}, \; a'_{n_2};$$
$$m, \; n, \; a_{p_1}, \; a_{p_2}; \quad m, \; n, \; a'_{p_1}, \; a'_{p_2};$$
$$m, \; n, \; a_{q_1}, \; a_{q_2}; \quad m, \; n, \; a'_{q_1}, \; a'_{q_2}.$$

Jest patrno, že jedna ze dvou transversál každé této přímkové čtveřiny jest vždy některou z přímek našeho základního sborceného čtyřúhelníka, druhou pak nutno sestrojiti. Osm dvojin těchto transversál hořením osmi čtveřinám přímkovým příslušných označme si pak postupně:

$$m, \; x_1; \quad m, \; y_1';$$
$$n, \; x_2; \quad n, \; y_2';$$
$$p, \; y_1; \quad p, \; x_1';$$
$$q, \; y_2; \quad q, \; x_2'.$$

Jsou pak přímkové řady:

$$\xi^2, \; \xi_1^2, \; \eta^2, \; \eta_1^2$$

hledaných hyperboloidů:

$$X^2, \; Y^2$$

společných hyperboloidickým systémům S_1 a Σ_8^2 stanoveny vždy následující hyperboloidickou čtveřinou přímek:

$$\xi^2 \equiv (m, \; n, \; x_1, \; x_2),$$
$$\xi_1^2 \equiv (p, \; q, \; x_1', \; x_2'),$$
$$\eta^2 \equiv (p, \; q, \; y_1, \; y_2),$$
$$\eta_1^2 \equiv (m, \; n, \; y_1', \; y_2').$$

Jest ještě správnost uvedené konstrukce dokázati, čili jest dokázati involutornost následujících čtyř dvojin přímkových řad:

$$\alpha^2, \; \xi^2; \; \alpha_1^2, \; \xi_1^2; \; \alpha^2, \; \eta^2; \; \alpha_1^2, \; \eta_1^2.$$

Involutornost ta jest patrna z konstrukce čtyř našich přímkových řad, neboť touto konstrukcí dospěli jsme při těchto řadách postupně vždy ku dvěma sborceným čtyřúhelníkům, z nichž vždy jeden, jak jsme při vysvětlení pojmu involutornosti přímkových řad byli ukázali, stačí aby,

tyto řady byly involutorními. Vždy dva tyto sborcené čtyřúhelníky jsou totiž:

$$a_{m_1},\ a_{m_2},\ m,\ x_1;\quad a_{n_1},\ a_{n_2},\ n,\ x_2;$$
$$a_{p_1}',\ a_{p_2}',\ p,\ y_1;\quad a_{q_1}',\ a_{q_2}',\ q,\ x_2;$$
$$a_{p_1},\ a_{p_2},\ p,\ y_1;\quad a_{q_1},\ a_{q_2},\ p,\ y_2;$$
$$a_{m_1}',\ a_{m_2}',\ m,\ y_1'\quad a_{n_1}',\ a_{n_2}',\ n,\ y_2'.$$

Že čtyři přímky stanovící naše přímkové řady ξ^2, ξ_1^2, η^2, η_1^2 skutečně tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, vyplývá z věty, kterou, jelikož sama pro sebe též jakousi zajímavost má, zvlášť vytkneme. Totiž z věty:

Dána-li dvojina přímek p_1, p_2 a mimo to ještě dvě dvojiny přímkové p_1', p_2'; p_1'', p_2'' té vlastnosti, že poslední 4 přímky tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek, tu sestrojíme-li dvě dvojiny transversál vždy 4 přímek: p_1, p_2, p_1', p_2'; p_1, p_2, p_1'', p_2'', tu tyto transversály tvoří hyperboloidickou čtveřinu přímek.

Správnost věty uvedené jest patrna z toho, že 4 transversály naše musí ležeti na hyperboloidové přímkové řadě, která jest společna lineární kongruenci $[p_1\ p_2]$ a lineárnímu komplexu stanovenému dvěma dvojinami jeho konjugovaných polár, totiž dvojinami:

$$p_1',\ p_2';\ p_1'',\ p_2''.$$

V našem daném případě u řady $\xi^2 \equiv (m,\ n,\ x_1,\ x_2)$ jsou, jak z konstrukce patrno, dvojiny přímek m, x_1 a n, x_2 oběma transversálami vždy čtyř přímek: p, q, a_{m_1}, a_{m_2} resp. p, q, a_{n_1}, a_{n_2}, kde 4 přímky a_{m_1}, a_{m_2}, a_{n_1}, a_{n_2} tvoří hyperboloidickou čtveřinu ležíce na řadě α^2. Zcela stejně to platí o přímkách dalších hyperboloidových řad: ξ_1^2, η^2 a η_1^2.

II.

Buďtež m, n libovolnými mimoběžnými přímkami a p budiž jejich příčkou. Přímkami m, n, p prochází ∞^2 hyperboloidů tvořících tak speciální lineární systém S_2. Budiž Σ_7^4 systém všech ∞^7 sborcených hyperboloidů obsahujících přímkové řady, které jsou ku řadám α^2, α_1^2; β^2, β_1^2 dvou daných hyperboloidů A^2, B^2 v involuci. Hledejme konstruktivně 4 hyperboloidy náležející oběma systémům S_2 a Σ_7^4.

Stanovme si čtyři dvojiny lineárních komplexů:

$$\{m,\ n;\ \alpha^2\},\ \{m,\ n;\ \beta^2\},$$
$$\{m,\ n;\ \alpha^2\},\ \{n,\ n;\ \beta_1^2\},$$
$$\{m,\ n;\ \alpha_1^2\},\ \{m,\ n;\ \beta^2\},$$
$$\{m,\ n;\ \alpha_1^2\},\ \{m,\ n;\ \beta_1^2\},$$

tyto čtyři dvojiny pronikají se ve 4 lineárních kongruencích o dvojinách řídicích přímek, které jsou patrně vesměs obsaženy v lineární kongruenci $[m,\ n]$ a každá z těchto dvojin stanoví pak s přímkou p jeden z hledaných 4 hyperboloidů.

Konstruktivně nalezneme tyto dvojiny vždy jako druhé transversály (první transversálou jest vždy p) vždy čtyř přímek:

$$\begin{array}{llll} m, & n, & a_1, & a_2; \quad m, \; n, \; b_1, \; b_2; \\ m, & n, & a_1, & a_2; \quad m, \; n, \; b_1', \; b_2'; \\ m, & n, & a_1', & a_2'; \quad m, \; n, \; b_1, \; b_2; \\ m, & n, & a_1', & a_2'; \quad m, \; n, \; b_1', \; b_2'. \end{array}$$

Označme si ty dvojiny transversál postupně:

$$t_\alpha, \; t_\beta; \; t_\alpha, \; t_\beta'; \; t_\alpha', \; t_\beta; \; t_\alpha', \; t_\beta'.$$

Hledané naše 4 hyperboloidy stanovené vždy třemi přímkami můžeme symbolicky označiti následovně:

$$\begin{aligned} X_1^2 &\equiv (p, \; t_\alpha, \; t_\beta), \\ X_2^2 &\equiv (p, \; t_\alpha, \; t_\beta'), \\ X_3^2 &\equiv (p, \; t_\alpha', \; t_\beta), \\ X_4^2 &\equiv (p, \; t_\alpha', \; t_\beta'). \end{aligned}$$

Speciální případ nastává, když hyperboloidy A^2 a B^2 se stotožňují, neboli když hledáme hyperboloid společný našemu systému S_2 a systému Σ_7, který tvoří souhrn všech hyperboloidů, které obsahují řady, jež jsou s řadami hyperboloidu $A^2 \equiv B^2$ v dvojnásobné involuci. Hyperboloid ten, který označíme X^2, sestrojíme následovně:

Přímka p nechť protne v řadách α^2, α_1^2 hyperboloidu A^2 vždy přímky:

$$a_1, \; a_2; \; a_1', \; a_2'.$$

Sestrojme nyní transversály vždy ku čtyřem přímkám:

$$m, \; n, \; a_1, \; a_2; \quad m, \; n, \; a_1', \; a_2'.$$

Jednou transversálou jest vždy přímka p, druhými buďtež přímky:

$$t; \; t'.$$

I jest hledaný hyperboloid dán třemi přímkami:

$$X^2 \equiv (p, \; t, \; t').$$

III.

Tři hyperboloidy A^2, B^2, C^2 stanoví systém 8. stupně ∞^6 hyperboloidů, které obsahují řady, jež jsou ku řadám všech tří těchto hyperboloidů v involuci. Budeme hledati konstruktivně pronik tohoto systému Σ_6^8 se speciálním lineárním systémem S_3 všech ∞^3 hyperboloidů procházejících dvěma mimoběžkami m, n, což jest, jak jsme dříve ukázali, 8 hyperboloidů. K vůli jednoduchosti sestrojíme takový hyperboloid jenom jeden a o ostatních ukážeme, že lze je způsobem zcela analogickým dále sestrojiti.

Buďtež postupně:

$$\alpha^2,\ \alpha_1^2;\ \beta^2,\ \beta_1^2;\ \gamma^2,\ \gamma_1^2$$

přímkovými řadami na daných třech hyperboloidech a uvažujme nejprve řady:

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2$$

a proložme postupně těmito řadami a přímkami m, n lineární komplexy, které si symbolicky označíme:

$$\{m,\ n;\ \alpha^2\},\ \{m,\ n;\ \beta^2\},\ \{m,\ n;\ \gamma^2\}.$$

Tyto tři lineární komplexy pronikají se v přímkové řadě ξ_1^2, jejíž řídicí řada ξ^2 jest patrně v involuci s každou ze tří řad α^2, β^2, γ^2. A jest tedy hyperboloid X_1^2, který jest nositelem řad ξ^2, ξ_1^2 jedním z hledaných osmi hyperboloidů společných systémům S_3 a Σ_6^8.

Uvažujme řídicí řady uvedených tří přímkových řad, totiž řady:

$$\alpha_1^2,\ \beta_1^2,\ \gamma_1^2,$$

na těchto řadách existují involuce konjugovaných polár našich tří lineárních komplexů, a sice po řadě:

$$\{m,\ n;\ \alpha^2\},\ \{m,\ n,\ \beta^2\},\ \{m,\ n;\ \gamma^2\}.$$

Protínají tudíž přímky m, n jakožto přímky těchto komplexů tyto řídicí řady ve dvojinách konjugovaných polár těchto komplexů. Dvojiny ty jsou na těchto třech řadách postupně následující:

$$\begin{array}{l} p_\alpha,\ p_\alpha';\ \ q_\alpha,\ q_\alpha', \\ p_\beta,\ p_\beta';\ \ q_\beta,\ q_\beta', \\ p_\gamma,\ p_\gamma';\ \ q_\gamma,\ q_\gamma'. \end{array}$$

Hledáme pak lineární kongruence obsažené postupně ve třech dvojinách z našich tří lineárních komplexů, tři dvojiny pak řídicích přímek těchto tří lineárních kongruencí stanoví již hledaný hyperboloid X_1^2. Sestrojíme-li dvakrát společné transversály každé ze dvou čtveřin přímkových

$$p_\alpha,\ p_\alpha',\ p_\beta,\ p_\beta';\ q_\alpha,\ q_\alpha',\ q_\beta,\ q_\beta';$$

nebo dvou čtveřin:

$$p_\alpha,\ p_\alpha',\ q_\beta,\ q_\beta';\ q_\alpha,\ q_\alpha',\ p_\beta,\ p_\beta';$$

tu pokaždé dvě transversály dvou dvojic těchto transversál jsou toutéž dvojinou řídicích přímek:

$$d_{\alpha\beta},\ d_{\alpha\beta}'$$

kongruence lineárních komplexů:

$$\{m,\ n;\ \alpha^2\},\ \{m,\ n;\ \beta^2\}.$$

Zcela analogicky obě transversály dvou dvojin transversál dvou přímkových čtveřin:

$$p_\alpha,\ p_\alpha',\ p_\gamma,\ p_\gamma';\ q_\alpha,\ q_\alpha',\ q_\gamma,\ q_\gamma';$$

nebo dvou čtveřin:

$$p_\alpha,\ p_\alpha',\ q_\gamma,\ q_\gamma';\ q_\alpha,\ q_\alpha',\ p_\gamma,\ p_\gamma',$$

vedou ku dvojině řídicích přímek:

$$d_{\alpha\gamma},\ d_{\alpha\gamma'}$$

kongruence lineárních komplexů:

$$\{m,\ n;\ \alpha^2\},\ \{m,\ n;\ \gamma^2\}.$$

Posléze týmže způsobem od dvou čtveřin:

$$p_\beta,\ p_\beta',\ p_\gamma,\ p_\gamma';\ q_\beta,\ q_\beta',\ q_\gamma,\ q_\gamma'$$

nebo od dvou čtveřin:

$$p_\beta,\ p_\beta',\ q_\gamma,\ q_\gamma';\ q_\beta,\ q_\beta',\ p_\gamma,\ p_\gamma'$$

dospíváme ku přímkám:

$$d_{\beta\gamma},\ d_{\beta\gamma'},$$

jež jsou řídicími přímkami kongruence lineárních komplexů:

$$\{m,\ n;\ \beta^2\},\ \{m,\ n;\ \gamma^2\}.$$

Jest tedy hledaný hyperboloid stanoven svými šesti přímkami:

$$X_1^2 \equiv (d_{\alpha\beta},\ d_{\alpha\beta'},\ d_{\alpha\gamma},\ d_{\alpha\gamma'},\ d_{\beta\gamma},\ d_{\beta\gamma'}).$$

Jako jsme sestrojili tento hyperboloid X_1^2 tím, že jsme stanovili jednu jeho přímkovou řadu, jakožto pronik tří lineárních komplexů proložených základními přímkami m, n a postupně přímkovými řadami α^2, β^2, γ^2, sestrojili bychom dalších 7 hyperboloidů:

$$X_2^2,\ X_3^2,\ X_4^2,\ \ldots\ X_8^2$$

tím, že bychom sestrojili vždy jednu jejich řadu jakožto pronik vždy tří lineárních komplexů stanovených vždy dvěma přímkami m, n a pak postupně vždy třemi přímkovými řadami:

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma_1^2;\ \alpha^2,\ \beta_1^2,\ \gamma^2;\ \alpha^2,\ \beta_1^2,\ \gamma_1^2;$$
$$\alpha_1^2,\ \beta^2,\ \gamma^2;\ \alpha_1^2,\ \beta^2,\ \gamma_1^2;\ \alpha_1^2,\ \beta_1^2,\ \gamma^2;\ \alpha_1^2,\ \beta_1^2,\ \gamma_1^2.$$

Příspěvek k theorii elliptické křivky normální.

Napsal

B. BYDŽOVSKÝ.

Předloženo dne 17. října 1914.

Je známa věta,[1]) že každá jednojednoznačná korrespondence na kubické křivce rovinné je obsažena v nekonečně mnoha Cremonových kvadratických transformacích roviny. Věta analogická platí pro každou normální křivku elliptickou v prostoru o libovolném počtu rozměrů.

1. Důkazu této věty budiž předeslána úvaha o kvadratických transformacích Cremonových prostoru n-rozměrného. Jsou-li x_i homogenní souřadnice bodu v jednom, y_i homogenní souřadnice bodu ve druhém prostoru n-rozměrném, je příbuznost obou prostorů, vyjádřená rovnicemi

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1 &= y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_{n+1}^2 \\ \varrho\, x_i &= y_1\, y_i \qquad\qquad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1 \end{aligned}$$

kvadratická a jednojednoznačná. Řešením těchto rovnic obdržíme totiž ihned

$$\begin{aligned} \varrho'\, y_1 &= x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \\ \varrho'\, y_i &= x_1\, x_i \qquad\qquad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1, \end{aligned}$$

kde $$\varrho' = \frac{x_1\, y_1}{\varrho}.$$

Geometrická interpretace těchto rovnic vede k těmto vlastnostem kvadratické transformace: V jednom prostoru je dán bod X_0 a lineární prostor $(n-1)$rozměrný X_{n-1}, jenž bodu X_0 neobsahuje; v druhém prostoru je dán bod Y_0 a lineární prostor Y_{n-1}, jenž bodu Y_0 neobsahuje. Body X_0, Y_0 jsou body hlavní; bodu X_0 (Y_0) odpovídají všechny body prostoru Y_{n-1} (X_{n-1}). Svazky paprsků $(n-1)$ rozměrné o středech X_0, Y_0 — budeme je stručně označovati $[X_0]$, $[Y_0]$ — jsou sdruženy kollineací K. Ve svazku $[X_0]$ existuje význačný kvadratický kužel $(n-2)$

[1]) V. Enzyklopädie der math. Wiss., III C 5 § 37 str. 500 (pozn. 169).

rozměrný K_x, jenž na X_{n-1} vytíná kvadratickou varietu k_x; kuželi K_x odpovídá kollineací K v $[Y_0]$ kužel K_y, jenž na Y_{n-1} vytíná kvadratickou varietu k_y. Každému bodu jednoho prostoru odpovídá jediný bod druhého a obráceně; výjimku činí body hlavní, t. j. mimo zmíněné již dva všechny body variet k_x, k_y. Danému bodu na k_x odpovídají všechny body toho paprsku kužele K_y, jenž v kollineaci K odpovídá paprsku promítajícímu z bodu X_0 daný bod na k_x. Obráceně každému bodu na k_y odpovídá celý paprsek kužele K_x. Lineárnímu prostoru jedné soustavy odpovídá obecně kvadratická varieta druhé soustavy. Tak zvláště paprsku prvního prostoru odpovídá ve druhém kuželosečka, jež prochází bodem Y_0 a obsahuje dva body variety k_y; totiž ty, jež odpovídají oběma bodům, v nichž paprsek protíná kužel K_x. Paprsku bodem hlavním odpovídá opět paprsek bodem hlavním a to týž, který mu odpovídá v kollineaci K. Paprsku, jenž obsahuje jeden bod variety k_x, odpovídá — vedle jednoho paprsku kužele K_y — paprsek obsahující jeden bod variety k_y. Lineárnímu prostoru $(k-1)$ rozměrnému odpovídá kvadratická varieta $(k-1)$rozměrná procházející bodem Y_0 a varietou k_y; obsahuje-li lineární prostor bod X_0, rozpadne se kvadratická varieta na Y_{k-1} a lineární prostor bodem Y_0. Atd. atd.

Kvadratická transformace je určena, jsou-li dány: body X_0, Y_0; variety k_x, k_y; kollineace K; konečně dvojice bodů A, A' sobě odpovídajících. Neboť pak lze k libovolnému bodu X prvého prostoru sestrojiti bod X' jemu odpovídající v druhém prostoru takto: k paprsku $\overline{X_0 X}$ sestrojíme paprsek $\overline{Y_0 X'}$, jenž mu dopovídá v kollineaci K. Paprsku $\overline{A X}$ odpovídá kuželosečka, jež je dostatečně určena: obsahuje bod A', bod Y_0, známé dva body variety k_y; tečna její v bodě Y_0 je známa, neboť je to ten paprsek svazku $[Y_0]$, jenž odpovídá v kollineaci K paprsku svazku $[X_0]$ promítajícímu bod, v němž paprsek $\overline{A X}$ protne prostor X_{n-1}. Tato kuželosečka leží s paprskem $\overline{Y_0 X'}$ v jedné rovině — ježto $\overline{X_0 X}$, $\overline{A X}$ leží v jedné rovině — a protne jej mimo bod Y_0 v hledaném bodu X'.

2. Na normální elliptické křivce stupně $(n+1)$ho $K^{(n+1)}$ v prostoru n-rozměrném zvolme dva body (u_0), (u'_{2n+1}), t. j. body, jichž parametry jsou u_0, u'_{2n+1} při známém parametrickém vyjádření užitím elliptických funkcí. Z těchto dvou bodů promítneme křivku dvěma elliptickými kužely stupně n-ho. Tyto kužele mají týž modul, i lze je sdružiti lineárně, t. j. lze určiti kollineaci mezi oběma svazky o vrcholech (u_0), (u'_{2n+1}), v níž tyto kužele si odpovídají. Tímto přidružením vznikne na křivce jednojednoznačná korrespondence, jež je ovšem vyjádřena vztahem mezi parametry

$$u' \equiv \pm u + C, \qquad (1)$$

kde konstanta C závisí na volbě bodů (u_0), (u'_{2n+1}). Musí totiž těm bodům křivky, jež s bodem (u_0) leží v témže lineárním prostoru $(n-1)$ rozměrném, odpovídati body, jež s bodem u'_{2n+1} leží v lineárním prostoru $(n-1)$rozměrném. Podmínku, aby $(n+1)$ bodů křivky leželo v takovém prostoru, lze vždy psáti ve tvaru

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n \equiv 0 \qquad (2).$$

Pro body (u_1'), ..., (u_n'), odpovídající bodům (u_1), ..., (u_n) musí platiti

$$u'_{2n+1} + u_1' + \ldots + u_n' \equiv 0,$$

z čehož plyne užitím korrespondence (1)

$$u'_{2n+1} \pm (u_1 + \ldots + u_n) + nC \equiv 0.$$

Odtud se obdrží užitím podmínky (2) výsledek

$$nC \equiv \pm u_0 - u'_{2n+1} \qquad (3).$$

Zvolíme-li tedy C tak, aby vyhovovalo této podmínce, přidružuje kollineace svrchu zmíněná paprsku, jenž promítá z bodu (u_0) bod (u), paprsek, jenž promítá z bodu (u'_{2n+1}) bod (u'), jehož parametr je dán vztahem (1).

V korrespondenci (1) odpovídá bod (u'_{2n+1}) bodu (u_{2n+1}), pro který platí

$$u_{2n+1} \equiv \pm (u'_{2n+1} - C).$$

Bodem (u_{2n+1}) položme libovolný lineární prostor $(n-1)$rozměrný U_{n-1}, jenž neobsahuje bodu (u_0); tento prostor protne křivku v dalších n bodech, jež označíme (u_{n+1}), ..., (u_{2n}). Těmito body lze položiti nekonečně mnoho kvadratických variet $(n-2)$ rozměrných, jež leží v U_{n-1}, neboť taková varieta je určena

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2} \text{ body a } \frac{(n+2)(n-1)}{2} > n \text{ pro } n > 2.$$

Zvolme jednu z nich, jež neobsahuje bodu (u_{2n+1}), a označme ji k. Kužel K, kterým se k promítá z bodu (u_0), je ovšem kvadratický, a protne křivku $K^{(n+1)}$ ve $2(n+1)$ bodech; v těch je bod (u_0) počítán dvakrát, pak body (u_{n+1}), ..., (u_{2n}) jednoduše; i zbývá ještě n průsečíků, jež označíme (u_1), ..., (u_n). Pro všechny tyto body ovšem platí

$$2u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n} \equiv 0 \qquad (4).$$

Ježto však body (u_{n+1}), ..., (u_{2n+1}) leží v lineárním prostoru, platí

$$u_{n+1} + \ldots + u_{2n} + u_{2n+1} \equiv 0;$$

užitím tohoto vztahu změní se (4) na kongruenci

$$2u_0 - u_{2n+1} + (u_1 + \ldots + u_n) \equiv 0 \qquad (5).$$

Této podmínce musí vyhovovati průsečíky kužele K s křivkou. Že neexistuje žádná jiná, je patrno z toho, že mimo bod (u_0) již předem volený a jeden kterýkoli z dalších bodů, jichž parametry jsou uvedeny v kongruenci (4), lze všechny ostatní voliti na křivce libovolně. To plyne

jednak z toho, že body $(u_{n+1}), \ldots, (u_{2n})$ je prostor U_{n-1} právě určen, jednak z toho, že platí

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2} \geqq 2n-1 \quad \text{pro } n+1 \geqq 4,$$

tedy *počínaje normální křivkou v prostoru třírozměrném.*

Uvažujme nyní body (u_i') pro $i = 0, \ldots, 2n+1$, odpovídající bodům (u_i) korrespondencí (1). Užitím této korrespondence obdržíme

$$u_0' + u_1' + \ldots + u_n' \equiv \pm (u_0 + u_1 + \ldots + u_n) + nC + C.$$

Nahradíme-li výraz nC dle vztahu (3), upravíme pravou stranu na výraz

$$\pm (u_0 + u_1 + \ldots + u_n) \pm u_0 - u'_{2n+1} + C \equiv$$
$$\equiv \pm (2u_0 + u_1 + \ldots + u_n) - u'_{2n+1} + C,$$

který upravíme užitím kongruence (5), tak že obdržíme

$$u_0' + u_1' + \ldots + u_n' \equiv \pm u_{2n+1} - u'_{2n+1} + C \equiv 0,$$

t. j.: body (u_0'), ..., (u_n') leží v lineárním prostoru U'_{n-1}.

Užitím týchž vzorců a postupnou úpravou obdržíme podobně:

$$2u'_{2n+1} + u_1' + \ldots + u_n' \equiv 2u'_{2n+1} \pm (u_1 + \ldots + u_{2n}) + 2nC \equiv$$
$$\equiv 2u'_{2n+1} \mp 2u_0 + 2nC \equiv 0.$$

Leží tedy ty body, jež odpovídají v korrespondenci (1) bodům na kuželi K ležícím, na kvadratickém kuželi K' o vrcholu (u'_{2n+1}), jak ovšem musí býti; tyto dva kužele jsou totiž sdruženy kollineací, v níž si odpovídají oba elliptické kužele, o nichž byla výše řeč. Kužel K' protíná U'_{n-1} v kvadratické varietě, kterou nazvu $k.'$ V lineárním prostoru U'_{n-1} leží vedle bodu, jenž odpovídá vrcholu kužele K, ještě ty body, které odpovídají bodům ležícím na K mimo U_{n-1}.

3. V prostoru n-rozměrném, jenž obsahuje křivku $K^{(n+1)}$, sestrojme kvadratickou transformaci určenou takto: kužele K, K' buďtež oba kužele hlavní; vrcholu (u_0) prvého odpovídají všechny body prostoru U'_{n-1}, vrcholu (u'_{2n+1}) druhého všechny body prostoru U_{n-1}; oba kužele jsou sdruženy známou kollineací. Konečně nechť libovolnému bodu (u) křivky odpovídá bod, jenž mu přísluší v korrespondenci (1). Tím vším je kvadratická transformace právě určena, jak plyne z dřívějšího výkladu.

Touto transformací přejde křivka $K^{(n+1)}$ opět v normální elliptickou křivku $K_1^{(n+1)}$. Neboť křivce stupně $(n+1)$ho odpovídá v kvadratické transformaci obecně křivka stupně $2(n+1)$. Ježto však křivka $K^{(n+1}$ obsahuje bod (u_0), jemuž odpovídá lineární prostor, a body $(u_{n+1}), \ldots, (u_{2n})$ na k, jimž odpovídají paprsky kužele K', sníží se stupeň křivky o $(n+1)$ a je tedy skutečně $(n+1)$. Že pak je tato křivka elliptická s týmž modulem jako původní, je zřejmo. Křivka $K_1^{(n+1)}$ má s křivkou $K^{(n+1)}$ celou řadu bodů společných. Především obsahuje $K_1^{(n+1)}$ body (u_1'), ...,

(u_n'), neboť to jsou body, jež odpovídají v kvadratické transformaci bodům $(u_1), \ldots, (u_n)$. Uvažujme dále bod (u_0): v kvadratické transformaci mu odpovídají všechny body lineárního prostoru U'_{n-1}. Tečné křivky $K^{(n+1)}$ v bodě (u_0) odpovídá v kollineaci mezi K, K' paprsek, který z bodu (u'_{2n+1}) promítá bod, odpovídající korrespondencí (1) bodu (u_0), totiž bod (u_0'). V tomto bodu tedy protíná $K_1^{(n+1)}$ prostor U'_{n-1}; to je další společný bod. Bodu (u_{2n+1}), ležícímu v U_{n-1} mimo k, odpovídá bod (u'_{2n+1}), jímž $K_1^{(n+1)}$ také prochází.

Položme bodem (u_0) lineární prostor S_{k-1} o $(k-1)$ rozměrech, jenž v bodu (u_{2n+1}) má s křivkou K^{n+1} styk řádu $(k-2)$ho. Touto podmínkou je onen prostor právě určen. V kollineaci mezi K, K' odpovídá mu lineární prostor S'_{k-1}, který k bodu (u'_{2n+1}) promítá $(k-1)$kráte bod odpovídající bodu (u_{2n+1}), t. j. právě bod (u'_{2n+1}); má tedy prostor S'_{k-1} s křivkou $K^{(n+1)}$ v bodě (u'_{2n+1}) styk řádu $(k-1)$ho. Avšak podle dřívějšího výkladu oba prostory S_{k-1}, S'_{k-1} odpovídají si také v kvadratické transformaci; při tom prostoru, jenž prochází bodem (u_0) a má v bodě (u_{2n+1}) s křivkou $K^{(n+1)}$ styk řádu $(k-2)$ho, odpovídá ovšem prostor, jenž má s křivkou $K_1^{(n+1)}$ styk řádu $(k-1)$ho v bodě (u'_{2n+1}); touto podmínkou je však prostor oskulační právě určen; z toho plyne, že oskulační prostor S'_{k-1} je oběma křivkám v bodě (u'_{2n+1}) společný. Tento výsledek zůstává v platnosti pro $k = 2, \ldots, n$; z toho však plyne, že v bodě (u'_{2n+1}) mají obě křivky styk řádu $(n-1)$ho, t. j. tento bod platí za n průsečíků.

Konečně obsahuje křivka $K_1^{(n+1)}$ bod (u'). I nalezli jsme celkem $(n+3)$ společných bodů, z nichž jeden platí za n průsečíků; to je celkem $2(n+1)$ průsečíků. Ježto normální křivky elliptické v prostoru n-rozměrném leží na kvadratických varietách $(n-1)$ rozměrných,[2]) mohou se dvě takové křivky protnouti nanejvýše ve $2(n+1)$ bodech, které ovšem musí vyhovovati jedné podmínce, která v našem případě by musila zníti

$$u_0' + u_1' + \ldots + u_n' + n\,u'_{2n+1} + u' \equiv 0.$$

Jestliže však uvážíme, že (u') může býti jakýkoli bod na křivce, shledáme, že napsaný vztah není vyplněn. Nemohou tedy body (u'), (u_0'), $\ldots$, (u'_{2n+1}) tvořiti úplnou soustavu průsečíků dvou normálních elliptických křivek; i musí tyto křivky býti totožné.

Sestrojili jsme tedy kvadratickou transformaci, kterou křivka $K^{(n+1)}$ přejde sama v sebe a to tak, že si odpovídají body sdružené korrespondencí (1). Uvážíme-li jednak, že v této korrespondenci konstantu C lze voliti libovolně, jak je zřejmo ze vztahu (3), jednak, že celá řada bodů, jimiž je transformace určena, může býti na křivce volena libovolně, můžeme vysloviti výsledek předchozích úvah větou:

---

[2]) V. na př. Klein-Fricke: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, díl II. str. 245.

Každá jednojednoznačná korrespondence na normální elliptické křivce je obsažena v nekonečně mnoha kvadratických Cremonových transformacích příslušného prostoru.

Důkaz ovšem platí teprve počínaje prostorem třírozměrným; ale pro rovinnou elliptickou křivku normální je tato věta známa, jak již bylo připomenuto.

Ostatně je možno i pro tuto křivku provésti důkaz, který až na malé modifikace podřazuje se předchozímu obecnému; na to však budiž jen upozorněno.

Příspěvek ku geometrii kulových ploch.

Napsal

Dr. BOHUSLAV HOSTINSKÝ.

(Předloženo dne 16. října 1914.)

V pracích „O útvarech určených soumeznými elementy prostorových křivek" a „O principu duality v differenciální geometrii"[1]) ukázal jsem na řadě příkladů, že lze mnohé věty differenciální geometrie transformovati užitím principu duality; duální transformací nalézáme jednak nové resultáty, jednak zajímavé vztahy mezi větami již známými.

Další výsledky v tomto směru obdržíme transformujíce theorii obalových ploch podle principu duality. V následujícím zabývám se zejména řešením problému (odst. 4.), jenž jest duální k t. zv. úloze Jametově, (odst. 2.) ešené Cèsarem.

1. Kolem každého bodu dané prostorové křivky k opišme kulovou plochu P; souřadnice l, m, n jejího středu A jakož i poloměr $r > 0$ nechť jsou funkcemi oblouku s čítaného na k od jistého počátečního bodu.

Poloměr křivosti křivky k v bodě A budiž R, směrové cos. tečny buďtež a, a', a''; hlavní normály b, b', b''; binormály c, c', c''. Pak platí známé rovnice

$$\frac{dl}{ds} = a, \frac{dm}{ds} = a', \frac{dn}{ds} = a''; \quad \frac{da}{ds} = \frac{b}{R}, \frac{da'}{ds} = \frac{b'}{R}, \frac{da''}{ds} = \frac{b''}{R}. \quad (1)$$

Plocha P má rovnici

$$(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2 - r^2 = 0. \quad (2)$$

Hledajíce obálku všech ploch P připojíme k rovnici (2) dvě další, které obdržíme opětovanou derivací levé strany (2) dle s. Vzhledem k (1) vychází

$$(x-l)\,a + (y-m)\,a' + (z-n)\,a'' + r\frac{dr}{ds} = 0. \quad (3)$$

$$(x-l)\,b + (y-m)\,b' + (z-n)\,b'' - R + R\frac{d}{ds}\left(r\frac{dr}{ds}\right) = 0. \quad (4)$$

[1]) Rozpravy České Akademie ročník XVI. (1907) a XVIII (1909).

Rovnicemi (2) a (3) jest stanovena charakteristická kružnice (charakteristika) na ploše P; kružnice ta jest proťata rovinou (4) ve dvou charakteristických bodech $M_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$ a $M_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$, jichž souřadnice vypočteme řešíce rovnice (2), (3) a (4) dle $x,\ y,\ z$. Při výpočtu jest dbáti toho, že devět směrových cos. $a,\ a'\ldots c''$ tvoří orthogonální determinant. Po snadných redukcích obdržíme

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= l + b\,q \quad - a\,p \quad \pm c\ \sqrt{r^2 - p^2 - q^2} \\ y_{1,2} &= m + b'\,q \quad - a'\,p \quad \pm c'\ \sqrt{r^2 - p^2 - q^2} \\ z_{1,2} &= n + b''\,q - a''\,p \pm c''\ \sqrt{r^2 - p^2 - q^2} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

kde jest užito zkratek

$$p = r\,\frac{d\,r}{d\,s}\,,\quad q = R\left[1 - \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 - r\,\frac{d^2\,r}{d\,s^2}\right]. \tag{6}$$

Poloha bodů M_1 a M_2 nezávisí tudíž na hodnotě torse křivky k.

Přímka $M_1\,M_2$ definovaná rovnicemi (3) a (4) jest rovnoběžná s binormálou křivky k v bodě A. Jsou-li $x_0,\ y_0,\ z_0$ souřadnice středu úsečky $M_1\,M_2$, jest dle (5)

$$x_0 = l + b\,q - a\,p,\ y_0 = m + b'\,q - a'\,p,\ z_0 = n + b''\,q - a''\,p,$$
$$(x_0 - l)\,c + (y_0 - m)\,c' + (z_0 - n)\,c'' = 0,$$

t. j. body M_1 a M_2 jsou souměrně sdružené vzhledem k oskulační rovině křivky k v bodě A.

2. Hrana vratu $\boldsymbol{\Gamma}$ na ploše obalené kulovými plochami P jest geometrické místo bodů M_1 a M_2; má obecně dvě větve. Zabývejme se případem, kdy obě větve splývají. Přímka $M_1\,M_2$ jest v tomto případě tečnou charakteristické kružnice; bod dotyku M leží v oskulační rovině čáry k a v něm dotýká se charakteristická kružnice čáry $\boldsymbol{\Gamma}$. Jinými slovy: $\boldsymbol{\Gamma}$ jest orthogonální trajektorie oskulačních rovin čáry k, a P jsou oskulačními koulemi křivky $\boldsymbol{\Gamma}$. Aby tento případ nastal, musí r vyhovovati differenciálné rovnici druhého řádu

$$r^2 - r^2\left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 - R^2\left[1 - \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 - r\,\frac{d^2\,r}{d\,s^2}\right]^2 = 0\,, \tag{I}$$

kterou obdržíme annulujíce diskriminant v (5).

Z rovnic (2) až (4) plyne snadno důkaz následující věty, kterou Cèsaro[1]) dokázal jiným způsobem: Nejobecnější řadu kulových ploch, jichž středy naplňují danou křivku k a jež jsou oskulačními koulemi jiné křivky, sestrojíme takto: k necht se deformuje beze změny křivosti tak, aby přešla v rovinnou křivku k_0. V její rovině zvolme pevný bod B a opišme kolem každého bodu křivky k_0 kouli P procházející bodem B. Hledanou řadu kulových ploch obdržíme deformujíce k_0 tak, aby nabyla

[1]) Cèsaro: Vorlesungen über natürliche Geometrie (přel. Kowalewski) p. 185—186.

opět tvaru k, při čemž každá koule P zůstává stále pevně spojena se svým středem na deformující se křivce.

Důkaz: Budiž $z = 0$ rovina křivky k_0, $(x, y, 0)$ bod B a $(l, m, 0)$ bod křivky k_0. Poloměr r koule P vyhovuje rovnici

$$(x - l)^2 + (y - m)^2 - r^2 = 0, \tag{I'}$$

kterou obdržíme dosazujíce $z = 0$, $n = 0$ do (2). Abychom vyloučili konstanty x, y, derivujeme rovnici (I') dvakráte dle s. Poněvadž pro křivku k_0 jest $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$, obdržíme resultát eliminace přímo z třetí rovnice (5); vychází rovnice (I). (I') jest tedy obecný integrál diferenciální rovnice (I); o singulárním integrálu viz v odst. *5.*

3. Uvažujme nyní následující problém, duální k problému obálek: dvě soumezné koule (2) (t. j. příslušné dvěma nekonečně málo rozdílným hodnotám proměnné s) jsou vepsány do jistého rotačního kužele K, tři soumezné koule (2) dotýkají se jistých dvou rovin ϱ_1 a ϱ_2; jest ustanoviti tyto roviny.

Patrně jest vrchol kužele K limitní poloha v n ě j š í h o středu podobnosti obou koulí a každá z rovin ϱ_1, ϱ_2 dotýká se toutéž svou stranou tří koulí.

Zaveďme rovinové souřadnice u, v, w, t, jež souvisí s bodovými souřadnicemi rovnicí

$$u x + v y + w z + t = 0; \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1. \tag{7}$$

Rovnice kulové plochy P v rovinových souřadnicích jest

$$l u + m v + n w + t - r = 0. \tag{8}$$

Užíváme stále označení zavedeného v odst. *1.* Derivujíce (8) dle s obdržíme rovnici

$$a u + a' v + a'' w - \frac{d r}{d s} = 0, \tag{9}$$

která zároveň s (7) představuje rotační kužel K. Derivujeme-li ještě jednou, vychází

$$b u + b' v + b'' w - R \frac{d^2 r}{d s^2} = 0. \tag{10}$$

Rovnice (8), (9) a (10) spolu s druhou rovnicí (7) stačí k určení čtyř neznámých u, v, w a t. Tak vypočteme souřadnice rovin ϱ_1 (u_1, v_1, w_1, t_1) a ϱ_2 (u_2, v_2, w_2, t_2):

$$\left.\begin{aligned}
u_{1,2} &= a \frac{d r}{d s} + b R \frac{d^2 r}{d s^2} \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{d r}{d s}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d^2 r}{d s^2}\right)^2} \\
v_{1,2} &= a' \frac{d r}{d s} + b' R \frac{d^2 r}{d s^2} \pm c' \sqrt{1 - \left(\frac{d r}{d s}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d^2 r}{d s^2}\right)^2} \\
w_{1,2} &= a'' \frac{d r}{d s} + b'' R \frac{d^2 r}{d s^2} \pm c'' \sqrt{1 - \left(\frac{d r}{d s}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d^2 r}{d s^2}\right)^2} \\
t_{1,2} &= r - (l u_{1,2} + m v_{1,2} + n w_{1,2}).
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Přímka Δ_1, podél níž se dotýká kužel K roviny ϱ_1, má rovnice

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1 = 0, \quad x \delta u_1 + y \delta v_1 + z \delta w_1 + \delta t_1 = 0; \quad (12)$$

differenciály δu_1, δv_1 . . vztahují se však ku změně roviny ϱ_1 jakožto tangenciální roviny kužele K; jich poměry určíme differencujíce při konstantním s rovnice (8), (9) a druhou rovnici (7). Vychází

$$l \delta u_1 + m \delta v_1 + n \delta w_1 + \delta t_1 = 0, \quad a \delta u_1 + a' \delta v_1 + a'' \delta w_1 = 0,$$
$$u_1 \delta u_1 + v_1 \delta v_1 + w_1 \delta w_1 = 0. \quad (13)$$

Abychom ustanovili charakteristiku roviny ϱ_1, t. j. přímku, ve které jest rovina ϱ_1 — určená vzorci (11) — příslušná jisté hodnotě oblouku s proťata rovinou ϱ_1 příslušnou hodnotě nekonečně blízké $s + d s$, differencujme opět rovnice (8), (9) a druhou rovnici (7) dle s dosazujíce na místo u, v, w, t výrazy u_1, v_1, w_1, t_1 dané vzorci (11). Vzhledem k (10) obdržíme zase rovnice (13) jen s tím rozdílem, že místo δu_1, δv_1 . . v nich budou differenciály $d u_1$, $d v_1$ . . vztahující se k proměnné s. Rovnice charakteristiky jsou tedy identické s rovnicemi (12) přímky Δ_1. Rovina ϱ_1 (ϱ_2) dotýká se podél své charakteristiky kužele K.

Tato věta jest úplně analogická známé větě o obálce ploch závislých na jednom parametru: hrana vratu obálky dotýká se v charakteristickém bodě charakteristiky. Analogii lze sledovati i v případě věty o úsečce $M_1 M_2$ dokázané na konci odst. *1*, neboť oskulační rovina čáry k půlí úhel utvořený rovinami ϱ_1 a ϱ_2.

K důkazu napišme rovnice rovin ϱ_1 a ϱ_2:

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1 = 0, \quad u_2 x + v_2 y + w_2 z + t_2 = 0$$

a odečtěme je. Vynechajíce faktor $2\sqrt{1 - \left(\frac{d r}{d s}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d^2 r}{d s^2}\right)^2}$ obdržíme

$$c (x - l) + c' (y - m) + c'' (z - n) = 0,$$

což jest rovnice oskulační roviny π křivky k v bodě A. Jsou-li pak ϑ_1, ϑ_2 úhly, které π tvoří s ϱ_1 resp. ϱ_2, jest dle (11)

$$\cos \vartheta_{1,2} = c u_{1,2} + c' v_{1,2} + c'' w_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d r}{d s}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d^2 r}{d s^2}\right)^2} \quad (14).$$

Poněvadž ϱ_1 a ϱ_2 obecně nejsou rovnoběžně, jest $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 180^0$ t. j. úhel rovin ϱ_1 a ϱ_2 jest půlen rovinou π.

4. Přejděme nyní jako v odst. *2.* k specielnímu případu: roviny ϱ_1 a ϱ_2 nechť koincidují pro každou hodnotu s. Společná limitní poloha ϱ obou rovin jest patrně kolmá k π a charakteristika roviny ϱ leží v π. Jinými slovy: křivka obalená charakteristikou roviny ϱ má π za rovinu rektifikační.

V prvé z obou výše zmíněných prací dokázal jsem následující větu o prostorových křivkách: čtyř soumezných oskulačních rovin dotýká se jediná zcela určitá kulová plocha, jejíž poloměr obecně nerovná se nulle. Nazveme tuto plochu oskulační koulí druhého druhu; její střed jest — jak lze snadno potvrditi výpočtem nebo geometrickou úvahou — v průsečíků tří soumezných rektifikačních rovin dané křivky. Tři soumezné roviny π protínají se v bodě A křivky k; ve specielním případě našeho problému uvedeném na počátku tohoto odstavce jsou koule P oskulačními koulemi druhého druhu pro jistou prostorovou křivku. Aby tento případ nastal, musí hověti r differenciální rovnici druhého řádu

$$1 - \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 - R^2\left(\frac{d^2\,r}{d\,s^2}\right)^2 = 0, \qquad \text{(II)}$$

kterou obdržíme annulujíce diskriminant v rovnicích (11). Interpretace rovnice (II) vede k následující větě, která jest úplně analogická větě Cèsarově (viz odst. 2):

Nejobecnější řadu kulových ploch, jichž středy naplňují danou křivku k a jež jsou oskulačními koulemi druhého druhu pro jinou křivku, sestrojíme takto: k nechť se deformuje beze změny křivosti tak, aby přešla v rovinnou křivku k_0. V její rovině zvolme pevnou přímku b a opišme kolem každého bodu křivky k_0 kouli P dotýkající se přímky b. Hledanou řadu kulových ploch obdržíme deformujíce k_0 tak, aby nabyla opět tvaru k, při čemž každá koule P zůstává stále pevně spojena se svým středem na deformující se křivce.

Důkaz: Budiž $z = 0$ rovina křivky k_0 a $(l, m, 0)$ bod na křivce k_0. Rovnice

$$u\,l + v\,m + t - r = 0, \qquad \text{(II')}$$

kterou obdržíme dosazujíce do (8) $n = 0$, $w = 0$, vyjadřuje danou podmínku pro r. Abychom vyloučili konstanty u, v a t, derivujeme (II') dvakráte dle s a ku třem rovnicím takto získaným připojme čtvrtou:

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Poněvadž pro křivku k_0 platí $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$, obdržíme resultát eliminace dosazujíce příslušné hodnoty do třetí rovnice (11); vychází právě rovnice (II), jejíž obecným integrálem jest rovnice (II') [vyhovují-li ovšem integrační konstanty t, u, v podmínce (15)].

5. Differenciální rovnice (I) má singulární integrál[1])

$$r = \pm s + const, \qquad (16)$$

[1]) Sr. Picard: Traité d'Analyse 2e édition t. III, p. 52.

který nelze obdržeti z obecného integrálu (I′) specialisací konstant x a y. Je-li rovnice (16) splněna, dotýkají se dvě soumezné koule P; v tomto případě nejsou P oskulačními koulemi prostorové křivky, nýbrž dotýkají se pruhu utvořeného plošnými elementy podél křivoznačné čáry a jejich středy jsou v příslušných hlavních středech křivosti. Mají-li býti P oskulačními koulemi prostorové křivky, jest nutno a stačí, aby vztah mezi r a s byl dán o b e c n ý m integrálem (I′) rovnice (I).

Docela podobné úvahy platí o rovnici (II); (16) jest společný singulární integrál rovnic (I) a (II).

Konstrukce oskulačních rovin některých křivek a několik deskriptivně geometrických applikací.

Napsal

J. Sobotka.

(S 15 obrazci v textu.)

Předloženo 30. října 1914.

1. Úvahy, které zde provedeme, možno rozčleniti v řadu úloh. Východiskem budiž následující úloha.

Na přímce p dána jest řada pevně navzájem spojených bodů $A, B, C, \ldots$; přímka koná takový pohyb, že jest stále rovnoběžna k dané rovině M *a dotýká se válcové plochy* Z *kolmé ku* M *a že její bod A popisuje danou křivku (A); pro křivky $(B), (C), \ldots$ popsané pak body $B, C, \ldots$ sestrojiti jest v příslušných polohách těchto bodů středy křivosti K_β, K_γ a oskulační roviny* B, C, *je-li dán střed křivosti K_α a oskulační rovina* A *křivky (A) pro příslušný bod A.*

Vztahujeme uvažované útvary k rovině M nebo k rovině k ní rovnoběžné, volíce ji za průmětnou při rovnoběžné, nejjednodušeji orthogonální, projekci. Průmět útvaru Σ budiž jako obvykle označen Σ'. Uvažujme polohu p hybné přímky s řadou bodů $A, B, C, \ldots$ Dotyčný bod Z přímky s plochou Z nechť vytvoří křivku (Z).

Charakterisujme nejprve souvislost křivek (Z'), (A'), (B'), ... Soumezná ku p poloha hybné přímky budiž p_1 s příslušnými body $A_1, B_1, C_1, \ldots Z_1$.

Ježto $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, ..., popisují přímky AA_1, BB_1, CC_1, ... hyperbolický paraboloid. Tvoří tudíž tečny $a, b, c, \ldots$ křivek $(A), (B), (C), \ldots$ v bodech $A, B, C, \ldots$ přímky p hyperbolický paraboloid Q. Je-li tedy (obr. 1.) dána tečna a ku (A) v bodě A, najdeme tečnu k některé z ostatních křivek $(B), (C), \ldots$ v příslušném bodě následujícím způsobem. Stanovme stopu A_1 přímky a v průmětně M; rovnoběžka $\bar{a}_1$

ku p' bodem A_1 jest stopou tečné roviny plochy Q v bodě A. Jsou-li $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$, ... stopy tečných rovin $\bar{b}_1\, p$, $\bar{c}_1\, p$, ... plochy Q v bodech B, C, ..., platí projektivnost $(A, B, C, \ldots Z, U_\infty) = (\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \ldots p', u_\infty)$, značí-li U_∞ nekonečně vzdálený bod přímky p a u_∞ nekonečně vzdálenou přímku roviny M. Vedeme-li kolmici N′ bodem Z' ku p', plyne ze zmíněné projektivnosti, že spojnice bodů A', $\bar{a}_1$. N′; B', $\bar{b}_1$. N′; ... jsou spolu rovnoběžny.

Abychom tedy sestrojili b, veďme bodem B' rovnoběžku ku přímce, která spojuje A' s průsečíkem $\bar{a}_1$. N′, jejím průsečíkem s N′ jde $\bar{b}_1$ rovnoběžně ku $\bar{a}_1$. Ježto jest $A'B' = A_1'B_1'$, $A'C' = A_1'C_1'$, ..., protínají se normály v bodech A', B', C', ... ke křivkám (A'), (B'), (C'), ... v jednom bodě n', který leží rovněž na N′. Tento bod jest okamžitým středem otáčení pro přechod přímky p' v soumeznou polohu p_1'; jest ohniskem obrysové paraboly průmětu Q′. Kolmice v bodě B' ku $n'B'$ jest tedy průmětem b' tečny b, jejíž stopou B_1 jest průsečík přímek b', $\bar{b}_1$, čímž jest přímka b úplně stanovena. Přímka $m_1 \equiv A_1 B_1$ jest stopou plochy Q v rovině M; na ní leží stopy všech tečen a, b, c, ...

Stanovení středů křivosti β, γ, ... křivek (B'), (C'), ... v bodech B', C', ..., známe-li střed křivosti α křivky (A') v bodě A' a střed křivosti ξ křivky (Z') v bodě Z', plyne ze známých konstrukcí; body α, β, γ, ... jsou totiž středy křivosti trajektorií popsaných body přímky p', která náleží rovinnému neproměnnému systemu, při pohybu tohoto systemu v jeho rovině. Mezi body tohoto systemu a středy křivosti jejich trajektorií pro každou polohu platí jednoduchá kvadratická příbuznost. Leží tedy body α, β, γ, ... na určité kuželosečce k.

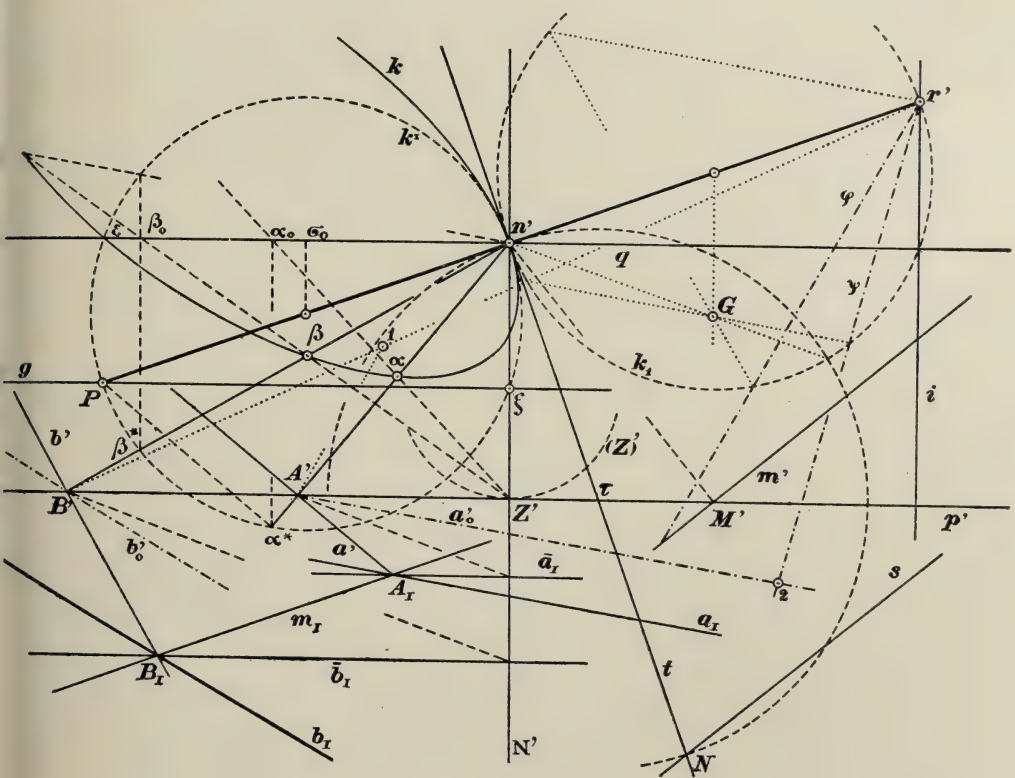
Bodová konstrukce křivky k byla předmětem mnohých úvah. Podejme ji zde ve formě uvedené A. Mannheimem.[1]) Body ξ a n' veďme rovnoběžky g, q ku p' a protněme $Z'\alpha$ a q v bodě α_0; bodem α_0 veďme rovnoběžku k N′ až ku průsečíku α^* s $A'\alpha$, načež sestrojíme v α^* kolmici ku $A'n'$, která protíná g v pevném bodě P. Dospějeme tedy vždy k témuž bodu P na přímce g, provedeme-li konstrukci místo pro α pro kterýkoli z bodů β, γ, ...

Předpokládáme-li tedy bod α za známý, můžeme sestrojiti bod P, na základě něhož pak obdržíme body β, γ, ... Abychom na př. sestrojili β, sestrojme z bodu P kolmici ku $B'n'$ a veďme její patou β^* rovnoběžku ku N′, která protne q v bodě β_0; pak protínají se přímky $B'n'$, $Z'\beta_0$ v bodě β.

Body α^*, β^*, ... vyplňují kružnici k^* sestrojenou nad Pn' jako průměrem; jest to jedna z Bobilierových kružnic příslušných okamžitému pólu n' našeho pohybu. Pn' jest normálou pólových křivek v bodě n' a kružnici k^* odpovídá v naší kvadratické příbuznosti nekonečně vzdálená řada bodová pohyblivého systemu. Křivky k, k^* oskulují se v bodě n',

[1]) Cf. A. Mannheim: Principes et développements de Geòmétrie cinématique, Paris, 1894, str. 36.

což také naše konstrukce potvrzuje. Křivky tyto plynou zde totiž jako dvě centricky kollineární kuželosečky pro n' jako střed a pro přímku q jako osu kollineace, při čemž bodu Z' přiřazenému ku k odpovídá centricky kollineárně nekonečně vzdálený bod přímky N'. Kružnice k^* prochází středem křivosti ζ obalové křivky pro přímku p, což rovněž plyne z naší konstrukce.



Obr. 1.

2. Souvislost tečen a, b, c, ... křivek (A), (B), (C), ... v bodech A, B, C, ..., které leží na jedné poloze přímky p, jest tedy zcela jednoduchá. Ale též souvislost oskulačních rovin A, B, C, ... těchto křivek v uvedených bodech jest velmi jednoduchá. Jsou-li A_0, A, A_1 tři soumezné body křivky (A), rovněž tak B_0, B, B_1; C_0, C, C_1; ... na (B), (C), ... jsou bodové řady A_0, B_0, C_0, ...; A, B, C, ...; A_1, B_1, C_1, ... shodny, platí tedy mezi nimi projektivnost. Následkem toho obalují roviny $A_0\,A\,A_1$, $B_0\,B\,B_1$, $C_0\,C\,C_1$, ... kubickou křivku prostorovou, která má nekonečně vzdálenou rovinu prostoru rovněž rovinou oskulační, jest tudíž prostorovou parabolou. Oskulační roviny A, B, C obalují tedy prostorovou parabolu.

Kuželosečka k má dva nekonečně vzdálené body $\varkappa$, λ, které jsou buďto reálné nebo sdruženě imaginárné. Přímku $n'\varkappa$ nechť protíná p'

v bodě H', přímku $n' \lambda$ v bodě L'. Tyto body jsou průměty dvou bodů H, L na přímce p, které při uvažovaném pohybu popisují křivky (H), (L). Soumezné body H_0', H', H_1' křivky (H') leží na přímce h', neboť křivka (H') má v bodě H' poloměr křivosti nekonečně veliký; z téhož důvodu leží soumezné body L_0', L', L_1' na přímce l'. Z toho plyne, že křivkám (H), (L) přísluší v bodech H, L oskulační roviny, které jsou promítacími k rovině M.

Sestrojme kružnici k_1, souměrnou ku k^* vzhledem ku n'. Jest jakožto druhá Bobilierova kružnice uvažované okamžité polohy geometrickým místem takových bodů pohyblivého systemu, které jsou inflexními body svých trajektorií. Protíná tedy k_1 přímku p' v bodech H', L' a kolmice v těchto bodech ku přímkám $H' n'$ resp. $L' n'$ protínají se na k_1 v bodě r', ku n' diametrálně protilehlém, ať jsou průsečíky H', L' reálné, různé nebo splývající, nebo sdruženě imaginárné. Bod r' leží tedy na $P n'$ a obdržíme jej, učiníme-li $n' r' = P n'$. Bod r' jest průmětem promítací přímky r, ve které protínají se promítací oskulační roviny H, L zmíněné prostorové paraboly.

Ku r dospějeme též jinak. Přeložme involuci průměrů sdružených křivky k rovnoběžně do (I) tak, že střed její přejde do n'. V této poloze budou $n' \varkappa$, $n' \lambda$ dvojnými paprsky involuce. Involuce (I) protíná přímku p' v bodové involuci (II), jejíž dvojné body jsou, jakožto průsečíky přímek $n' \varkappa$, $n' \lambda$ s přímkou p', body H', L'. Kolmice v bodech přímky p' k jejich spojnicím s bodem n' obalují parabolu (u); tvoří tedy na (u) tečnovou involuci, jejíž dvojné paprsky procházejí body H' L'. Kolmice t v bodě n' ku $P n'$ jest tečnou křivky k v bodě n'. Ježto jest q společnou tetivou křivek k, k^*, jsou přímky q, t harmonicky odděleny pravoúhlou dvojicí involuce (I). Tato dvojice protíná p' ve dvojici involuce (II), kterou obdržíme v průsečících přímky p' s kružnicí opsanou kolem společného bodu τ přímek t, p' jako středu a jdoucí bodem n'. Stanovme na přímce t bod N tak, že $\tau N = n' \tau$; plyne tu, že N leží na ose involuce vzniklé na křivce (u). Průměru křivky k jdoucímu bodem Z', který nechť protíná přímku q v bodě σ_0, jest sdružen průměr rovnoběžný ku q, jak plyne z centrické kollineace mezi k a k^*. Protíná tudíž rovnoběžka ku $Z' \sigma_0$, bodem n' vedená, přímku p' ve středu M' involuce (II). Kolmice m' z bodu M' na $Z' \sigma_0$ tvoří tedy s nekonečně vzdálenou přímkou roviny M jednu dvojici tečnové involuce na křivce (u). Z toho plyne, že osa s této tečnové involuce prochází bodem N a jest kolma ku $Z' \sigma_0$. Bod r' jest nyní pólem přímky s ku (u) a m' jest tečna ku (u) rovnoběžná ku s. Patou ε kolmice z bodu P ku q jest průsečík křivek k, k^* a jest $n' \sigma_0 = \sigma_0 \varepsilon$. Dotykový bod přímky m' s křivkou (u) leží tedy na přímce i souměrně položené ku $P \varepsilon$ vzhledem ku $Z' n'$, která prochází tudíž bodem r'. Ježto bod n' jest ohniskem křivky (u), leží N na řídící přímce její a přímka $P n'$, která jest kolma ku t, jest pólárou bodu N ke křivce (u), procházejíc tudíž rovněž bodem r'. Tím jest bod r' stanoven týmž způsobem jako prve.

3. Přímka p jest jednou osou naší prostorové paraboly p^3.

Leží-li totiž na třech přímkách p_0, p, p_1 projektivní řady bodové $A_0, B_0, C_0, \ldots$, $A, B, C, \ldots$, $A_1, B_1, C_1, \ldots$, obalují roviny $A_0 A A_1, B_0 B B_1, C_0 C C_1, \ldots$ kubickou prostorovou křivku p^3. Přímky $A_0 A$, $B_0 B$, $C_0 C, \ldots$ vytvořují řadu přímkovou Q, přímky $A A_1$, $B B_1$, $C C_1, \ldots$ řadu Q_1. Tečné roviny k oběma v bodech přímky p tvoří dva projektivní rovinové svazky a dvojné roviny jejich jsou dvě oskulační roviny křivky p^3, které se protínají v přímce p. Neboť je-li F bod na p, v němž mají Q, Q_1 společnou rovinu tečnou, obsahuje tato jak přímku $F_0 F$ tak přímku $F F_1$ a také přímku p.

V našem případě[1]) jsou Q, Q_1 dva nekonečně blízké hyperbolické paraboloidy. Rovina M_0 vedená přímkou p rovnoběžně ku M jest asymptotickou rovinou jak pro Q tak pro Q_1, jest tedy M_0 oskulační rovinou křivky p^3.

Průsečnice a_0, b_0, $c_0, \ldots$ oskulačních rovin A, B, C, ... s oskulační rovinou M_0 křivky p^3 obalují kuželosečku, která jest zde parabolou (v), ježto nekonečně vzdálená rovina U jest též oskulační rovinou křivky p^3.

Pro parabolu (v) známe tedy tečnu p, průsečnici a_0 rovin A, M_0 a obě tečny, které se promítají jako tečny jdoucí bodem r' ku (u) a jež jsou též spojnicemi bodu r' s průsečíky kružnice k_1 s přímkou p'. Tím jest parabola (v) úplně určena a můžeme lineárně sestrojiti její tečny $b_0, c_0, \ldots$, čímž jsou také dány roviny B, C, ...

Shrneme-li tyto úvahy, plyne následující konstrukce roviny B, jsou-li A, K_α dány.

Ze středu křivosti K_α křivky (A) v bodě A odvodíme známým způsobem střed křivosti α křivky (A') v bodě A', na př. jako střed křivosti oné ellipsy jdoucí bodem A', která dotýká se a', má bod K_α' za střed a jejíž hlavní osa má směr stopy a_1 roviny A. Z α odvodíme pak způsobem prve uvedeným bod P a bod r' souměrný k němu vzhledem ku n'; nad úsečkou $n' r'$ jako průměrem sestrojíme kružnici k_1 a spojíme body, v nichž protíná p', s bodem r' přímkami ϱ_1, ϱ_2. Rovnoběžka a_0' ku a_1 bodem A' vedená určuje s p', ϱ_1, ϱ_2 jako tečnami parabolu (v'); sestrojme bodem B' tečnu b_0' ku (v'), různou od p'; pak jest rovina B stanovena přímkami b_0, b.

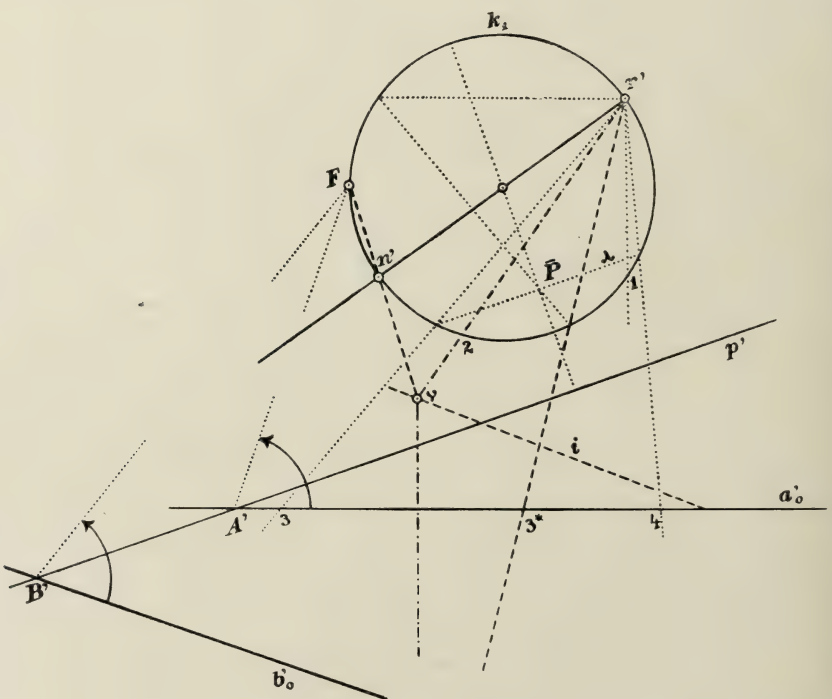
Tuto konstrukci možno přímo provésti jen tehdy, jsou-li ϱ_1, ϱ_2 reálné. Není-li tomu tak, stanovme pól G přímky p' ku k_1; tento jest zároveň pólem involuce na k_1, která promítá se z bodu r' paprskovou involucí (J), mající ϱ_1, ϱ_2 za paprsky dvojné. Parabola (v') jest zde určena nekonečně vzdálenou přímkou své roviny, přímkami p', a_0' a dvojnými paprsky ϱ_1, ϱ_2 involuce (J) a jde o to, sestrojiti lineárně její tečnu b_0'. To vede ke známým konstrukcím. Veďme na př. rovnoběžku ku a_0' bodem r', spojme její průsečík s k_1 a bod G přímkou, jejímž druhým průsečíkem s k_1 vedeme přímku φ k bodu r'. Dále protněme $B' r'$ s k_1, spojme průsečík s bodem G

[1]) Okolnost, že zde p^3 degeneruje, byla přehlédnuta, k čemuž bude při jiné příležitosti poukázáno.

přímkou, která dává na k_1 nový průsečík, jehož spojnice s r' budiž ψ. Přímky a_0', p', φ, ψ jako tečny určují parabolu, jejíž tečna bodem B' jdoucí a od p' různá splývá s b_0', čímž jest tedy rovina B opět určena.[1]) Protneme-li tedy na př. $B'r'$ rovnoběžkou ku φ bodem A' v bodě *1* a a_0' přímkou ψ v bodě *2*, jest $b_0' \parallel 1\,2$.

4. V případě, že přímky ϱ_1, ϱ_2, jejichž průsečíky s p' chceme nyní značiti P_1', P_2', jsou imaginárné, můžeme užiti též následujícího postupu (obr. 2.). Kružnice k_1 opsána jest tečnovému třístranu $p'\,\varrho_1\,\varrho_2$ křivky (v'); na ní leží tedy ohnisko F křivky (v'). Protínají-li ϱ_1, ϱ_2 přímku a_0' v bodech π_1, π_2, prochází rovněž kružnice k_2 opsaná tečnovému třístranu $a_0'\,\pi_1\,\pi_2$ bodem F. Ohnisko F jest průsečíkem kružnic k_1, k_2, různým od r'. Možno je však obdržeti aniž sestrojíme kružnici k_2. Myslíme-li si v bodě π_1 kolmici ku $r'\,\pi_1$ a v bodě π_2 kolmici ku $r'\,\pi_2$, jest jejich průsečík v bodem kružnice k_2 protilehlým diametrálně ku r'. Bod n' jest v kružnici k_1' bodem ku r' diametrálně protilehlým, pročež přímka $v\,n'$ protíná kružnici k_1 podruhé v ohnisku F.

Konstrukce bodu F jest tu přímo patrná, jsou-li P_1', P_2' reálné, není však již tak jednoduchá, jsou-li body P_1', P_2' imaginární, ale i nyní ji snadno provedeme.



Obr. 2.

[1]) V příčině této konstrukce viz na př. pojednání: „Betrachtungen zur Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen", Věstník kr. čes. spol. nauk, Praha 1907.

Veďme v kružnici k_1 průměr kolmý ku p' a stanovme na k_1 bod *2*, který jest souměrný vzhledem ku průměru právě řečenému k průsečíku *1* křivky k_1 s kolmicí ku a_0' bodem r' vedenou, což možno graficky vždy přesně provésti. Dále stanovme pól $\overline{P}$ přímky p' ku k_1, protněme k_1 kteroukoli přímkou bodem $\overline{P}$ vedenou, spojme průsečíky s bodem r', protněme spojnice přímkou a_0 v bodech *3*, *4* a stanovme poláru i bodu r' ke kružnici $\varkappa$, která jest opsána nad průměrem *3 4*. Přímka i protíná r' *2* v bodě ν, takže $\nu n'$ protíná kružnici k_1 v hledaném ohnisku F. Není ovšem třeba kružnici $\varkappa$ teprve sestrojovati, nýbrž možno poláru i sestrojiti lineárně na základě sečen r' *3*, r' *4*.

Místo abychom vedli bodem $\overline{P}$ libovolnou sečnu křivky k_1, můžeme, nevypadne-li tím grafické zobrazení nepříznivě, vésti s výhodou bodem r' rovnoběžku ku a_0' a spojiti bod, v němž protíná podruhé křivku k_1, s bodem $\overline{P}$, spojiti dále druhý průsečík této spojnice s křivkou k_1 s bodem r' přímkou, která nechť protíná a_0' v bodě *3**; přímka l, vedená bodem ku *3** vzhledem ku r' souměrným kolmo ku a_0', protíná r' *2* rovněž v bodě ν; při tom jest přímka l souměrně položena k r' 1 vzhledem k bodu 3*.

Tato kolmice l jest polárou bodu r' ke kružnici $\varkappa$, která degeneruje v nekonečně vzdálenou přímku roviny M a v kolmici ku a_0'.

Na důkaz naší konstrukce bodu F uveďme toto. Veďme bodem $\overline{P}$ libovolnou přímku λ a promítněme její průsečíky s křivkou k_1 z bodu r' na a_0' do *3*, *4*. Kružnice (*3*), (*4*), které dotýkají se a_0' v bodech *3*, *4* a procházejí bodem r', stanoví svazek kružnic, k němuž náleží též k_2, neboť body π_1, π_2 leží harmonicky k bodům *3*, *4*. Za λ možno výhodně voliti průměr křivky k_1 kolmý ku p'. V tomto případě dotýkají se kružnice (*3*), (*4*) v bodě r' a přímka r' *2*, harmonická ku r' *1* vzhledem ku spojnicím bodu r' s koncovými body průměru v k_1 kolmého ku p', jest jejich střednou. Musí se tedy též k_2 dotýkati obou kružnic v bodě r' a tudíž jest r' *2* průměrem jejím. Kružnice k_2 prochází nyní bodem r' a protíná orthogonálně kružnice $\varkappa$, následkem toho jde bodem inversním ku r' vzhledem ku $\varkappa$, tedy průsečíkem přímky, která spojuje r' se středem kružnice $\varkappa$, s polárou i bodu r' ku $\varkappa$; a ježto střed kružnice k_2 leží na r' *2*, leží průsečík ν přímky i s přímkou r' *2* na k_2, čímž jest prokázána správnost naší konstrukce.

Jest-li F stanoveno, nutno vésti přímku b_0' tak, aby svírala s přímkou $F B'$ týž úhel téhož smyslu, jako svírá a_0' s přímkou $F A'$.

5. Zobecněme naše úvahy v určitém směru tím, že si vytkneme úlohu:

Dán jest válec Z a dvě křivky (*A*), (*B*); *přímka p pohybuje se tak, že dotýká se stále válce a protíná obě křivky, při čemž nechť jsou A, B její průsečíky s nimi*; *jest stanoviti křivku* (*C*), *kterou popisuje bod C přímky p, je-li pro každou polohu této přímky* $BC = \lambda . AB$ *při konstantní hodnotě* λ.

Půjde (obr. 3.) o tečnu c, střed křivosti K_γ a oskulační rovinu C křivky (*C*) v bodě *C*, jsou-li dány tečny a, b, středy křivosti K_α, K_β a oskulační roviny A, B křivek (*A*), (*B*) v bodech *A* a *B*.

Promítejme opět rovnoběžně do roviny M kolmé ku Z a volme obdobné označení jako v předchozí úloze. Normály v bodech A', B', C' ku (A'), (B'), (C') nechť protínají normálu $Z'\,\xi$ ku (Z') v bodech A_ν, B_ν, C_ν. Jak známo jest $B_\nu C_\nu = \lambda \,.\, A_\nu B_\nu$, z kteréhož vztahu možno normálu ku (C') v bodě C' stanoviti, jsou-li a', b', tedy také normály $A'\,A_\nu$, $B'\,B_\nu$ ku (A'), (B') známy.

Dále veďme bodem ξ opět rovnoběžku g ku p', spojme Z' se středem křivosti α křivky (A') v bodě A' přímkou, která protne rovnoběžku q_α ku p' bodem A_ν vedenou v bodě α_0, veďme pak bodem α_0 rovnoběžku ku $Z'\,\xi$ až protne $A'\,A_\nu$ v bodě α^* a sestrojme konečně kolmici ku $A'\,A_\nu$ bodem α^* až ku průsečíku P_α s přímkou g. Pohybuje-li se nyní trojúhelník $A'\,Z'\,A_\nu$ tak, že bod A' resp. Z' popisuje křivku (A') resp. (Z') a úhel při Z' zůstává stále pravý, popisuje A_ν křivku (A_ν), jejíž normálou v A_ν jest, jak známo,[1]) přímka $A_\nu\,P_\alpha$. Obdobně určeme bod P_β analogický ku P_α jakož i normálu $B_\nu P_\beta$ ke křivce (B_ν) popsané bodem B_ν při obdobném pohybu trojúhelníka $B'\,Z'\,B_\nu$. Sestrojíme-li nyní na g bod P_γ tak, že $(P_\alpha P_\beta P_\gamma) = (A_\nu B_\nu C_\nu) = (A\,B\,C)$, jest $C_\nu P_\gamma$ normálou ke křivce (C_ν), kterou popisuje bod C_ν při pohybu trojúhelníka $C'\,Z'\,C_\nu$ uvedeným způsobem.

Z toho obdržíme střed křivosti γ křivky (C') v bodě C' tím, že bodem P_γ spustíme kolmici na $C'\,C_\nu$, její patou γ^* vedeme rovnoběžku ku $Z'\,\xi$ až ku průsečíku γ_0 s rovnoběžkou q_γ bodem C_γ ku p' vedenou a pak spojíme γ_0 se Z'. Spojnice protíná $C'\,C_\nu$ v žádaném bodě γ.

Pro všecky hodnoty λ obdržíme jednoduché nekonečné množství křivek (C') a máme takto možnost sestrojiti střed křivosti každé z nich pro bod C' ležící na p'. Body γ^* popisují při tom křivku (γ^*), jejímuž vytvoření věnujme bližší pozornost.

Řady bodové $A'\,B'\,C'\,\ldots$, $P_\alpha\,P_\beta\,P_\gamma\,\ldots$ jsou podobně položeny, protínají se tudíž přímky $A'\,P_\alpha$, $B'\,P_\beta$. $C'\,P_\gamma$, . . v jejich bodu podobnosti ω. Přímky $P_\alpha\,\alpha^*$, $P_\beta\,\beta^*$, $P_\gamma\,\gamma^*$, . . . obalují parabolu h_1, která jest podobně položena k parabole h obalené tečnami a', b', c', . . . pro bod ω jako střed podobnosti. Nekonečně vzdálená řada bodová, která jest určena tečnami $P_\alpha\,\alpha^*$, $P_\beta\,\beta^*$, $P_\gamma\,\gamma^*$, . . . a splývá s nekonečně vzdálenou řadou stanovenou přímkami a', b', c', . . ., jest projektivní s nekonečně vzdálenou řadou určenou normálami $A'\,A_\nu$, $B'\,B_\nu$, $C'\,C_\nu$, . . . Přímky $A'\,A_\nu$, $B'\,B$, $C'\,C_\nu$, . . . obalují parabolu h_2, která dotýká se p' a $Z'\,\xi$ a jest s h konfokální, což již z toho plyne, že isotropické tečny křivky h jako samy k sobě kolmé jsou též tečnami ku h_2. Při tom jest osa a_2 křivky h_2 kolma ku ose a_1 křivky h_1.

Paraboly h_1, h_2 jsou svými tečnami navzájem projektivně přiřazeny. Odpovídají si při tom tečny navzájem kolmé a nekonečně vzdálená přímka

[1]) A. Mannheim, tamtéž str. 37.

jako společná tečna obou parabol odpovídá sama sobě. Průsečíky příslušných k sobě tečen popisují křivku (γ^*), jež jest tedy 3. řádu.

Vytkněme ze křivek (C') onu, která má v bodě C' pro uvažovanou polohu bod inflexní. Pro takový bod leží γ nekonečně daleko na $C'C_\nu$ a tudíž leží příslušný bod γ^* symmetricky ku C' vzhledem ku C_ν. Stanovíme-li vzhledem ke každému bodu C_ν přímky $Z'\zeta$ souměrný bod ku příslušnému bodu C', leží tyto body na tečně u křivky h_2, jejíž dotyčný bod U jest souměrný k průsečíku $2 \equiv u \,.\, p'$ dle průsečíka 3 přímek u, $Z'\zeta$.

Přímka u protíná (γ^*) ve třech bodech. Jeden z nich plyne jako průsečík tečny u křivky h_2 s příslušnou tečnou křivky h_1; obdržíme jej, promítneme-li průsečík $u \,.\, p'$ z bodu ω na g a odtud spustíme kolmici na u. Pata γ_0^* této kolmice náleží křivce (γ^*). Bod ten přísluší v souvislosti naší konstrukce k bodu γ oné křivky (C'), která prochází bodem $u \,.\, p'$ a přímku u má normálou.

Další dva průsečíky γ_1^*, γ_2^* křivky (γ^*) s u mají tu vlastnost, že v nich protínají se dvě tečny m_2, n_2 paraboly h_2, které jsou různy od u, s příslušnými dvěma tečnami křivky h_1, tak že pro křivky (C_m'), (C_n') popsané body $C_m' = m_2 \,.\, p'$, $C_n' = n_2 \,.\, p'$ jsou tyto body inflexními. Obdržíme tedy na p' dva takové body, což se shoduje s tím, že oskulační roviny A, B, C, ... křivek (A), (B) jakož i všech křivek (C), které odpovídají různým hodnotám λ, pro body přímky p obalují prostorovou parabolu p^3 a tudíž směrem ku M promítacím procházejí kromě nekonečně vzdálené roviny ještě dvě oskulační roviny křivky p^3. Existují tedy dvě oskulační roviny křivky p^3, jež jsou promítacími do roviny M, a jsou to právě roviny odpovídající křivkám (C_m), (C_n) pro body C_m, C_n na p.

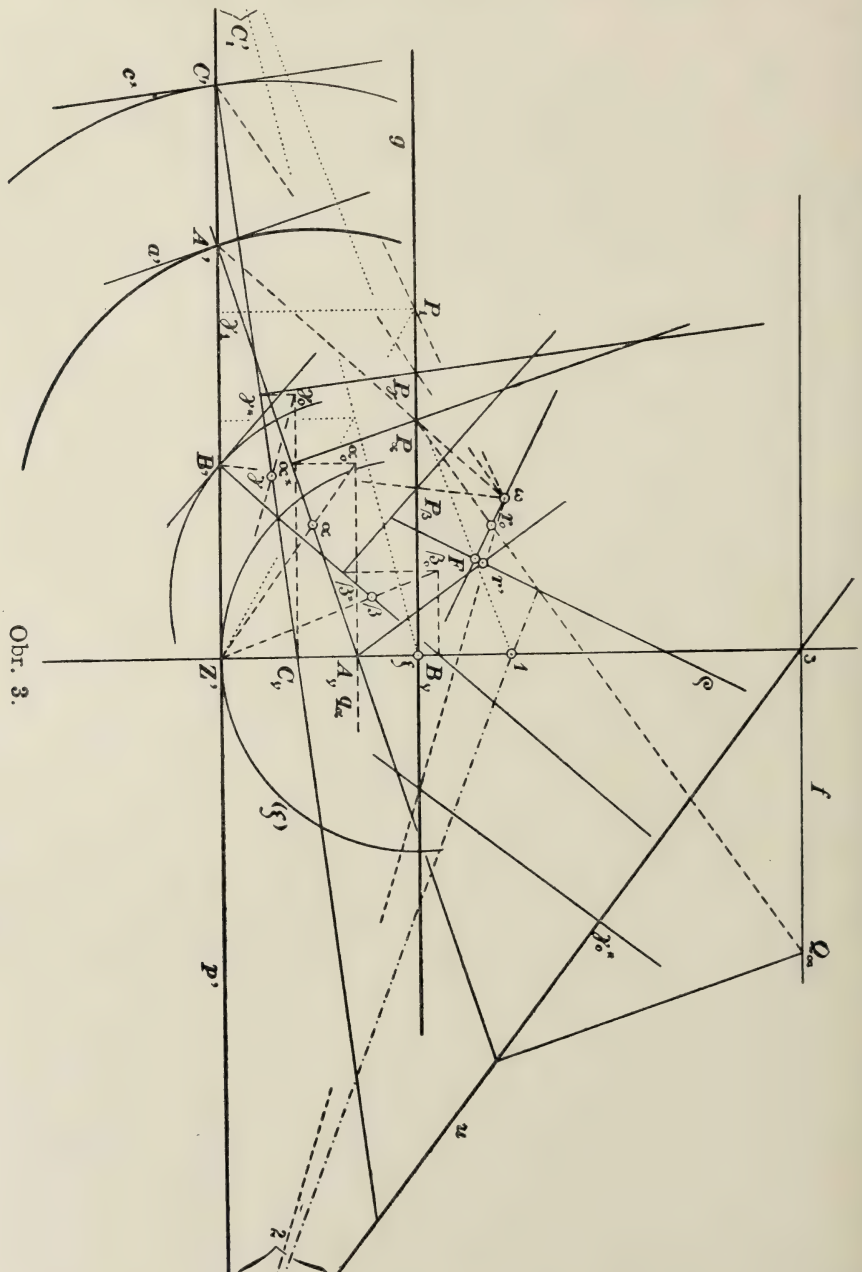
Vztyčíme-li ke každé tečně křivky h_2 v průsečíku s u kolmici, obalují tyto kolmice další parabolu h_3, konfokální ku h_2 a mající osu kolmou k ose křivky h_2, tedy rovnoběžnou k ose křivky h_1. Paraboly h_1, h_3 jsou tedy podobně položeny. Budiž r_0 jejich střed podobnosti. Obdržíme jej krátce jako bod podobnosti dvou trojúhelníků opsaných parabolám h_1, h_3, jejichž strany jsou po dvou rovnoběžny. Paraboly h_1, h_3 mají tedy obecně společnými dvě v konečnu ležící tečny t_1, t_2, které protínají u v bodech γ_1^*, γ_2^*. Neboť v těchto bodech protínají se skutečně dvě k sobě příslušné, tedy navzájem kolmé tečny křivek h_1, h_2.

Vztyčíme-li v γ_1^* kolmici ku t_1 a v γ_2^* ku t_2, jsou tyto kolmice normálami ke křivkám (C_m'), (C_n') v jejich inflexních bodech C_m', C_n'; průsečík těchto kolmic budiž r', kdežto s' budiž obrazem promítací přímky s, ve které se protínají oskulační roviny C_m, C_n příslušné bodům C_m, C_n křivky p^3.

Paraboly h_2, h_3 uvedeme tím, že přiřadíme navzájem ony jejich tečny, které se protínají na u, ve vztah kollineární. Touto kollineací dána jest též kollineace rovinných polí E_2, E_3 ležících v rovině M a přiřazených parabolám h_2, h_3. Vedeme-li libovolným bodem R_2 roviny M tečny ku h_2 a vztyčíme k nim kolmice v jejich průsečících s přímkou u, obdržíme dvě tečny křivky h_3, které protínají se v bodě R_3 pole E_3 kollineárním

k bodu R_2. Jest známo, jak provedeme tuto konstrukci leží-li bod R_2 uvnitř h_2, avšak není toho třeba užiti.

Ve zmíněné kollineaci odpovídají tečny vedené společným ohniskem F parabol h_2, h_3 ke křivkám těm samy sobě a rovněž nekonečně vzdálená



Obr. 3.

tečna jest samodružná. Jsou tudíž bod F a oba absolutní kruhové body J_1, J_2 roviny M dvojnými body kollineace.

Bodové řady na nekonečně vzdálené přímce odpovídající si kollineárně tvoří involuci, jež má J_1, J_2 body dvojnými, neboť přísluší si vždy nekonečně vzdálené body dvou navzájem kolmých tečen křivek h_2, h_3. Proto tvoří paprsky kolem bodu F, jež si v naší kollineaci odpovídají, pravoúhlou involuci. Paprsku $F r_0$ odpovídá tedy kollineárně kolmice σ vztyčená k němu v bodě F; na této bude tedy ležeti bod r'. Protínají-li se nyní dvě tečny s_3, t_3 křivky h_3 v bodě H_3, protínají se kolmice s_2, t_2 vztyčené k nim v jejich průsečících s přímkou u, jež dotýkají se paraboly h_2, v bodě H_2 a úhel $H_3 F H_2$ jest pravý. Paprskové svazky kolem H_2, H_3, jež si kollineárně přísluší, jsou projektivní a jsou tři dvojice odpovídajících si paprsků navzájem kolmy, totiž s_2, s_3; t_2, t_3; $H_2 F$, $H_3 F$. Jsou tedy každé dva příslušné jejich paprsky navzájem kolmy, tedy též $H_2 r'$, $H_3 r_0$, čímž jest určeno $H_2 r'$ a tedy také r' samo. Bod s' pak obdržíme jakožto příslušný bodu r_0 v podobnosti mezi h_1 a h.

Přímky p, s jsou osami paraboly p^3; protínají tedy oskulační roviny křivky p^3 přímky p, s v projektivních řadách. A ježto nekonečně vzdálená rovina jest též oskulační ku p^3, jsou tyto řady podobné. Je-li tedy $A_0 = \mathrm{A} \,.\, s$, $B_0 = \mathrm{B} \,.\, s$, sestrojíme C_0 tím, že $(A_0 B_0 C_0) = (A\, B\, C)$; pak jde rovina C bodem C_0, čímž jest stanovena.

6. Shrneme-li získané výsledky, dospějeme k následující konstrukci.

Poloha p pohyblivé přímky určuje se soumeznou polohou p_1 infinitesimální plošný proužek, pro který známe tečné roviny $p\,a$, $p\,b$ v bodech A, B a tečnou rovinu v bodě Z, jež jest promítací rovinou. Z projektivnosti mezi řadou bodů na p a svazkem tečných rovin přímkou p sestrojíme tečnou rovinu $\overline{\mathrm{C}}$ v bodě C. Dále stanovíme bod C_ν na základě vztahu $(A_\nu B_\nu C_\nu) = (A\, B\, C)$; vedeme tedy k parabole h_2 stanovené tečnami p', $Z'\xi$, $A' A_\nu$, $B' B_\nu$ tečnu $C' C_\nu$. Kolmice c' v bodě C' ku $C' C_\nu$ jest průmětem tečny c, která, ležíc v rovině $\overline{\mathrm{C}}$, jest tím určena. Dále určíme ze středů křivosti K_α, K_β křivek (A), (B) středy křivosti α, β křivek (A'), (B') a z bodů α, β pak body P_α, P_β na rovnoběžce g ku p', vedené bodem ξ, a sestrojíme bod podobnosti ω řad $A' B' \ldots P_\alpha, P_\beta \ldots$, na základě něhož stanovíme ku C' příslušný bod P_γ a z tohoto střed křivosti γ křivky (C'). Pak sestrojíme tečnu u křivky h_2.

Dotyčný bod *1* přímky $Z'\xi$ s křivkou h_2 jest středem úsečky omezené body Z', *3*. Značí-li U dotyčný bod přímky u s h_2, jest $3\,U = 2\,3$. Je-li C_1' bod souměrný ku *2* dle Z', jest C_1' dotyčný bod přímky p' s h_2 a pata F kolmice z bodu Z' na $C_1'\,1$ jest ohniskem křivky h_2, tedy též křivky h_3. Tečny a', b', c', ... obalují parabolu konfokální ku h_2 a podobně položenou ku h_1; tudíž leží ohnisko křivky h_1 na přímce $F\,\omega$. Přímka *1 2* dává směr osy křivky h_2.

Abychom stanovili bod podobnosti r_0 parabol h_3, h_1, pokračujme na př. tak, že bodem *3* vedeme rovnoběžku f ku g, na kteréž vytnou tečny křivky h_3 řadu podobně položenou k řadě $P_\alpha P_\beta P_\gamma$ dle bodu podobnosti r_0.

Tak protíná kolmice ku $A' A_\nu$ vedená průsečíkem přímek $A' A_\nu$, u přímku f v bodě Q_α, jehož spojnice s P_α prochází bodem r_0. Ježto přímka $F\,\omega$ obsahuje také ohnisko křivky h_1, jest paprskem podobnosti pro křivky h_3, h_1 podobně položené; tudíž obsahuje také bod r_0. Jest tedy r_0 průsečíkem přímek $Q_\alpha P_\alpha$, $F\,\omega$. Tím jest též bod s' stanoven. Bod r' leží na kolmici ϱ v bodě F ku $F\,r_0$ vztyčené. Zvolíme-li Q_α za bod označený dříve H_3, splývá H_2 s bodem A_ν. Prochází tedy kolmice z bodu A_ν na $Q_\alpha P_\alpha$ bodem r', čímž jest bod r' dán jako průsečík této kolmice s ϱ. Konečně jest $C = C_0\,c$.

Pro bod, jehož obrazem jest C_1', má příslušná křivka (C') přímku p normálou. Přímka $C_1'\,\omega$ nechť protíná g v bodě P_1; pak jest pata kolmice z P_1 na p' spuštěné příslušným bodem γ^*, označme jej γ_1, odkud plyne pak příslušný střed křivosti jednoduchým mezním přechodem z konstrukce užité pro γ. Protneme g nebo kteroukoli rovnoběžku ku p' přímkami $P_1\gamma_1$ a $Z'\,\xi$, spojíme první průsečík se Z', druhý s C_1', načež obě spojnice protnou se v bodě, jehož orthogonální projekce na p' jest žádaným středem křivosti.

7. Jiný konstruktivní postup v obou dosud řešených úlohách spočívá v tom, že stanovíme ku plochám, jež vznikají pohybem přímky p, oskulační plochu 2. řádu H podél p a pak sestrojíme oskulační roviny v bodech B resp. C pro průsečnou křivku plochy H s promítacím válcem, který oskuluje (B') resp. (C') v bodech B' resp. C'. Také tento postup vede při obou úlohách jednoduše k cíli, jak ihned seznáme.

V případě prvé úlohy (obr. 4.) jest H paraboloidem, který má M rovinou řídící a můžeme zde na př.:

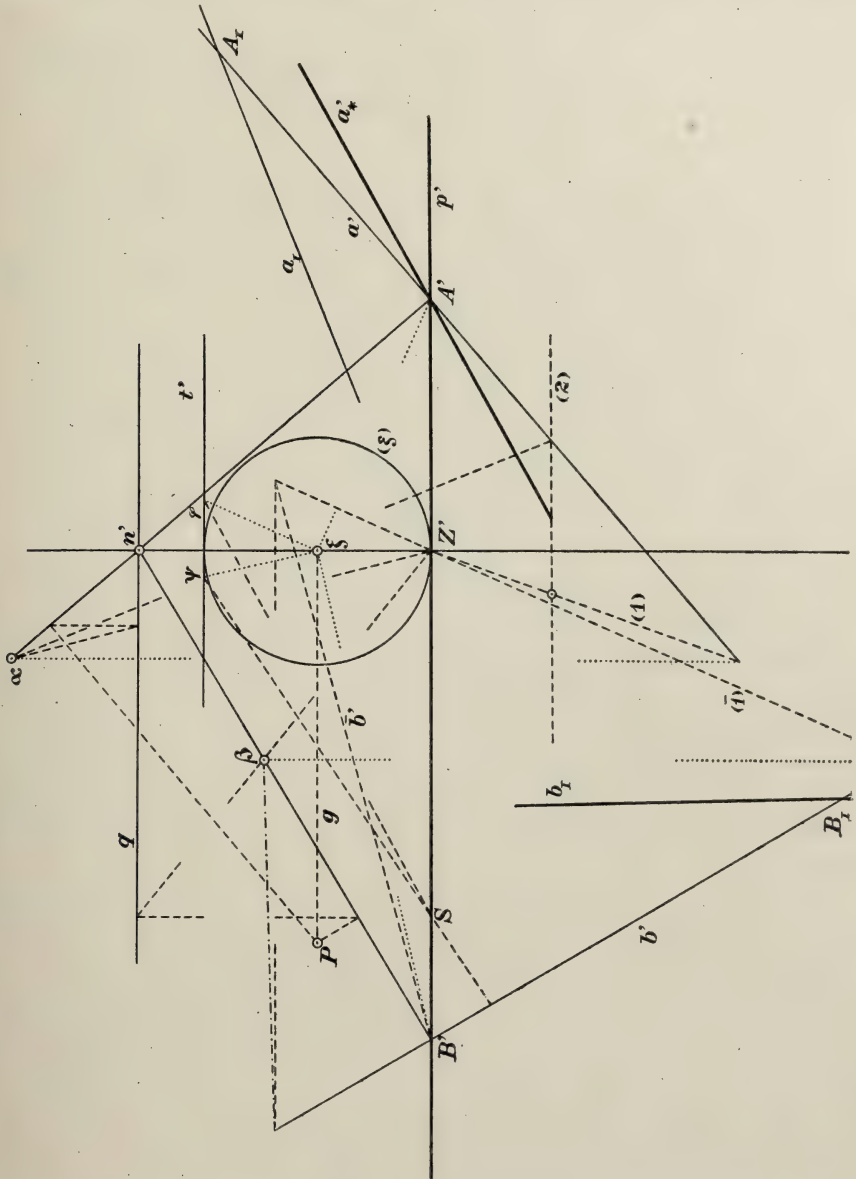
1. Vésti bodem α kolmici na p' a spojiti její průsečík s a' s bodem Z' přímkou (1).

2. Z bodu α spustiti kolmici na stopu a_1 roviny A a jejím průsečíkem s a' vésti rovnoběžku (2) ku p'; pak jest průsečík přímek (1), (2) průmětem bodu na přímce $\bar{a}$ sdružené vzhledem ku H k přímce a; přímka $\bar{u}$ jest tím určena, ležíc ve známé tečné rovině $\bar{A}$ plochy H v bodě A.

Přímka a_* harmonická ku p dle a, $\bar{a}$ náleží paraboloidu H.[1]) Jeden bod přímky a'_* obdržíme zde jednoduše na přímce (2) jako půlící bod úsečky vyťaté přímkami a', (1). Budiž (ξ) oskulační kružnice křivky (Z') v bodě Z', nebo kterákoli z kuželoseček oskulujících křivku tu v bodě Z'. Obrysová křivka průmětu plochy H jest parabola (π), která oskuluje (ξ) v bodě Z', dotýká se a'_*, a tudíž dostatečně určena jest. Položíme dále bodem B' druhou možnou tečnu b'_* ku parabole (π) užitím centrické kollineace, která panuje mezi (ξ), (π) a jejíž osou jest p'. Tečna t' ku (ξ) rovnoběžná ku p' a tečna téže křivky jdoucí bodem A' protínají se v bodě φ, jemuž jest centricky kollineárně přiřazen nekonečně vzdálený bod přímky a'_*.

[1]) Odůvodnění příslušných konstrukcí zde provedených obsaženo jest v pojednání: „Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide windschiefer Flächen," ve Věstníku kr. České Spol. nauk r. 1893 (čís. XIV.).

Rovnoběžka ku a'_* prvým z těchto bodů protíná tedy p' ve středu kollineace S. Tečna bodem B' ku (ξ) protíná t' v bodě ψ, jemuž centricky kollineárně odpovídá nekonečně vzdálený bod přímky b'_*. Tudíž jest b'_* rovnoběžka bodem B' ke spojnici bodů S, ψ. Pro sestrojení bodů φ, ψ



Obr. 4.

bylo použito té vlastnosti, že délky tečen kružnice, které jsou mezi dvěmi rovnoběžnými tečnami obsaženy, se promítají ze středu kružnice pravými úhly.

Přímka $\bar{b}$ harmonická ku b vzhledem ku p a b_* jest sdružena ku b vzhledem ku H. Místo abychom tedy sestrojili přímku b'_* samu, stanovme

na kterékoli rovnoběžce ku $S\psi$, nebo na této přímce samé, bod souměrný k jejímu průsečíku s přímkou b' dle jejího průsečíka s p'. Tento souměrný bod náleží již přímce $\bar{b}'$.

Proveďme nyní konstrukci, provedenou dříve pro A, pro bod B v jiném pořadu. Spustíme tedy s bodu β kolmici na p' a stanovíme její průsečík s b', jejž spojíme se Z' přímkou $(\bar{1})$. Tato přímka protne $\bar{b}'$ v bodě, jímž vedeme rovnoběžku ku p' až ku průsečíku s b', který spojíme s β. Pak jest stopa roviny B do roviny M kolma ku této spojnici, čímž jest B dáno.

Redukuje-li se válec Z na přímku z, zůstává konstrukce pro β, $\bar{a}$, a_* nezměněna; přímka z náleží sama paraboloidu H a druhá řídící rovina tohoto splývá s promítací rovinou přímky a_*. Ježto jest tedy $b_*' \parallel a_*'$, jest pouze třeba stanoviti k průsečíku $b' \,.\, a'_*$ bod souměrný dle A' a spojiti tento bod s bodem B'. Spojnice jest již přímkou $\bar{b}'$.

V případě druhé úlohy, sestrojme analogicky přímky a_*, b_* plochy H, která jest zde obecně hyperboloidem. Pak veďme body B', C' tečny ku (ξ) a spojme jejich průsečík s bodem $a'_* \,.\, b'_*$; spojnice protíná p' ve středu S centrické kollineace, kterou přechází (ξ) v obrysovou kuželosečku (π) průmětu plochy H; tato kollineace má p' osou. V ní odpovídá tečně křivky (ξ), bodem C' jdoucí, tečna c'_* ku (π), jdoucí rovněž bodem C'. Po té stanovme v důsledku konstrukce dříve použité paprsek $\bar{c}'$ harmonický ku c' dle p', c'_*, spustme s bodu γ kolmici na p' a spojme její průsečík s přímkou c' a bod Z' přímkou (1), načež spojme bod, v němž (1) protíná $\bar{c}'$, s bodem A' resp. B' přímkou (2). Dále protněme přímku (2) přímkou c' a veďme ku přímce, která spojuje tento průsečík s bodem γ, kolmici bodem C'. Tato kolmice protíná stopu tečné roviny $p\,a$, resp. $p\,b$ na rovině M v bodě K. Tento bod a přímka c určují konečně rovinu $C = (K\,c)$. Nahradíme-li válec Z přímkou z, náleží tato hyperboloidu H a přímky a'_*, b'_*, c'_* tvoří tedy svazek, čímž se naše konstrukce poněkud zjednoduší.

8. Konstrukce v předchozím vyvozené, které se vztahují k úloze vytčené v čl. 1., pozbývají významu, leží-li střed křivosti α na p'. V tomto případě splývá Z' s pólem n' okamžitého pohybu. Na přímce p' jest tu (obr. 5.) řada bodů A', B', C', ... projektivní s řadou příslušných středů křivosti α, β, γ, ..., při čemž v bodě Z' splývají dvojné body těchto řad, čímž konstrukce bodů β, ... příslušných bodům B', ... jest dána, známe-li k jednomu z nich A' příslušný bod α. Centrální body V', μ, které odpovídají v této projektivnosti nekonečně vzdálenému bodu U_∞ přímky p', jsou navzájem souměrny vzhledem ku Z'. Z projektivity plyne

$$(A'\,V'\,Z'\,U_\infty) = (\alpha\,U_\infty\,Z'\,\mu) = (Z'\,\mu\,\alpha\,U_\infty).$$

Jest tedy

$$(A'\,V'\,Z') = (Z'\,\mu\,\alpha) \quad \text{čili} \quad A'\,Z' : V'\,Z' = Z'\,\alpha : \mu\,\alpha,$$

a ježto

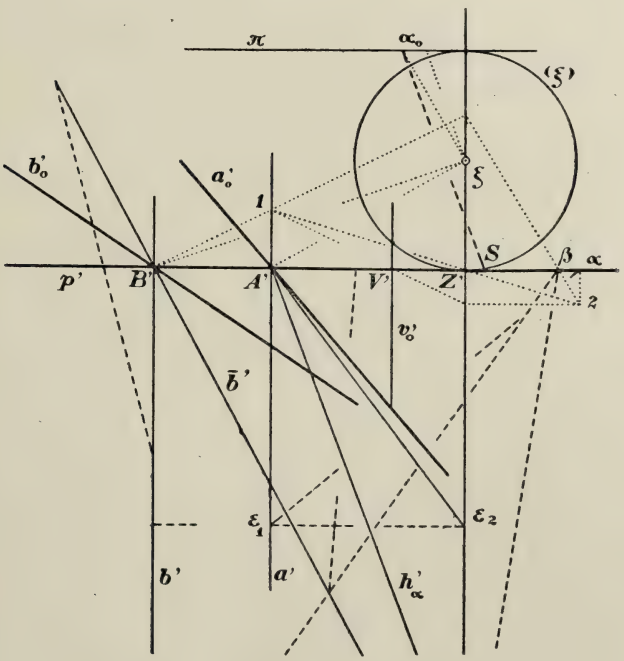
$$\mu\,\alpha = \mu\,Z' + Z'\,\alpha = Z'\,V' + Z'\,\alpha,$$

máme úměru

$$A'\,Z' : V'\,Z' = Z'\,\alpha : (Z'\,V' + Z'\,\alpha),$$

ze které plyne

$$\frac{1}{Z'\,\alpha} - \frac{1}{Z'\,A'} = \frac{1}{V'\,Z'},$$



Obr. 5.

nebo též

$$\frac{\alpha\,A'}{Z'\,\alpha.\,Z'\,A'} = \frac{1}{V'\,Z'}. \qquad (1)$$

Pro kterékoli dvě dvojice bodů $A'\,\beta$, $B'\,\alpha$ máme tedy vztah

$$\frac{1}{Z'\,A'} + \frac{1}{Z'\,\beta} = \frac{1}{Z'\,B'} + \frac{1}{Z'\,\alpha}. \qquad (2)$$

Tvoří tedy dvojice $A'\,\beta$, $B'\,\alpha$ involuci, jejímž jedním dvojným bodem jest Z'.

Obdržíme tudíž z daných bodů A', α bod β příslušný bodu B' na základě konstrukce involuce na př. tak, že vedeme body A', α, Z' tři

přímky protínající se v jednom bodě I, který jsme zde zvolili v nekonečnu ve směru kolmém ku p', a dále vedeme libovolnou přímku bodem Z'. Protíná-li tato přímka $A'I$ v bodě *1*, αI v bodě *2* a spojíme-li dále průsečík přímek $B'1$, $Z'I$ s bodem 2, protíná tato spojnice p' v bodě β. Táž konstrukce dává také bod V'; jest třeba pouze vésti bodem *2* rovnoběžku ku p' až ku průsečíku se $Z'I$, který spojíme s bodem 1, načež tato spojnice protíná p' v bodě V'. Bod V' můžeme z bodů A', α sestrojiti také takto (obr. 6.). Sestrojíme kružnici nad průměrem $A'\alpha$ a kružnici poloměru $A'Z'$ o středu A'; chordála v_0' obou kružnic stanoví na p' bod V'.

Konstrukci oskulačních rovin B, C, . . . převedeme (obr. 5.) na určení průmětů b_0', c_0', . . . jejich hlavních přímek vzhledem k rovině M, protínající p, známe-li obdobnou přímku a_0' roviny A.

Přímky a_0, b_0, c_0, . . . obalují opět parabolu w, o jejíž konstrukci nám nyní půjde. Jest jasno, že kolmice v_0' v bodě V' dotýká se této paraboly; jest totiž V' inflexním bodem průmětu (V') trajektorie bodu V.

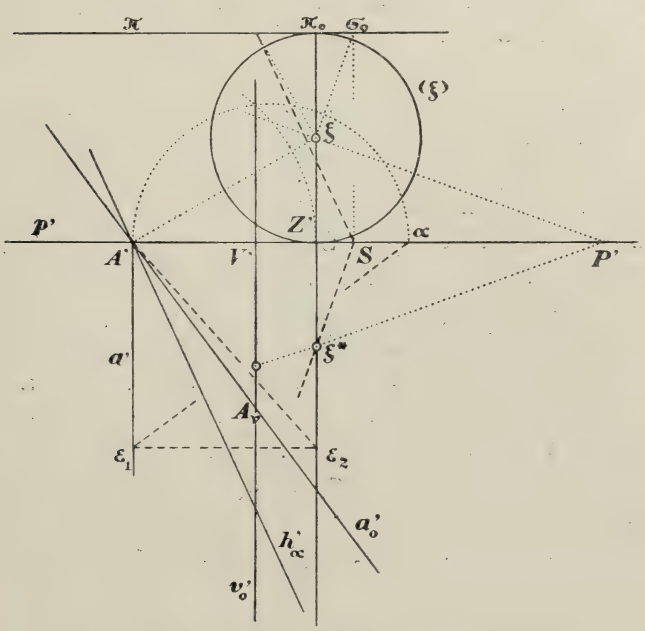
Užijme nyní hyperbolického paraboloidu H, který oskuluje podél p plochu pohybem přímky p vzniklou. Obrysová parabola (p) jejího průmětu oskuluje (ξ) v bodě Z'; jsou tedy (p), (ξ) navzájem centricky kollineární pro p' jako osu kollineace. Abychom obdrželi střed kollineace S, stanovme nejprve přímku h_α plochy H, bodem A jdoucí a od p různou, konstrukcí dříve užitou. Přímka a' kolmá zde ku p' nechť protíná kolmici ku a_0' bodem α v bodě ε_1 a přímka $Z'\xi$ nechť protíná rovnoběžku ku p' jdoucí bodem ε_1 v bodě ε_2; pak jest $A'\varepsilon_2$ průmětem poláry přímky a ku ploše H, čímž jest určen též průmět h_α', na př. tím, že protíná $Z'\xi$ v bodě souměrném ku Z' dle bodu ε_2. Nyní víme, že v kollineaci mezi (ξ) a (p) odpovídá tečně π ku (ξ) rovnoběžné ku p' tečna nekonečně vzdálená ku (p). Následkem toho odpovídá průsečíku α_0 přímky π s tečnou ku (ξ) jdoucí bodem A' a různou od p' bod nekonečně vzdálený na h_α'. Rovnoběžka ku h_α' bodem α_0 protíná tedy p' v bodě S.

Pro kterýkoli bod B přímky p obdržíme druhou přímku h_β plochy H jdoucí bodem tím, vedeme-li rovnoběžku ku přímce, která spojuje bod S a průsečík přímky π s tečnou ku (ξ) jdoucí bodem B'; tato rovnoběžka jest již průmětem h_β' přímky h_β. Vedeme-li průsečíkem přímky $Z'\xi$ s přímkou, harmonickou ku b' dle p', h_β', rovnoběžku ku p', jest jejím průsečíkem s b' bod, ku jehož spojnici s bodem β jest hledaná přímka b_0' kolma, čímž jest určena. V našem obrazci, místo abychom sestrojili přímku h_β' samu, stanovili jsme opět přímku $\bar{b}'$ harmonickou ku b' vzhledem ku p' a h_β'. Ježto zde body odpovídající pro B' bodům ε_1, ε_2 nejsou přístupny, spojili jsme střed úsečky, ležící na $\varepsilon_1\varepsilon_2$ a vyňaté přímkou b' a spojnicí průsečíka $Z'\xi$. $\bar{b}'$ s bodem β, se středem úsečky $B'\beta$; spojnice protíná $\bar{b}'$, jak snadno poznáváme, v bodě analogickém ku bodu průsečnému přímek $A'\varepsilon_2$, $\alpha\varepsilon_1$; ke spojnici takto obdrženého bodu s bodem β stojí tudíž přímka b_0' kolmo.

Místo tohoto postupu, můžeme však vésti prostě (obr. 6.) rovnoběžku k $Z'\,\xi$ bodem S až ku průsečíku σ_0 s π, spojiti σ_0 s bodem ξ a ke spojnici sestrojiti kolmici v bodě ξ, která protne přímku p' v jejím dotyčném bodě P' s křivkou w'. Neboť užijeme-li na bod P' postupu vytčeného právě pro bod B', seznáme, že příslušná přímka p_0' splývá s p'. Nyní jest parabola w' tečnou p' s jejím dotyčným bodem P' a tečnami v_0', a_0' dostatečně určena a můžeme třeba užitím Brianchonova šestihranu sestrojiti každou další její tečnu b_0', c_0',. . .

Vyjadřme ještě (obr. 5. a 6.) délku $Z'\,S$. Je-li (ξ) kružnice křivosti křivky (Z') v bodě Z', ϱ její poloměr a φ úhel sevřený přímkami $Z'\,A'$, a_0', jejž béřeme ve smyslu otočení o pravý úhel paprsku $Z'\,A'$ do $Z'\,\xi$, jest $A'\,\varepsilon_1 = -\alpha\,A'\,cot\,\varphi$; jest tedy

$$tg\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,A' = \frac{\varepsilon_1\,A'}{\varepsilon_2\,\varepsilon_1} = \frac{\alpha\,A'\,cot\,\varphi}{Z'\,A'}\,;$$



Obr. 6.

uzavírá-li nyní h_α' se $Z'\,A'$ v témž smyslu úhel ω, jest

$$tg\,\omega = 2\,\frac{\alpha\,A'}{Z'\,A'}\,cot\,\varphi\,.$$

Značí-li α_0' patu kolmice z α_0 na p', jest také $tg\,\omega = \frac{2\,\varrho}{S\,\alpha_0'}$, při čemž jest $S\,\alpha_0' = Z'\,\alpha_0' - Z'\,S$;

obdržíme tedy vztah

$$\frac{\alpha A'}{Z' A'} \cot \varphi = \frac{\varrho}{Z' \alpha_0' - Z' S},$$

z něhož konečně plyne, použijeme-li relace $\alpha A' . V' A' = Z' A'^2$ též z (1) přímo plynoucí, že

$$Z' S = \frac{\varrho}{Z' A'} (\varrho - V' A' \operatorname{tg} \varphi), \tag{3}$$

odkud, padne-li A' do nekonečna, obdržíme

$$Z' S = - \varrho \operatorname{tg} \varphi_0, \tag{4}$$

při čemž φ_0 značí φ úhel odpovídající této specielné poloze. Vzdaluje-li se však stále bod A' od bodu Z', blíží se směr tečny a_0' stále směru osy naší paraboly. Jest tedy φ_0 úhel, který svírá osa paraboly w' s přímkou p'. Je-li tudíž ξ^* bod souměrný ku ξ dle Z', dává přímka $S \xi^*$ směr vrcholové tečny a přímka vedená bodem V' ku $S \xi^*$ rovnoběžně jest řídící přímkou křivky w'.

Tento výsledek plynoucí z (3) dává též přímo naše konstrukce užitím mezního přechodu z konstrukce pro bod A' ležící v konečnu. Směr přímky h_α' přechází (obr. 6.), vzdálí-li se A' do nekonečna, ve směr $S \pi_0$, kde π_0 jest dotyčný bod přímky π s kružnicí (ξ). Směr sdružený ku H ke směru a', jenž jest dán spojnicí $A' \varepsilon_2$, přechází ve směr $S \xi$. Ježto přímka antiparallelní ku $A' \varepsilon_2$ dle p' vedená bodem Z' určuje s přímkou a' bod ε_1, přechází ε_1 do směru přímky antiparallelní ku $S \xi$ dle p', čímž opět seznáváme, že směr osy jest kolmý ku $S \xi^*$. Je-li totiž λ průsečík tečny vedené bodem A' ku (ξ) s přímkou π, σ_0 pata kolmice s bodu S na π a τ průsečík přímky π s rovnoběžkou ku $A' \varepsilon_2$ vedenou bodem S, plyne z kollineace mezi (p), (ξ), že $\tau \lambda = \lambda \sigma_0$. Přejde-li nyní A' do nekonečna, přejde λ do π_0 a τ do bodu souměrného ku σ_0 dle π_0, a následkem toho přejde $S \tau$ v přímku $S \xi$.

Vzájemná poloha bodů P', S plyne, položíme li v (3) P' místo A' a $\varphi = 0$. Jest

$$Z' S = \frac{\varrho^2}{Z' P'} \quad \text{nebo} \quad Z' P' . Z' S = \varrho^2 . \tag{5}$$

Protínají li se a_0', v_0' v bodě A_ν, jest

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_\nu V'}{V' A'},$$

takže vzorec (3) dává

$$Z' S = \frac{\varrho}{Z' A'} (\varrho - A_\nu V') .$$

Posuneme-li (obr. 7.) vektor $V' A_\nu$ rovnoběžně do ξM_α, jest

$$\varrho - A_\nu V' = Z' \xi - M_\alpha \xi = Z' M_\alpha$$

a z poslední rovnice plyne úměra

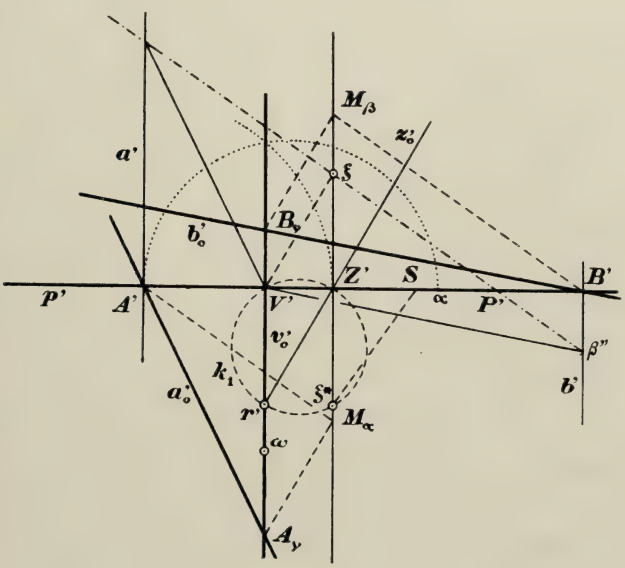
$$Z' M_\alpha : Z' A' = Z' S : Z' \xi ,$$

odkud plyne, že kolmice, kterou spustíme s bodu ξ^* na $A' M_\alpha$, protíná přímku p' v bodě S.

Pro kterékoli dva body A', B' na p' a příslušné hodnoty φ_α, φ_β úhlu φ, které svírají přímky a_0', b_0' se $Z' A'$ resp. $Z' B'$, platí tedy relace

$$Z' M_\beta : Z' B' = Z' M_\alpha : Z' A'.$$

V trojúhelníku $A' M_\alpha \xi^*$, jest tedy S průsečíkem výšek; proto obdržíme S také jako průsečík přímky p' s kolmicí spuštěnou s M_α na $A' \xi^*$.



Obr. 7.

Protíná-li jiná tečna křivky w', na př. b_0', tečnu v_0' v bodě B_ν a přeneseme-li opět vektor $V' B_\nu$ do ξM_β, jest rovněž přímka $S \xi^*$ kolma ku $B' M_\beta$, tedy přímka $B' M_\beta$ rovnoběžna ku $A' M_\alpha$, čímž možno M_β sestrojiti. Nebo spustíme na $B' \xi^*$ kolmici s bodu S, která protne $Z' \xi$ rovněž v bodě M_β, a učiníme vektor $V' B_\nu$ roven vektoru ξM_β, jest pak $b_0' = B' B_\nu$. Přímky $A' M_\alpha$, $B' M_\beta$ mají směr osy křivky w'.

Shrneme-li vše, plyne tato konstrukce křivky w'.

Stanovíme V', v_0' a bod ξ^*, učiníme $\xi M_\alpha = V' A_\nu$ a spustíme s ξ^* kolmici na $A' M_\alpha$ nebo s M_α kolmici na $A' \xi^*$. Tyto kolmice protínají p' v bodě S. Abychom pak obdrželi b_0 vedeme buďto $B' M_\beta \parallel A' M_\alpha$ nebo $S M_\beta \perp B' \xi^*$, čímž získáme na $Z' \xi$ bod M_β; učiníme li konečně $V' B_\nu = \xi M_\beta$, jest $b_0' = B' B_\nu$. Rovnoběžka bodem ξ ku $A' M_\alpha$ protíná tedy p' v bodě P'. Tím jest parabola w' dostatečně určena.

Abychom nemuseli zmíněné vektory přenášeti, veďme $A_\nu M_\alpha \parallel V' \xi$ a $B_\nu M_\beta \parallel V' \xi$. Při nepříznivé vzájemné poloze bodů B_ν a B' možno b_0' též snadno obdržeti užitím Brianchonova šestistranu.

Mimo to jest svazek $a' c' b' \ldots$ perspektivní se svazkem rovnoběžek vedených bodem V' ku $a_0' b_0' c_0' \ldots$ a $P' \xi$ jest osou perspektivity. To dává konečně tuto konstrukci pro w'.

Sestrojíme V', v_0', učiníme $\xi M_\alpha = V' A_\nu$, při čemž $A' M_\alpha$ udává směr osy pro w', a pak vedeme bodem ξ rovnoběžku $P' \xi$ ku $A' M_\alpha$, Abychom nyní obdrželi b_0', nutno pouze protíti b' s $P \xi$ v bodě β'', načež jest $b_0' \parallel V' \beta''$.

Padne-li bod B' do Z', padne průmět b_0' hlavní přímky příslušné oskulační roviny do přímky z_0', která spojuje Z' s patou r' kolmice spuštěné z ξ^* na v_0'. Tím dospíváme k nejjednoduššímu stanovení paraboly w' tečnami p', a_0', v_0' a $Z' r' \parallel V' \xi$.

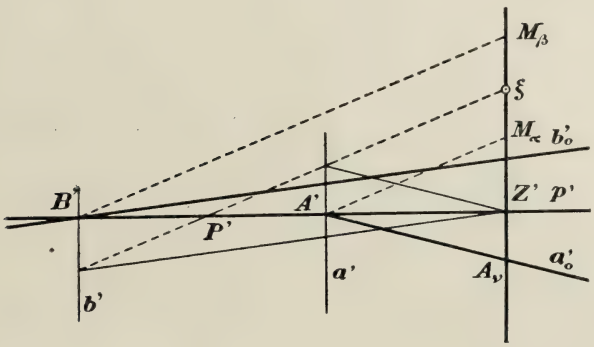
Tento výsledek, který jsme obdrželi řadou konstrukcí užitím plochy H, plyne však přímo z toho, že Bobilierova kružnice, kterou jsme značili k_1, prochází bodem n' a bodem souměrným ku ξ dle n', kterýžto bod splývá zde se ξ^*, ježto bod Z' splývá s n'. Tato kružnice prochází také bodem V', ježto trajektorie (V') má v bodě V' bod inflexní. Tudíž jest zde k_1 kružnicí opsanou trojúhelníku $V' Z' \xi^*$, procházejíc tedy také bodem r', diametrálně protilehlým bodu $n' \equiv Z'$. Jest tedy r' mezní polohou průmětu průsečnice r dvou oskulačních rovin paraboly p^3 promítacích ku M. To jest skutečně ve shodě s naším výsledkem, který jsme obdrželi užitím plochy H. Neboť v případě, kdy B splývá se Z, jest přímka b také promítací; jest tedy oskulační rovina bodu Z jakož i bodu V promítací a obě protínají se v přímce promítající se do bodu, jejž jsme též nyní označili r'.

9. Dotýká-li se specielně přímka p' křivky pólové v okamžitém pólu pohybu, mají všecky trajektorie (A'), (B'), ... bodů A', B' ... pro tuto zvláštní polohu přímky p' svoje středy křivosti v tomto pólu, v němž také přímka p' se dotýká své obálky. Zde jest tedy $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = Z'$ a také body V', μ splývají se Z'.

Určení paraboly w' jest zde zvláště jednoduché. Protneme-li a_0' se $Z' \xi$ v bodě A_ν a učiníme-li (obr. 8.) vektor ξM_α roven vektoru $Z' A_\nu$, má opět $A' M_\alpha$ směr osy křivky w'. Rovnoběžka k $A' M_\alpha$ bodem ξ protíná p' v dotyčném bodě P' s w'. Stanovíme-li průsečík přímek b', $P' \xi$, jest přímka b_0' rovnoběžna ke spojnici jeho se Z'.

V tomto případě obdržíme z rovnice (3)

$$Z'S = \frac{\varrho^2}{Z'A'} - \varrho\, tg\, \varphi\,. \tag{6}$$



Obr. 8.

Značí-li Φ úhel, který svírá b_0 s p', plyne odtud relace

$$\frac{\varrho}{Z'A'} - tg\, \varphi = \frac{\varrho}{Z'B'} - tg\, \Phi\,,$$

z níž dále obdržíme

$$tg\, \Phi = tg\, \varphi + \frac{\varrho.\, B'A'}{Z'A'.\, Z'B'}\,.$$

Je-li $\overline{A}$ průsečík přímek $B'\xi$, a', jest

$$A'\overline{A} = \varrho\, \frac{A'B'}{Z'B'}$$

a značí-li ω úhel $A'Z'\overline{A}$, jest

$$tg\, \omega = \frac{\varrho.\, A'B'}{Z'A'.\, Z'B'}\,.$$

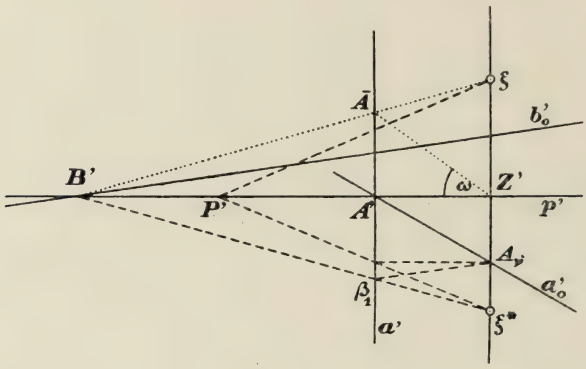
Tím obdržíme zde jednoduchý vztah

$$tg\, \Phi = tg\, \varphi - tg\, \omega\,.$$

Protínají-li se tedy (obr. 9.) přímky $B'\xi^*$, a' v bodě β_1, jest přímka b_0' rovnoběžna ku $A_\nu\, \beta_1$.

Spojnice bodu ξ^* s patou kolmice s A_ν na a' protíná p' v dotyčném bodě P' s w'. Přímka $\xi P'$ dává pak směr osy křivky w'. Snadno seznáme, že ξ^* jest dotyčným bodem přímky $Z'\xi$ s w'. Neboť zde splývají oskulační promítací roviny $V\,r$, $Z\,r$ a splývají body r', ξ^*, při čemž kružnice k_1

má úsečku $Z'\,\xi^*$ za průměr, kdežto v případě předcházejícím (obr. 7.) dotýká se v_0' paraboly w' v průsečíku ω s přímkou $P'\xi^*$. Parabola w' jest tudíž zde tečnami a_0', p', $Z'\,\xi$ a dotyčným bodem ξ^* tečny $Z'\,\xi$, v případě předcházejícím pak tečnami a_0', p', $V'\,r'$, $Z'\,r'$ nejjednodušeji určena.



Obr. 9.

10. Jednoduchou applikaci našich konstrukcí skytá úloha:

Rotační ploše opsati jest rozvinutelnou plochu P.

Budiž řídící kužel K plochy P dán a stanoviti jest styčnou křivku c rozvinutelné této plochy s danou rotační plochou R; a naopak je-li na R dána křivka c, jde o řídící kužel rozvinutelné plochy P opsané ploše R dle křivky c.

Zaveďme orthogonální projekci na dvě roviny navzájem kolmé, při čemž prvá z nich budiž kolma k ose rotace o a druhá tedy rovnoběžna k ose té.

Bodové určení křivky c při daném K plyne jednoduše tím, že sestrojíme ku K normální kužel L, jehož vrchol O_λ volíme libovolně na o. Jsou tedy povrchové přímky kužele L kolmé k tečným rovinám kužele K a naopak. Pro L vyjadřme řez l s libovolnou rovinou N k ose o prvou projekcí l'. Abychom určili body křivky c na parallelní kružnici k plochy R, vyhledejme průsečík O normál ku R v bodech kružnice k s osou o. Jedna z těchto normál, na př. v bodě H křivky k dá se z určovacích částí plochy R přímo sestrojiti. K této normále $O\,H$ veďme rovnoběžku bodem O_λ, kterou protneme s rovinou N v bodě H_ω. Budiž k_1' prvý průmět kružnice, která vzniká rotací získaného takto bodu H_ω kolem o. Protínají-li se k_1', l' v bodech M_1', N_1', ... určíme na přímkách O_λ', M_1', $O_\lambda'\,N_1'$, ... příslušné průsečíky M', N', .. s k', a to tak, že leží s body M_1', N_1', ... na téže straně nebo na různých stranách bodu O_λ' dle toho, zdali mají $O\,H$, $O\,H_\omega$ směr týž nebo různý. Body M, N, ... na k náleží křivce c.

Je-li naopak dána křivka c, veďme v libovolném jejím bodě M normálu ku R a spustme k ní normálnou rovinu nějakým pevným bodem; popisuje-li M křivku c, obaluje tato rovina kužel K.

Budiž nyní specielně plocha R plochou 2. stupně.

Zvolíme na ní opět parallelní kružnici k a stanovíme známým způpobem vrchol O normálového kužele plochy R dle k, zvolíme dále bod O současně za střed normálního kužele L a protneme tento kužel rovinou N kružnice k v křivce l. Tato křivka jest centrálním průmětem z bodu O na rovinu N pro dotykovou křivku d koule G, jež se dotýká plochy R dle křivky k s onou opsanou rozvinutelnou plochou P_*, která má rovněž kužel K kuželem řídícím. Budiž E pól roviny N vzhledem ku ploše R. Posuneme kužel K rovnoběžně do E, až jeho vrchol padne do E, a protneme jej v této poloze rovinou N v křivce l_*; pak jest l křivkou polárně reciprokou ku l_* vzhledem ku k. Ale také centrální projekce do roviny N dotykové křivky c plochy R s rozvinutelnou plochou P téhož řídícího kužele E, ze středu S plochy 2. stupně R jest polárně reciproká s křivkou l_* dle k,[1]) takže splývá s l.

Odtud plyne tato konstrukce křivky c.

Určíme střed O normálového kužele plochy R pro libovolnou parallelní kružnici k, sestrojíme normální kužel L_ω ku K tak, že má střed v bodě O a protneme L_ω rovinou N křivky k v křivce l; pak jest c průsečnou křivkou plochy R s kuželem L, který opírá se o l a má střed S plochy R vrcholem.

Naopak, je-li křivka c dána a máme sestrojiti K, stanovíme nejprve střed O normálového kužele plochy R podél libovolné parallelní kružnice k, promítneme c ze středu S na rovinu N křivky k do křivky l; pak jest kužel L_ω, který má vrchol v O a opírá se o l, normálním kuželem ku K, takže tento jest tím rovněž dán.

Tečna t křivky styčné c v libovolném jejím bodě M plyne jako průsečnice tečné roviny T_ϱ plochy R v bodě M a tečné roviny T_λ kužele L dle $S\,M$. Bod M jest zde průsečíkem křivek k, l; při tom jest přímka $O\,M$ kolma k rovině, která se dotýká kužele K podél určité hrany j. Tečna t_λ ku l v bodě M jest tudíž kolma ku j' a T_λ jest rovinou jdoucí S a t_λ.

Oskulační rovinu křivky c v bodě M možno obdržeti takto.

Předpokládejme, že můžeme sestrojiti kružnici křivosti průsečné křivky u kužele K s rovinou N kolmou k ose rotace o, případně, že kružnice ty jsou přímo dány. Sestrojíme nejprve soustředný normálný kužel L_* ku K; budiž K_0 orthogonální průmět, do roviny N, společného středu K. Ježto nyní známe střed křivosti křivky u v průsečíku J s hranou $K\,J$ můžeme snadno stanoviti hlavní vrcholovou kružnici kuželosečky, která oskuluje u v J a má bod K_0 ohniskem. Kružnice inversní k této vzhledem ke K_0 jako středu a $-\overline{K\,K_0}^2$ jako potenci inverse jest příslušnou kružnicí

[1]) Cf. Věstník kr. České Spol. náuk 1893 č. II.

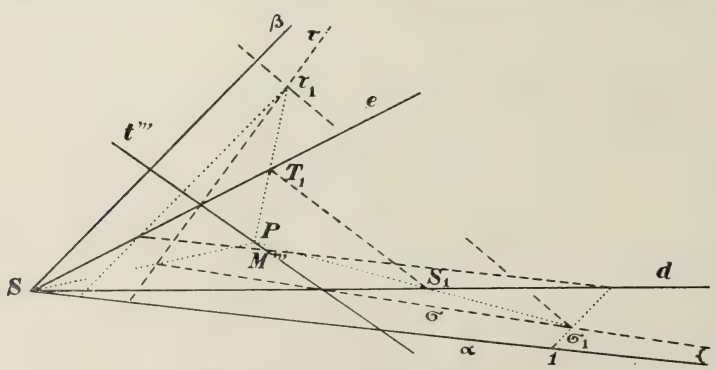
křivosti křivky, v níž protíná L_* rovinu N. Podobná poloha ploch L_*, L dává pak kružnici křivosti l_μ křivky l v bodě M.

Oskulační rovina C křivky c v bodě M jest též oskulační rovinou v bodě tom k průsečné křivce plochy R s kuželem L_μ, jenž má vrchol v bodě S a opírá se o křivku l_μ. Přímky dvojnásobně sdružené bodům na t, t. j. průsečnice polárních rovin těchto bodů k plochám R, L_μ, tvoří kužel 2. stupně, jehož tečná rovina podél t jest hledanou oskulační rovinou C. Tento kužel obsahuje přímky $S\,M$, t a rovnoběžku j_μ bodem M ku $K\,J$. Jest třeba tedy ještě zvoliti dva body G, H na t a stanoviti přímky g, h dvojnásobně k nim sdružené. Přímka $S\,G$ protíná N v bodě, na jehož spojnici se středem křivky l_μ vztyčíme v rovině N bodem M kolmici g_μ; pak jest $S\,g_\mu$ polární rovinou bodu G ku L_μ. Polární rovina bodu G k ploše R prochází přímkou j_μ a jest kolma k rovině $G\,o$, přímka g pak jest průsečnicí obou polárních rovin. Rovněž tak najdeme h a můžeme pak rovinu C lineárně sestrojiti. Tato rovina protíná plochu R v určité kuželosečce. Protneme-li rovinu N normálou z bodu O ku C a spojíme průsečík s bodem S přímkou, protne tato spojnice rovinu C ve středu kuželosečky právě zmíněné. Tím můžeme jednoduše sestrojiti nejen střed křivosti této kuželosečky v bodě M, nýbrž též střed křivosti křivky c' v bodě M'.

Je-li specielně K kužel 2. stupně, jest l kuželosečkou, které možno přímo užiti místo kružnice l_μ.

Rovinu C možno obdržeti též na základě této úvahy.

Budiž L_μ střed křivky l_μ. Promítejme (obr. 10.) orthogonálně do roviny $L_\mu\,o$. Průsečná křivka m ploch R, L_μ promítá se do roviny té v hyperbolu m''' o středu S, jejíž jedna asymptota α jest kolma k o, kdežto druhou β najdeme tím, že úsek vyťatý na průmětu t''' přímky t asympto-



Obr. 10.

tami α, β má M''' za bod půlící. Přímky d, e, které spojují S s koncovými body průměru křivky l_μ ležícího v rovině $L_\mu\,o$, jsou zde obrysovými površkami kužele L_μ.

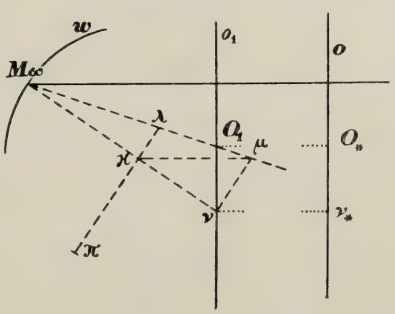
Sestrojme dále kuželosečku b, která oskuluje křivku m''' v bodě M''' a má přímky d, e tečnami. Za tím účelem veďme ku m''' tečny σ, τ, od t''' různé, průsečíky přímky t''' s přímkami d, e. Kolmice z bodu M''' ku o protíná d v bodě, jímž vedeme rovnoběžku k β až protne α v bodě 1; bod souměrný ku S dle 1 náleží tečně σ, jejíž dotyčný bod σ_1 leží na rovnoběžce právě zmíněné, jak se z degenerovaného Brianchonova šestistranu snadno přesvědčíme. Obdobně najdeme tečnu τ a její dotyčný bod τ_1 s křivkou m'''.

Kuželosečka b jest ku m''' centricky kollineární dle osy t''' a dle středu P, jenž jest průsečíkem tečny t''' s přímkou spojující body $\sigma . \tau$ a S. Přímka $P\sigma_1$ protínej d v S_1, přímka $P\tau_1$ protínej e v T_1. Rovina spojující přímky t, $S_1 T_1$ jest hledanou oskulační rovinou C. Vidíme, že stačí sestrojiti jen jeden z bodů S_1, T_1, jenž stanoví s přímkou t rovinu C.

Že konstrukce jest správná, plyne z toho, že m jest průsečnou křivkou válce kolmého ku $L_\mu o$, který se opírá o m''' s plochou R, a že k určení roviny C možno tento válec nahraditi každým válcem, který jej oskuluje podél povrchové přímky jdoucí bodem M, tedy též válcem spočívajícím na b. Tento však má s L_μ společny tečné roviny přímkami d, e jdoucí, protíná tedy L_μ ve dvou kuželosečkách, z nichž jedna oskuluje křivku c v bodě M, takže její rovina splývá s oskulační rovinou C.

11. Je-li dána rotační plocha R svou křivkou meridiánovou a jde-li o to, nalézti pro styčnou křivku c v libovolném bodě M rovinu oskulační a střed křivosti, možno užiti postupu, vytčeného v prve uvedené práci, při čemž však konstrukce zde vyvozené vedou rychleji k cíli.

Budiž (obr. 11.) M jeden bod křivky c plochy rotační R, dané meridiánovou křivkou w a osou o. Parallelní kružnice bodu M nechť protíná křivku w v bodě M_ω. Bodu M_ω příslušný střed křivosti křivky w budiž $\varkappa$ a budiž π střed křivosti v bodě $\varkappa$ evoluty křivky w. Operujme nejprve v rovině křivky w; nanesme na $\pi\varkappa$ délku $\varkappa\lambda = \frac{1}{3}\pi\varkappa$ a protněme přímku $M_\omega\lambda$ kolmicí s bodu $\varkappa$ na o v bodě μ; rovnoběžku o_1 ku o vedenou patou ν kolmice s bodu μ na $M_\omega\varkappa$ možno bráti za osu kuželosečky w_*, která oskuluje w v bodě M_ω a tím jest určena. Tato kuželosečka w_* má v bodě M_ω s křivkou w čtyři soumezné body společny. Při tom jest průsečík O_1 přímek $M_\omega\lambda$, o_1 středem křivky w_*, jak snadno plyne odtud, že osy, tečna a normála v bodě M_ω křivky w_* určují parabolu, která dotýká se normály v bodě $\varkappa$.



Obr. 11.

Označíme-li pro w_* na př. 3 osu o_1, 4 druhou osu, 5 nekonečně vzdálenou přímku roviny, 6 tečnu v bodě M_ω, 1 normálu $M_\omega\nu$, 2 normálu

soumeznou, plyne správnost našeho výroku odtud, že *123456* jest šestistranem Brianchonovým.

Nyní mysleme si kuželosečku w_* posunutou do w_0 kolmo ku o až o_1 splyne s o, při čemž dospěje O_1 do O_* a ν do ν_*. Plocha R_0 vzniklá rotací křivky w_0 kolem o jest 2. stupně, normálný kužel ke K s vrcholem v ν_* protíná rovinu N křivky k v křivce l a řezem plochy R_0 s kuželem majícím střed v O_* a spočívajícím na l jest křivka c_0, na které odpovídá bodu M bod M_0, při čemž spojnice $M M_0$ jest kolma na o, a délka její $M M_0$ jest rovna $O_1 O_*$.

Pohybuje-li se přímka $M M_0$ rovnoběžně ku N tak, že protíná stále o a že bod M_0 popisuje křivku c_0, popisuje bod M, jestliže vzdálenost $M M_0$ se při pohybu nemění, křivku, která má s křivkou c v bodě M společny tečnu, střed křivosti i rovinu oskulační. Tím jest konstrukce těchto prvků převedena v konstrukce úlohy v odst. 1. položené.

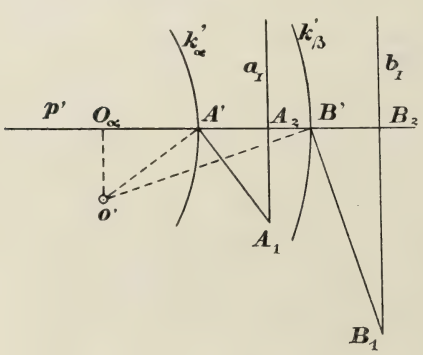
Tím jsme konstrukce týkající se křivky c, jak je pojal Dunesme,[1]) podstatně rozšířili.

Obrácení těchto konstrukcí, chceme-li provésti přechod od c ku K, neskytá obtíží.

12. Další *applikace* našich úvah nechť se týká *ploch šroubových.*

Buďte dány (obr. 12.) dvě plochy A, B, vytvořené týmž pohybem šroubovým, buďte A, B dva jejich body ležící v téže rovině k šroubové ose o kolmé, a buďte tečné roviny T_α, T_β těchto ploch v bodě A resp. B navzájem rovnoběžny.

Promítejme orthogonálně do roviny N_1 vedené rovnoběžně ku N ve vzdálenosti rovné parametru šroubového pohybu. Učiníme-li $A'A_1 \perp o'A'$ a, ve smyslu šroubového pohybu, $A' A_1 = o' A'$; učiníme-li rovněž tak $B' B_1 \perp o' B'$, $B' B_1 = o' B'$, prochází bodem A_1 stopa a_I roviny T_α a bodem B_1 stopa b_I roviny T_β a jest $b_I \parallel a_I$. Kolmice p' bodem A' ku a nechť protíná a_I v bodě A_2 a rovnoběžka ku a_I bodem o' nechť protíná p' v bodě O_α. Pak jest $A' A_2$ délkou průmětu spádové přímky roviny T_α jdoucí bodem A. Mimo to jest $A' A_2 = o' O_\alpha$. Provedeme-li obdobnou konstrukci pro bod B a užijeme obdobných označení, jest na přímce q' rovnoběžné bodem B' ku p' nejprve $B' B_2 = o' O_\beta$ a ježto následkem $T_\beta \parallel T_\alpha$ jsou délky $A' A_2$, $B' B_2$ navzájem rovny, splývá O_β s O_α, tedy q' s p'. Tudíž jest přímka p' kolma v bodě A' ku průmětu normálné křivky k_α plochy A ležící v N a rovněž



Obr. 12.

[1]) Comptes rendus 1857 str. 527 a n.

jest p' normálou v B' k průmětu křivky k_β, rovněž v N ležící, na ploše B.

Z toho vidíme, že konstrukce Dunesmeovy, se zobecněním zpředu uvedeným, platí také pro takové plochy šroubové, jejichž normálními křivkami jsou libovolné dvě křivky rovnoběžné.

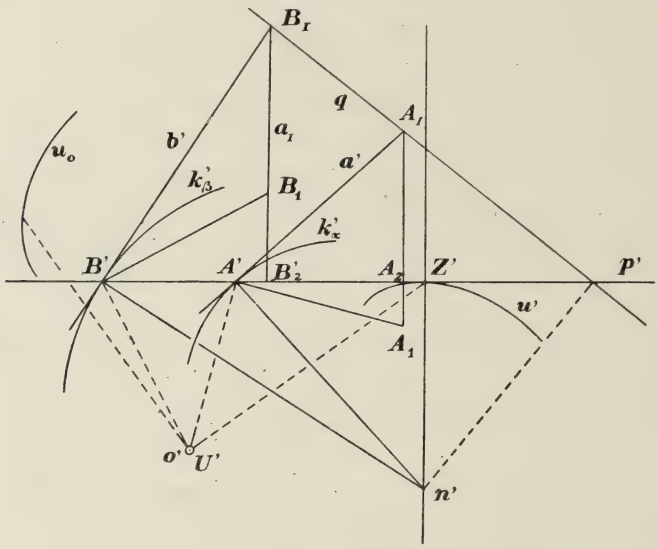
Je-li obecně (obr. 13.) dána nějaká křivka k_α, která koná šroubový pohyb kolem přímky o, vytvořujíc tím plochu A, obalují tečné roviny plochy A v bodech křivky k_α rozvinutelnou plochu K_α. Orthogonální průměty povrchových přímek této plochy do některé normálné roviny N obalují křivku u'. Zvolíme-li na o ve smyslu šroubového pohybu bod U tak, že má od průmětny vzdálenost rovnou parametru pohybu a podrobíme křivku u' kolem o' čtvrtině otočení ve smyslu šroubovému pohybu opačném, čímž nechť dospěje do u_0, jest U vrcholem řídícího kužele plochy K_α spočívajícího na u_0.[1])

Pohybuje-li se nějaká přímka p tak, že jest stále rovnoběžna k průmětně N, dotýká se promítacího válce U křivky u' a protíná křivku k_α, vytkneme-li dále na p úsečku konstantní délky $A\,B$, jež se pohybuje současně na p tak, že bod A popisuje křivku k_α, pak popisuje bod B křivku k_β, kterou nazveme konchoidou křivky k_α vzhledem k promítacímu válci U. Křivka k_β vytvoří vytčeným šroubovým pohybem plochu B. Přímka p nechť dotýká se plochy U v bodě Z; normály v bodech A', B' ke křivkám k_α', k_β' protínají se s normálou v bodě Z' k u' v bodě n'. Pro jinou délku $A\,C$ obdržíme konchoidu k_γ a normála v bodě C' ke křivce k_γ' prochází rovněž bodem n'. Tečny $a, b, c, \ldots$ v bodech $A, B, C, \ldots$ ke křivkám $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma, \ldots$ tvoří hyperbolický paraboloid P, jehož průmět má obrysovou křivkou parabolu (p), jež má n' ohniskem a p' tečnou vrcholovou. Stopa q plochy P na N jest též tečnou ku (p). Na přímce q leží stopy $A_\mathrm{I}, B_\mathrm{I}, \ldots$ přímek $a, b, \ldots$ Stopa tečné roviny T_α plochy A v bodě A spojuje, jako v odstavci předchozím, bod A_1 s bodem A_I. Spádová přímka bodem A jdoucí, která náleží též ploše K_α, měj v bodě A_2 svou stopu. Stopa b_I tečné roviny plochy B v bodě B jest spojnicí bodů B_1, B_I. Je-li B_2 stopou kolmice z B_1 ku p', jest $B'\,B_2 = A'\,A_2$. Jinak jsou orthogonální průměty úseček $A'\,A_\mathrm{I}$, $B'\,B_\mathrm{I}, \ldots$ na vrcholovou tečnu p' paraboly (p), následkem známé vlastnosti paraboly, navzájem rovny. Z toho plyne, že přímka $B_1\,B_\mathrm{I} = b_\mathrm{I}$ jest kolma ku přímce p' protínajíc ji v bodě B_2. Všecky tečné roviny plochy B v bodech křivky k_β obalují tedy rozvinutelnou plochu, která má rovněž za řídící kužel $(U\,u_0)$.

Máme-li nyní sestrojiti k plochám A, B, ... rozvinutelné opsané plochy $L_\alpha, L_\beta, \ldots$, které mají týž kužel řídící, posuneme rovnoběžně tento kužel, aby jeho vrchol přešel do U, a určíme jeho stopu u_0, kterou otočíme o čtvrtinu do u' kolem o' ve smyslu šroubového pohybu (t. j. v tom smyslu,

[1]) Cf. Monatshefte f. Math. u. Physik IV. ročník: „Über developpable Berührungsflächen an windschiefe Helikoide."

v němž otáčí se při pohybu tom každý bod, jestliže bod osy o posune se ve smyslu od N k U). Jsou-li pak $\bar{k}_\alpha$, $\bar{k}_\beta$, $\bar{u}'$ příslušnými polohami křivek k_α, k_β, u', jest každá společná tečna křivek u', $\bar{u}'$ průmětem jedné neb více povrchových přímek na ploše L_α a příslušné neb příslušných jim



Obr. 13.

přímek povrchových na ploše L_β; površka taková na L_α protíná $\bar{k}_\alpha$ v bodě $\bar{A}$, příslušná jí na L_β protíná $\bar{k}_\beta$ v $\bar{B}$, a tečné roviny ploch A, B v bodech $\bar{A}$, resp. $\bar{B}$ jsou rovnoběžny, při čemž $\bar{A}\,\bar{B}$ rovná se $A\,B$. Tudíž jest také dotyková křivka ploch L_β, B konchoidou dotykové křivky ploch L_α, A vzhledem k promítacímu válci křivky u'. Jest tedy možno užiti zde konstrukcí dřívějších.

13. Uvažujme ještě *applikaci* našich výsledků na *plochy troubovité*.

Plocha taková budiž obálkou pohyblivé koule K konstantního poloměru ϱ, jejíž střed S nechť popisuje křivku (S). Sestrojíme zde opět styčnou křivku c opsané rozvinutelné plochy P daného řídícího kužele L.

Stanovme nejprve normálný kužel M ku L. Posuňme kužel M rovnoběžně do M_σ, takže jeho střed padne do S a protněme M_σ s normální rovinou E_σ bodu S ku křivce (S) v přímkách p, q, ...; pak jest na tyto přímky nanésti od bodu S v obojím smyslu úsečky $S\,A_1$, $S\,A_2$; $S\,B_1$, $S\,B_2$, ..., mající délku ϱ, abychom obdrželi body A_1, A_2; B_1, B_2, ... křivky c. Neboť tečné roviny v bodech A_1, ... ku K jsou rovnoběžny k příslušným tečným rovinám kužele L a dotýkají se koule na její karakteristice, obsažené v rovině E_σ.

Pohybuje-li se koule K vytčeným způsobem, vytvoří přímky p, q, ... přímkovou plochu Q, jejíž povrchové přímky mají tu vlastnost, že pro-

tínají danou křivku (S), jsou rovnoběžny k povrchovým přímkám kužele M a dotýkají se polární plochy S křivky (S).

Konstrukce tečny křivky c v libovolném jejím bodě A_1 dá se nyní dosti jednoduše upraviti.

Budiž K_σ střed křivosti křivky (S) v bodě S, budiž s polára bodu S, t. j. kolmice bodem K_σ k oskulační jeho rovině a budiž p_1 přímka soumezná ku p. Pro infinitesimální plošný proužek $(p\ p_1)$ jest tečnou rovinou v bodě S rovina spojující přímku p s tečnou a_σ v bodě S ku (S), tečná rovina v průsečíku přímek p, s jest $(p\ s)$ a asymptotická rovina R jest rovnoběžna k tečné rovině kužele M_σ podél p. Ježto tedy známe tečné roviny ve třech bodech přímky p, můžeme sestrojiti tečné roviny ve všech jejích bodech.

Promítáme-li nyní orthogonálně nebo v jiném směru do takové roviny N, vzhledem ke které jest p spádovou přímkou roviny R, nebo výhodněji ještě do roviny ku R rovnoběžné, a určíme dotyčný bod Z promítací roviny přímky p s proužkem $(p\ p_1)$, můžeme přímo stanoviti průmět t' tečny t křivky c v bodě A_1, neboť normály v A_1' ku c', v S' ku (S') a v Z' ku p' protínají se v jednom bodě. Tím jest dána též přímka t sama.

Mnohem zdlouhavější byla by zde konstrukce oskulační roviny C a kružnice křivosti K_γ křivky c pro bod A_1, ačkoli princip konstrukce jest snadno dán.

Buďte p_0, p, p_1 tři soumezné přímky plochy Q. Jimi určen jest hyperboloid H oskulující plochu Q podél p. Snadno sestrojíme tři přímky druhé soustavy tohoto hyperboloidu. Nejprve přímku g bodem S na základě toho, že H dotýká se podél p proužku $(p\ p_1)$ a oskuluje křivku (S) v bodě S, dále přímku l rovnoběžnou ku p na základě téže okolnosti, že H se dotýká proužku $(p\ p_1)$ a na základě tom, že řídící kužel 2. stupně pro H oskuluje M_σ podél p. Dotýká-li se přímka s polární křivky pro (S) v bodě S_1, jenž jest středem koule křivosti v bodu S pro křivku (S), a je-li S_1 oskulační kužel 2. stupně k polární ploše podél s, obdržíme třetí přímku m druhé soustavy H jako površku onoho hyperboloidu, který dotýká se $(p\ p_1)$ podél p a promítá se z bodu S_1 kuželem S_1.

Dále stanovme osu rotačního kužele, který oskuluje M_σ podél p, a promítejme orthogonálně, nebo v jiném směru, do roviny N kolmé k ose té Pak určíme střed křivosti ξ obrysu průmětu plochy H, načež můžeme stanoviti střed křivosti γ křivky c' v bodě A_1', jakož i oskulační rovinu C, předchozím postupem, odkud možno pak sestrojiti K_γ a střed křivosti průmětu křivky c v průmětu bodu A_1

Grafické provedení těchto konstrukcí jest však značně složité a nutno je zařaditi do oboru konstrukcí Steinerem ústními nazvaných. Jednodušší jest zobrazení jen v případě, kdy P jest opsanou plochou válcovou; neboť tu jest Q konoidem, ježto přímky p, ... leží v rovinách kolmých ke směru válce; c jest zde mezí vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení. Zde zvolíme řídící rovinu N plochy Q průmětnou projekce orthogonální.

14. Uvažujme jako zcela specielní případ určení obrysové křivky c pro šroubovou plochu troubovou A. Předem věnujme pozornost řešení jiné úlohy, jež nám zde bude ku prospěchu, totiž:

Zobraziti jest křivost sinusoidy.

Touto úlohou zabývá se Chr. Wiener ve svém díle: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie.[1]) Vyvodíme zde řešení jiné, obecnější a velmi jednoduché.

Uvažujme (obr. 14.) sinusoidu s' jako orthogonální průmět křivky šroubové s do roviny N rovnoběžné s osou šroubovou o, berouce rovinu tu za prvou průmětnu, kdežto průmětnu druhou M volíme kolmo ku o. Uvažujme dále přímkovou plochu R, jejíž přímky $p, \ldots$ jsou rovnoběžny ku N, protínají křivku šroubovou s a leží v jejích normálních rovinách, tudíž dotýkají se polární plochy křivky s. Přímky $p, \ldots$ zobrazují se tedy v rovině N jako normály křivky s', a obrysová křivka prvního průmětu plochy R jest evolutou sinusoidy s'. Budiž x průsečnice rovin M, N. Druhé průměty $p'', \ldots$ povrchových přímek plochy R tvoří svazek přímek rovnoběžných ku x. Polární křivka t křivky s jest souosá křivka šroubová. Značí-li σ poloměr rotačního válce, na němž s leží, τ poloměr příslušného válce pro t a je-li π parametr šroubového pohybu, jest $\sigma\,\tau = \pi^2$.

Je-li A libovolný bod na s, vedeme-li v rovině $A\,o$ kolmici s A k o, jejíž pata budiž O_α, a určíme bod B_α na $A\,O_\alpha$ tak, že $(A\,B_\alpha\,O_\alpha) = -\frac{\sigma}{\tau}$, jest B_α jak středem kružnice křivosti tak středem koule křivosti křivky s pro bod A.

Sinusoidy s', t' jsou orthogonálně affinní dle osy o'. Proto mají tečny a, b_α ku s, t v bodech A, B_α tu vlastnost, že jejich průměty a', b_α' se protínají na o'; jejich průměty a'', b_α'' jsou navzájem rovnoběžny stojíce kolmo k $A''\,B_\alpha''$. Průsečík $a' \,.\, b_\alpha'$ jest průmětem u' přímky u, pro kterou prochází u'' bodem o'' stojíc kolmo na x.

Přímky a, b_α nechť protínají u v bodech A_μ, B_μ; rovina přímkou u kolmá ku M protínej p v bodě M. Dotyčné body rovin přímkou p jednak kolmo ku N jednak kolmo ku M vedených s proužkem $(p\,p_1)$ buďte K_α, U. Při tom leží U nekonečně daleko na p. Budiž dále B průsečík přímek p, b_α. Protněme nyní tečné roviny proužku $(p\,p_1)$ v bodech A, B, K_α, U přímkou u. Obdržíme průsečíky A_μ, B_μ, K_μ, M, kde K_μ jest v nekonečnu, a jest

$$(A\,B\,K_\alpha\,U) = (A_\mu\,B_\mu\,K_\mu\,M)$$

čili též

$$(A\,B\,K_\alpha\,U) = (B_\mu\,A_\mu\,M\,K_\mu)$$

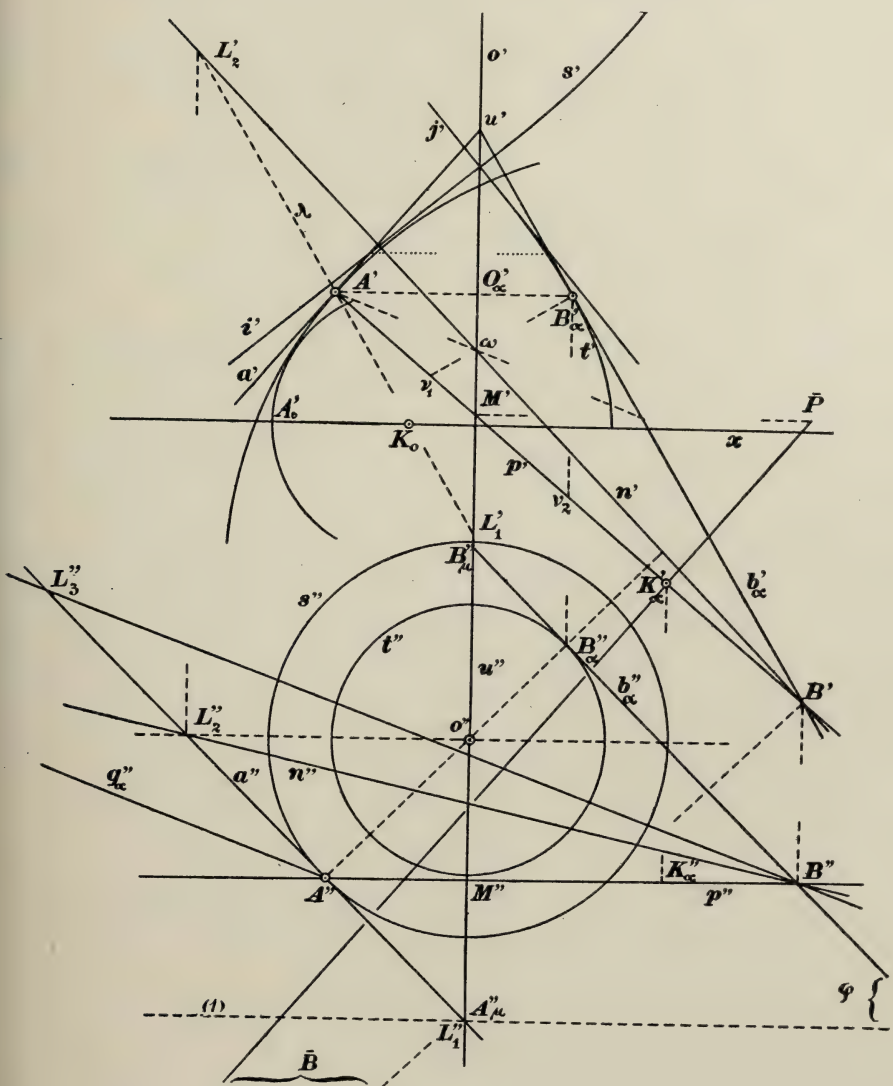
a ježto U, K_μ jsou v nekonečnu, jest

[1]) II. sv. str. 363.

$$(A\ B\ K_\alpha) = (B_\mu\ A_\mu\ M).$$

Jinak jest, se zřetelem k tomu, že $b_\alpha'' \parallel a''$,

$(B_\mu\ A_\mu\ M) = (B\ A\ M)$, takže $(A\ B\ K_\alpha) = (B\ A\ M)$



Obr. 14.

čili

$$A\ K_\alpha : B\ K_\alpha = B\ M : A\ M,$$

z kteréžto úměry plyne

$$A\ K_\alpha : B\ A = B\ M : A\ B, \text{ takže } A\ K_\alpha = M\ B.$$

Protíná-li tedy p' přímku o' v bodě M', jest $M'B' = A'K_\alpha'$. Udává tudíž $M'B'$ velikost a směr poloměru křivosti křivky s' v bodě A'.

Tím přicházíme k této konstrukci středu křivosti K_α' křivky s' v bodě A':

Vztyčíme k inflexní tečně i' křivky s' kolmici j' v jejím dotyčném bodě ležícím na o', vedeme průsečíkem přímek a', i' kolmici k o' až ku průsečíku s j', spojíme tento průsečík s bodem $a' . o'$ přímkou b_α', která protne p' v bodě B'. Konečně učiníme $A'K_\alpha' = M'B'$, značí-li M' bod $p' . o'$.

Splyne-li specielně A' s vrcholem A_0' křivky s', jest přímka p' kolmá k o' a B' splyne s B_α'; K_α' jest zde bod vratu K_0 evoluty e' pro křivku s' a jeho konstrukce zde udaná jest identická s konstrukcí, kterou podává Chr. Wiener. Jest tu $A_0'K_0 = \tau$. Jest jasno, jak provádíme konstrukci bodu K_α', není-li i' přístupné.

Mohli bychom ovšem sestrojiti K_α' též jako střed křivosti ellipsy, ve kterou se promítá střed křivosti šroubové křivky s v bodě A do prvé průmětny; obě konstrukce vedou k témuž výsledku. Neboť kružnice křivosti m křivky s promítá se do roviny N v ellipsu m', pro niž jest B_α' středem. Kolmice s B_α' na prvou stopu oskulační roviny křivky s v bodě A jest vedlejší osou křivky m'; ježto b_α jest kolma k této oskulační rovině, plyne z toho, že zmíněná vedlejší osa splývá s b_α', že tedy normála $B_\alpha'\nu_1$ křivky t' v bodě B_α' jest hlavní osou křivky m'. Pro ellipsu m' známe tedy osy co do polohy, bod A' a příslušnou mu normálu $A'B'$; můžeme tedy sestrojiti její střed křivosti K_α'. Dle známé konstrukce protneme normálu kolmicí v B_α' ku $A'B_\alpha$ v bodě ν_2 a učiníme $B'K_\alpha' = \nu_2\nu_1$. Mají-li se tedy obě uvedené konstrukce shodovati, musí $\nu_2\nu_1 = B'K_\alpha' = M'A'$. Že tomu tak jest, snadno seznáme. Z podobnosti trojúhelníků $\nu_1\nu_2B_\alpha'$, $u'A'B_\alpha'$ plyne úměra

$$\nu_1\nu_2 : \nu_2B_\alpha' = u'A' : A'B_\alpha'$$

a z podobnosti mezi $A'\nu_2B_\alpha'$, $A'M'O_\alpha'$ jakož i mezi $A'M'O_\alpha'$, $u'A'O_\alpha'$ plynou úměry

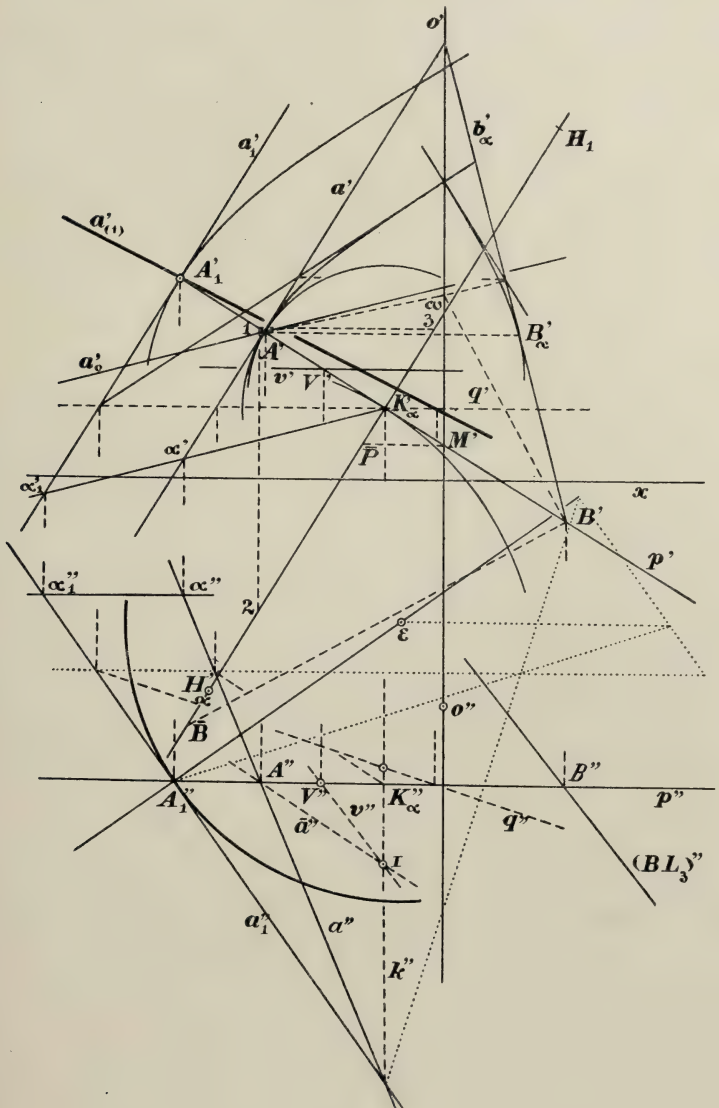
$$\nu_2B_\alpha' : M'O_\alpha' = A'B_\alpha' : A'O_\alpha',$$
$$M'O_\alpha' : A'M' = A'O_\alpha' : u'A'.$$

Násobíme-li tyto tři úměry, obdržíme skutečně, že $\nu_1\nu_2 = A'M'$.

Je-li však sinusoida s' dána na př. analyticky, víme, že její rovnici možno převésti na tvar $y = \sigma\cos\frac{x}{\tau}$, kde konstanty σ, τ mají dřívější význam.

15. Naše úvaha připouští též snadnou konstrukci středu křivosti H_α' křivky e' v bodě K_α'.

Mysleme si (obr. 14. a 15.) za tím účelem stanoven oskulační paraboloid H plochy Q podél přímky p. Předně vidíme, že mění-li přímka p na ploše Q svou polohu, popisuje B'' křivku (B''), kterou vytvoří vrchol B'' trojúhelníka $A''\ B_\alpha''\ B''$, při B_α'' pravoúhlého, jehož jedna odvěsna $A''\ B_\alpha''$



Obr. 15.

otáčí se kolem o'', jehož vrcholy A'', B_α'' popisují kružnice s'' resp. t'' a jehož přepona pohybuje se rovnoběžně k ose x. Jest známo, že křivka (B'') jest orthogonálním průmětem, do roviny M, obrysové křivky otevřené přímkové plochy šroubové vzhledem N, a jest též známo, jak sestrojíme

tečnu n'' ke křivce (B'').[1]) Je-li L_1'' průsečík přímek u'', a'', jejž jsme dříve označili A_μ'', a sestrojíme-li bod L_2'' souměrný k L_1'' dle A'', jest L_2'' B'' tečna n''.

B jest dotyčný bod roviny $p\ b_\alpha$ s $(p\ p_1)$; tudíž jest (B'') druhý průmět dotykové křivky plochy Q s tečnovou plochou křivky šroubové t a L_2'' B'' jest druhým průmětem přímky n sdružené ku b_α dle H. Tato přímka leží v tečné rovině $p\ b_\alpha$ plochy H; obdržíme tudíž n', vedeme-li bodem A' rovnoběžku λ ku b_α' a stanovíme k průsečíku $L_1' = \lambda \,.\, o'$ bod souměrný L_2' dle A'; pak jest $n' = L_2'\, B'$.

Vedeme-li v lichoběžníku $L_1'\, L_2'\, u'\, B'$ úhlopříčny a spojíme jejich průsečík s bodem A', půlí tato spojnice úsečku $B'\, u'$. Možno tudíž n' obdržeti jednoduše takto. Spojíme půlící bod úsečky $B'\, u'$ s bodem A' a protneme spojnici přímkou o' v bodě ω; pak jest n' přímka jdoucí body B', ω.

Kolmice ku $B'\, \omega$ v bodě B' jest normálou v bodě B' ke křivce (B'). Nechť kolmice tato protíná kolmici v K_α' ku p', jež jest tedy normálou v K_α' k evolutě e', v bodě $\overline{B}$. Dále protíná kolmice v bodě M' ku o' tuto normálu v bodě $\overline{P}$. Řada bodová na p' ležící mění svou polohu s přímkou p' tak, že jest stále $A'\, K_\alpha' = M'\, B'$, při čemž popisuje A' křivku s', K_α' evolutu e', M' přímku o', B' křivku (B'). Z toho plyne, že jest $K_\alpha'\, H_\alpha' = \overline{P}\, \overline{B}$. Tím jsme nalezli tedy střed křivosti H_α' evoluty e'.

16. Evoluta e' jest také evolutou obrysové křivky prvého průmětu troubovité plochy šroubové A.

Obraťme se nyní (obr. 15.) ke konstrukci obrysové křivky c plochy A vzhledem k prvé průmětně N. Jest c' křivkou parallelní ku s'. Pro tečnu a_1 křivky c v bodě A_1 známe průmět a_1', který jest kolmý ku p', a ježto tečna a_1 leží v tečné rovině ku $(p\ p_1)$ pro bod A_1, může býti snadno sestrojena.

Hyperbolickému paraboloidu, který jest určen tečnami a, a_1, ... k trajektoriím bodů A, A_1, ..., náleží také přímka k, jdoucí bodem K_α' kolmo ku N, takže přímky druhé soustavy na tomto paraboloidu promítají se do N ve svazek, který má K_α' středem. Nechť protíná libovolná přímka $\alpha\, \alpha_1$ této soustavy přímky a, a_1 v bodech α, α_1. Z α' odvoďme α'', veďme $\alpha''\, \alpha_1''$ rovnoběžně ku p''; neboť jest $\alpha\, \alpha_1 \parallel$ N, ježto N jest řídící rovinou paraboloidu. Mimo to protínají se přímky k'', a'', a_1'' v jednom bodě; neboť, ježto N jest řídící rovinou paraboloidu, leží na něm přímka kolmá ku M, pročež tvoří přímky k'', a'', a_1'' ... svazek. Jest tedy přímka a_1'' tím, že A_1'' spojuje s bodem $a'' \,.\, k''$, dostatečně dána.

Hlavní přímka $a_{(1)}$ vzhledem ku N oskulační roviny křivky c v bodě A_1 sestrojí se dle předchozího. Je-li a_0 bodem A jdoucí hlavní přímka vzhledem ku N pro oskulační rovinu $(a,\ A\ B_\alpha)$ křivky s v bodě A, pro kterou jest tedy $a_0' \perp b_\alpha'$, jest $a_{(1)}'$ bodem A_1' jdoucí a od p' různou tečnou paraboly w',

[1]) Cf. Věstník kr. Č. Spol. nauk 1893, XXII. str. 31.

která se dotýká p', a_0', $H_\alpha' K_\alpha'$, a to poslední přímky v bodě H_1 souměrném ku H_α' dle K_α', čímž jest určena přímka $a_{(1)}$ sama, jakož i oskulační rovina $a_1 a_{(1)}$ křivky c v bodě A_1.

Stanovme onu hlavní přímku q vzhledem k M roviny $a_1 a_{(1)}$, jejíž prvý průmět prochází bodem K_α' rovnoběžně ku x. Přímka q'' a kolmice bodem K_α'' ku p'' jsou dvěma sdruženými průměry ellipsy, která se dotýká a_1'' v bodě A_1''; můžeme tedy sestrojiti známým způsobem její střed křivosti ε v bodě A_1''. Bod ten jest, jak snadno seznáváme, středem křivosti křivky c'' v bode A_1''.

Bod ε obdržíme jednoduše jako dotyčný bod kolmice v bodě A_1'' ku a_1'' s parabolou, která dotýká se mimo to a_1'', kolmice ku q'' bodem $a'' \,.\, k''$ a kolmice ku k'' bodem $a_1'' \,.\, q''$. (Příslušná konstrukce provedena jest v obrazci tečkovaně.)

Poznamenejme ještě toto.

Oskulační paraboloid H plochy Q má rovinu N rovinou řídící. Když na přímce a'' učiníme $A'' L_3'' = 2 L_1'' A''$, jest přímka $B'' L_3''$ průmětem přímky povrchové plochy H, jdoucí bodem B a různé od p (obr. 14. a 15.). Pak jest přímka $B'' L_3''$ harmonická ku p''dle b_α'', n''. Povrchovou přímku q_α plochy H, jdoucí bodem A a od p různou, stanovíme opět tak, že sestrojíme poláru přímky a dle H. Bodem L_1'' dříve nalezeným položme rovnoběžku (1) ku p''. Ježto tečná rovina v bodě B protíná oskulační rovinu křivky s pro bod A v přímce $A O_\alpha$ a ježto kolmice ku $A'' o''$ jest rovnoběžna ku přímce a'', jest třeba protíti přímku (1) rovnoběžkou b_α'' ku a'' bodem B' jdoucí v bodě φ, abychom v $A'' \varphi$ obdrželi průmět žádané poláry.[1]) Jest tedy $A'' \varphi \parallel n''$ a $q_\alpha'' \parallel B'' L_3''$. Z toho plyne, že druhá řídící rovina plochy H jest rovněž orthogonálně promítací do roviny M a osa plochy H jest kolma ku M. Má proto obrysová parabola prvého průmětu plochy H přímku o' za průměr.

Sestrojme dále (obr. 15.) vzhledem k rovině M na př. ony hlavní přímky tečných rovin proužku $(p\, p_1)$, které procházejí jejich body dotyčnými. Tečná rovina v bodě A na křivce s ležícím jest $(p\, a)$; příslušná hlavní přímka budiž $\bar{a}$. Vztyčme v bodě K_α'' kolmici k'' ku p'' a stanovme průsečík I přímky $\bar{a}''$ s touto kolmicí. Z projektivnosti mezi nekonečně vzdálenými body zmíněných hlavních přímek a mezi body dotyčnými plyne, že druhé průměty těchto hlavních přímek protínají se v bodě I. Tudíž jest bodem A_1 jdoucí hlavní přímka $\bar{a}_1$ tečné roviny v bodě A_1 zobrazena přímkou $A_1'' I$.

Rovnoběžka bodem I ku q_α'' nechť protíná p'' v bodě V''. Uvažujme V'' jako průmět bodu V na p; pak jest $V'' I$ průmětem bodem V jdoucí hlavní přímky v roviny tečné ku $(p\, p_1)$, tedy též ku H v bodě V. Tudíž náleží tato hlavní přímka paraboloidu H a jest jednou jeho přímkou

[1]) Poznámka na str. 12.

vrcholovou. Vrcholová tečna obrysové paraboly prvého průmětu plochy H prochází tudíž bodem V' a jest kolma ku o'. Osa g této obrysové paraboly prochází bodem *1* souměrným ku K_a' dle V'. Střed křivosti H_a' možno též sestrojiti známým způsobem jako střed křivosti v bodě K_a' této paraboly, pro kterou známe tečnu p' a osu. Je-li přímka $K_a' H_a'$ protata přímkou g v bodě *2* a rovnoběžkou vedenou bodem *1* ku v' v bodě *3*, jest $K_a' H_a' = 3\,2$.

Ke konstrukci normál bodem mimo kuželosečku.

Podal

vládní rada professor **VINC. JAROLÍMEK.**

(Předloženo dne 15. ledna 1915.)

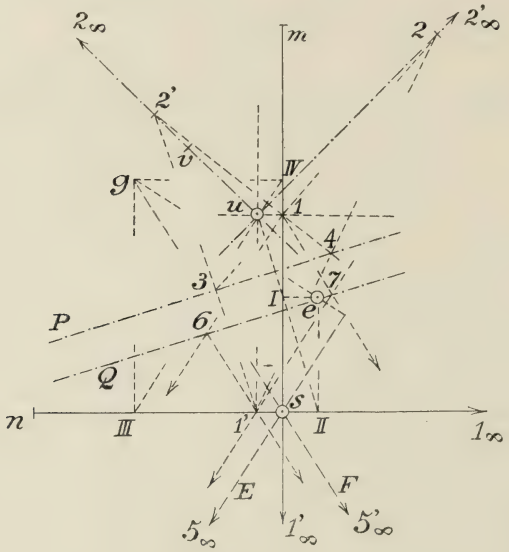
S 2 obrázky do textu vloženými.

Snaha moderních geometrů nese se k tomu, řešiti konstruktivné úlohy 3. a 4. stupně o kuželosečkách jen přímkami a kružnicemi, tedy bez rýsování pomocných kuželoseček nebo křivek vyššího stupně. Možnost tohoto řešení byla ovšem dosud podmíněna předpokladem, že jest narýsována buď jedna daná, anebo aspoň libovolná kuželosečka v téže rovině ležící. Mnohé tyto konstrukce jsou velmi důmyslné, vyhovujíce po stránce theoretické k plné spokojenosti. Kdo však konstrukce tyto skutečně vykonal, přesvědčil se, že dávají výsledky namnoze velmi *nepřesné*, ježto zobrazené křivky, jichž společné body jsou pro výsledek rozhodující, protínají se v úhlech příliš malých. Pro praktickou potřebu jsou pak zajisté vyhodnější pomocné kuželosečky, zejména stačí-li zobrazení jen malých oblouků jejich, je-li zřejmo, do které asi části nákresny žádaný průsečík připadne, a je-li úhel průseku pro přesnost postačující.

K nejpřednějším takovým problémům náležejí osy kužele 2. stupně a normály kuželosečky bodem mimo křivku. Druhým úkolem zabývali se zejména přední geometrové Šolín, Joachimsthal, Pelz, Sobotka.[1]) Joachimsthalova konstrukce jest (po úpravě Pelzově a Sobotkově) poměrně nejjednodušší, ale má tu vadu, že vyžaduje všech *čtyř* průsečíků kružnice, kterou se úloha řeší, s danou kuželosečkou, a že dva až tři z nich bývají nepřesné ano že v těch místech obě křivky bez mála *splývají* v jedno. Z těchto důvodů předkládám tuto řešení svoje, které sice vyžaduje konstrukcí dosti složitých, ale okolnost tato je vyvážena některými přednostmi: methoda je zcela jednoducha, není třeba žádné pomocné kuželosečky, ani daná nemusí být zobrazena, ale stačí kratičký oblouk její (obr. 2.), jelikož netřeba než *jediného* průsečíka kuželosečky s pomocnou kružnicí; veškeré konstrukce jsou dobře známé a výsledky s dostatek *přesné*.

[1]) Pořad chronologický; prof. Sobotka rozšířil methodu Joachimsthalovu a Pelzovu i na hyperbolu a parabolu.

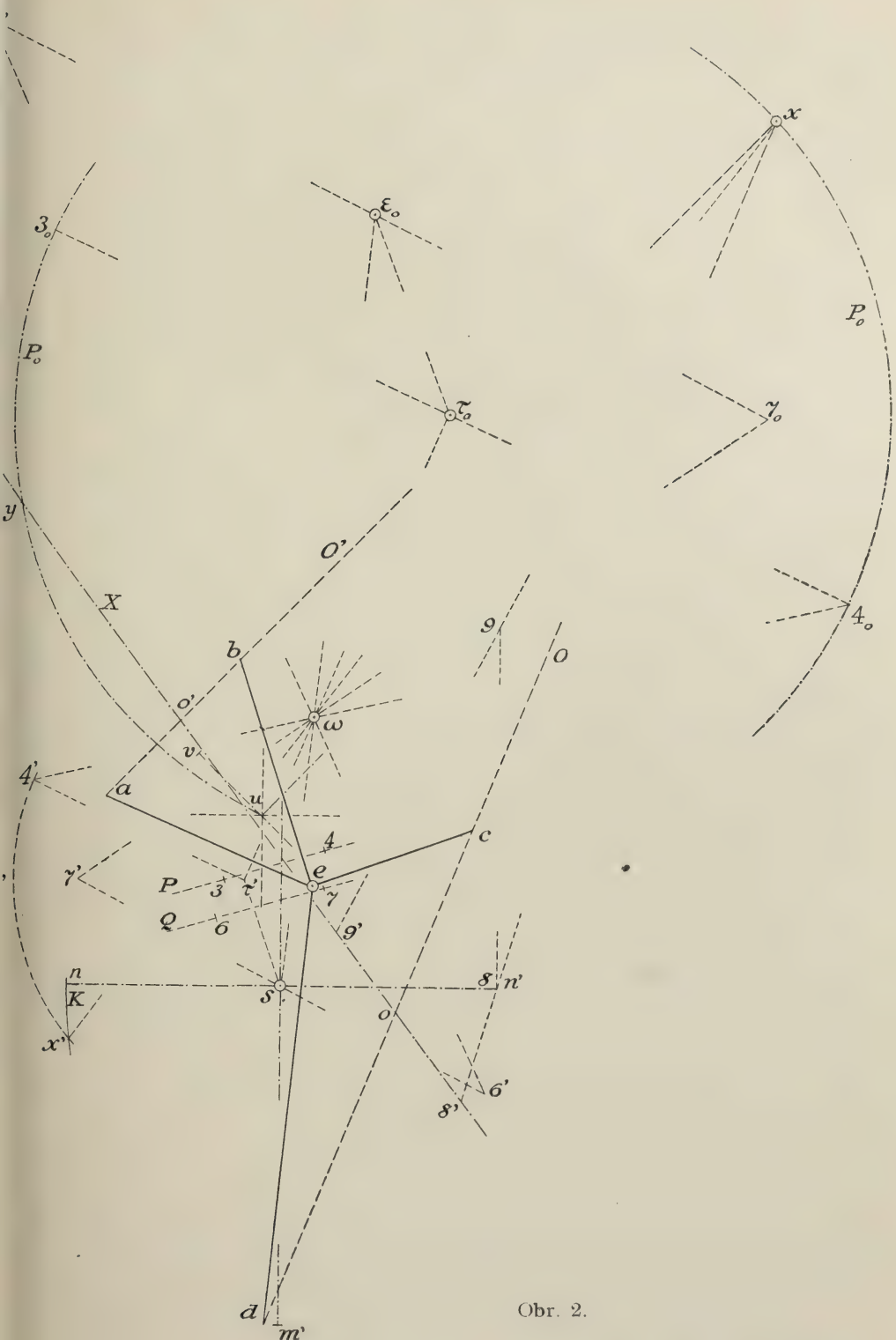
Jest pak methoda naše tato: Paty normál a, b, c, d, spuštěných s daného bodu e na ellipsu (nebo hyperbolu) K, leží, jak povědomo, na určité hyperbole rovnoosé H (t. ř. Apolloniově), která procházejíc bodem e a středem s křivky K, má asymptoty rovnoběžné s osami téže křivky. Tyto paty jsou základní body svazku kuželoseček $(K\,H)$; diagonálné body x, y, z úplného čtyřúhelníka $abcd$ jsou vrcholy společného polárného



Obr. 1.

trojúhelníka svazku, a strany jeho $\overline{a\,b}$, $\overline{c\,d}$ ... kollineačními osami křivek K a H. Jmenujme každé dvě z nich, jež procházejí týmž vrcholem trojúhelníka xyz, *sdružené*. Stačí tedy sestrojiti dvě sdružené osy kollineační O, O' (obr. 2.); jejich průsečíky s danou kuželosečkou K dají paty žádaných normál, kteroužto konstrukci vykonati lze i bez křivky K (centrickou affinitou nebo kollineací s kružnicí).[1]) Buď jsou všecky tři družiny os reálny, nebo jedna; v tomto případě obdržíme dvě (jedna z os O, O' jde mimo K), v onom čtyři normály reálné.

Přistupme ku provedení. Kuželosečka K (v obr. 1. ellipsa) buď dána poloosami $\overline{s\,m}$, $\overline{s\,n}$. Hyperbolu H vytvořují dva projektivné svazky paprskové o středech s, e, z nichž prvý skládá se z průměrů křivky K, druhý pak z kolmic, spuštěných s bodu e na průměry k prvým sdružené. H prochází tedy body s, e a má asymptoty rovnoběžné ku $\overline{s\,m}$, $\overline{s\,n}$. Další bod g obdržíme v průsečíku F a $\overline{e\,g} \perp E$, jsou-li E, F dva sdružené průměry v ellipse. Vedeme-li body s, e rovnoběžky k asymptotám, bude spojnice $\overline{I\,II}$ procházeti středem hyperboly u (G. P. I., str. 31[2]), a rovněž tak: $\overline{g\,III} \parallel \overline{s\,m}$, $\overline{g\,IV} \parallel \overline{s\,n}$; průsečík $(\overline{III\,IV}, \overline{I\,II}) = u$. Středem u veďme asymptoty a sestrojme osy (v obr. 1. jeden vrchol v). Nyní jde o kon-



Obr. 2.

strukci společného polárného $\triangle xyz$ křivek K, H. Aby nebylo třeba rýsovati pomocných kuželoseček (dle Steinera), užijeme úpravy Šolínovy (G. P. IV. odst. 120. *c.* β). Sestrojme nejprve přímku P, jíž ve svazku $(K\,H)$ odpovídá *kružnice* P_0 (obr. 2.) jako křivka sdružená.[3]) V absolutní involuci bodové na úběžné přímce vytkněme dvě dvojiny, dvěma pravými úhly (obr. 1.), na př. 1∞, $1'\infty$ na osách K, 2∞, $2'\infty$ na osách H, a sestrojme k nim póly sdružené podle K, H : 1 (průsečík obou polár k pólu 1∞), $1'$, 2, $2'$. Spojnice nesouhlasných bodů $\overline{1\,2}$, $\overline{1'\,2'}$ protnou se v bodě 3, spojnice $\overline{1\,2'}$, $\overline{1'\,2}$ v bodě 4, načež $\overline{3\,4} \equiv P$. Sestrojíme-li k bodům 3, 4 sdružené podle K, H póly 3_0, 4_0 (obr. 2.), dostaneme spojnicí $\overline{3_0\,4_0}$ průměr kružnice P_0 a na něm střed τ_0. Kružnice P_0 prochází vrcholy $\triangle xyz$ a mimo to i středem u, protože kružnice opsaná kterémukoli polárnému trojúhelníku hyperboly *rovnoosé* prochází středem této křivky (G. P. IV. odst. 104. γ). Stanovme dále přímku Q, jejíž křivka sdružená podle K, H je kuželosečka Q_0 *homothetická* ke K_0. Křivky Q_0, K vytvořují na přímce úběžné touž involuci harmonických pólů. Vytkněme dvě její dvojiny, nejlépe zase 1∞, $1'\infty$ (obr. 1.), druhou pak 5∞, $5'\infty$ na př. na sdružených průměrech E, F, jež jsou souměrny podle os křivky K. Prvé dvojině odpovídá sdružená 1, $1'$ jako nahoře, a body 5∞, $5'\infty$ jsou sdružené póly ke K, H navzájem, protože E, F jsou také rovnoběžny se dvěma sdruženými průměry hyperboly H. Spojnice $\overline{1\,5\infty}$ a $\overline{1'\,5'\infty}$ protnou se v bodě 6, spojnice $\overline{1\,5'\infty}$ a $\overline{1'\,5\infty}$ v bodě 7, načež $\overline{6\,7} \equiv Q$. Stanovme ku 6, 7 (obr. 2.) póly 6_0, 7_0 sdružené podle K, H; spojnice $\overline{6_0\,7_0}$ dá průměr křivky Q_0, jejíž střed budiž ε_0. Křivky P_0, K_0 protnou se obecně ve čtyřech bodech; jeden, sdružený k bodu $(P\,Q)$, jest nahodilý; ostatní tři dají vrcholy $\triangle xyz$. Křivky Q_0, homothetické ke K, netřeba rýsovati; stanovme vnitřní střed podobnosti těchto křivek ω tím, že vedeme středem s křivky K průměr $\overline{6'\,7'} \parallel \overline{6_0\,7_0}$, omezíme jej pomocí affinity ellipsy K s kružnicí opsanou nad hlavní osou[4]) body $6'$, $7'$, a určíme průsečík $(\overline{6'\,6_0},\ \overline{\varepsilon_0\,s}) \equiv \omega$. V téže soustavě podobnosti sestrojme kružnici P' homologickou ku P_0; střed její τ' obdržíme v průsečíku paprsku $\overline{\tau_0\,\omega}$ s přímkou $s\,\tau' \parallel \overline{\varepsilon_0\,\tau_0}$, poloměr pak $\overline{\tau'\,4'} \parallel \overline{\tau_0\,4_0}$ omezíme paprskem $\overline{4_0\,\omega}$, a opíšeme kružnici P' poloměrem $\overline{\tau'\,4'}$. Průsečíky křivek $(P'\,K)$ budou homologické ku x, y, z. Nám postačí *jeden*, na př. x'; a k tomu netřeba ellipsy K *celé*[5]), nýbrž toliko oblouku

---

[1]) Také dr. Klíma řeší úlohu (v Čas. mathem. r. 1913) bez křivky K, za to však zobrazuje pomocnou hyperbolu (odlišnou od H).

[2]) Jarolímek, Geometrie polohy, svazek I.

[3]) t. j. pohybuje-li se pól po přímce P, vytvořuje pól sdružený (dle K, H) kružnici P_0.

[4]) Je-li K hyperbola (nezobrazená), sestrojme průměr R sdružený ku $\overline{6'\,7'}$, tečnu $T \parallel R$ ke křivce K a její dotyčný bod $6'$, což vykonati lze bez křivky (pomocí ohnisek) známou konstrukcí elementárnou.

[5]) Jak žádá na př. K. Pelz ve svém pojednání „Zum Normalenproblem einer *vollständig* gezeichneten Ellipse".

$\widehat{n\,x'}$, který v našem případě je tak malý, že jej lze nahradit kružnicí křivosti ellipsy ve vrcholu n,[1]) tak že v celé konstrukci netřeba kuželoseček (krom kružnic) *žádných*.

Promítneme-li bod x' z bodu ω zpět na kružnici P_0, obdržíme vrchol polárného trojúhelníka x. Sestrojme k pólu x poláru X ellipsy K,[2]) která bude zároveň polárou hyperboly H, a sestrojme z bodu x obě kollineační osy těchto křivek O, O'. K tomu konci sestrojme k libovolnému bodu 8 pól 9 sdružený podle K, H, promítněme je z bodu x na poláru X do bodů $8'$, $9'$, stanovme týmž způsobem ještě jednu družinu involuce $(8\,9)$ ... na přímce X, a samodružné body její o, o' spojme s bodem x; $\overline{x\,o} \equiv O$, $\overline{x\,o'} \equiv O'$. Nezbývá nežli sestrojiti průsečíky těchto přímek s křivkou K, jíž netřeba rýsovati; obdržíme je pomocí affinity ellipsy K s kružnicí opsanou nad velkou osou, anebo, je-li K hyperbolou, centrickou kollineací na př. s kružnicí křivosti ve vrcholu hyperboly (G. P. IV. odst. 50.). Osa O' seče křivku K v bodech a, b, osa O v bodech c, d; spojnice $\overline{e\,a}$, $\overline{e\,b}$, $\overline{e\,c}$, $\overline{e\,d}$, jsou normály žádané. Jde-li jedna z os O, O' mimo K, obdržíme toliko dvě normály reálné. Utíná-li O nebo O' jen malý oblouk z křivky K a průsečíky jsou tudíž nepřesné, lze tyto obdržeti přesněji samodružnými body involuce harmonických pólu, kterou na ose kollineační vytvořuje křivka K; dvě družiny její opatříme si snadno i bez křivky K. Anebo užijeme jiných dvou os kollineačních, na př. $\overline{y\,a\,d}$, $\overline{y\,b\,c}$.

Při parabole K bylo by také lze této methody užiti; ale známo je, že paty a, b, c tří normál, bodem e možných,[3]) leží s vrcholem paraboly v na určité kružnici L, jejíž střed snadno se stanoví. Ovšem má tato konstrukce zase touž vadu, že dva z průsečíků křivek K, L bývají velmi nepřesné, na př. a, b (když bod e nachází se vnitř a nedaleko evoluty paraboly); doporučovalo by se tudíž i v tomto případě, sestrojiti dvě sdružené kollineační osy $\overline{a\,c}$, $\overline{v\,b}$ obou křivek (pomocí společného polárného trojúhelníka) a průsečíky jejich s kružnicí L.

---

[1]) Připadne-li x' dále od vrcholu, sestrojíme snadno některý bod ellipsy, který leží nedaleko kružnice P', a v něm kružnici křivosti, jež protne P' v bodě x'.

[2]) Průsečíky poláry X s kružnicí P_0 dají ostatní dva vrcholy polárného trojúhelníka y, z, není jich však třeba; ostatně mohou být také imaginárné.

[3]) Čtvrtá je rovnoběžná s osou paraboly, majíc patu v úběžném bodě křivky.

Revise našich ještěrů křídových.

Napsal

Dr. František Bayer.

Předloženo dne 14. listopadu 1914.

Nejprve musím tu hned předem ohraditi se proti eventuální výtce, jakoby snad tato moje stručná studie byla také projevem skrovnější piety k vědecké práci zesnulého profesora dra. Antonína Friče. Právě já spíše než kdokoli jiný měl jsem příležitost sledovati postup jeho práce, poznati a oceniti všecko jeho dílo, a nelze také tak snadno zapomenouti na upřímné projevy uznání, jež jsem slýchal z povolaných úst cizích paleontologů. Ale na monografii o nových rybách a plazech českého útvaru křídového[1]) jsem uveden jako spolupracovník a tudíž nejsem jen tak zcela sproštěn odpovědnosti za to, co v ní jest vytištěno. Známo ovšem, že jsem definitivně zpracoval jen partii o rybách (str. 3.—10.); ale jako i v této části měl jistý podíl profesor Frič, tak i já zase míval jsem s ním nejednou diskusi o druhém dílu (od str. 13.), pojednávajícím o plazech. Pokud se určení a výkladu jednotlivých jejich zbytků týče, nebyli jsme pohříchu všude souhlasného mínění, ale já dlouho váhal, pronésti veřejně úsudek svůj; také jsem v nynějším svém povolání vždy ani nenalezl k tomu nutného času. Ostatně nesouhlasili v těch věcech s profesorem Fričem dva mužové, jejichžto slovo má trochu větší váhu, než moje skromné mínění. Arthur Smith Woodward při své poslední návštěvě sbírek našeho musea v červnu r. 1906 uznal za správné moje určení těch částí koster obrovských našich plazů křídových, jež se vůbec dají určiti, a o prof. Seeleyovi praví sám Frič v citované monografii (str. 21.), že se s ním neshodl ve příčině výkladu problematických zbytků. A dodává k tomu: „Kein einziger von den vorliegenden Skelettheilen lässt sich mit vollkommener Sicherheit deuten und es bleibt nichts anderes übrig, als zu einer muthmaßlichen Deutung zu schreiten, die keinen Anspruch auf eine definitive Lösung dieser schwierigen Frage macht und daher wohlwollend zu beurtheilen ist.“

[1]) Dr. Ant. Fritsch u. Dr. Fr. Bayer, Neue Fische und Reptilien aus der böhmischen Kreideformation. Prag, 1905.

Některé zbytky velikých plazů těch přece snad lze poněkud určiti, jakž ještě ukázati se pokusím.

Kromě důvodů právě uvedených zasluhují fragmenty i z té příčiny nové zmínky, že jsou to zbytky velikých ještěrův, u nás neobyčejně vzácných. Ne každý, kdo by se o ně zajímal, pořídil si monografii Fričovu. Veliké finanční oběti, s nimiž bylo spojeno vydávání větších jeho prací, nebyly v nižádném poměru s jich odbytem.

* * *

Rekapitulujme tu nejprve stručnou historii nejdůležitějších nálezův a uveďme příslušnou literaturu (mimo zprávy antikvované nebo zatímná sdělení).

Ve své první monografii o plazech a rybách českého útvaru křídového[2]) Frič uvádí kromě želvy *Chelone Benstedi* Ow.[3]) zbytky dvou velikých ještěrů, *Polyptychodon interruptus* Ow. a *Iguanodon* (?) *exogyrarum* Fr. Z prvého popsal a vyobrazil zuby a obratel (tab. I. fig. 1. a 2.) a činí zmínku o fragmentech čelisti a čelní kosti. Nevím, náleží-li obratel tomuto rodu vůbec; podobáť se málo obratlům Plesiosaurií.[4]) K těmto zbytkům přibyly později úlomek lebky od Zámostí (v Mladoboleslavsku), jejž jsem svého času popsal,[5]) pak kamenná výplň mozkové dutiny z Bílé Hory, Fričem popsaná a zobrazená (pag. 16.—18.; tab. 9. fig. 1., 2. a 3.). Vzhledem k velikosti zubů a fragmentů lebky pochybuje Frič, náleží-li r. Polyptychodon k Plesiosauriím vůbec; leč angličtí autoři jej tam řadí stále, zajisté právem — konečně nejsou v této skupině jen plazi s dlouhým krkem a malou hlavou (na př. Plesiosaurus, Cimoliosaurus), ale také formy s krát-

---

[2]) Dr. Ant. Fritsch, Die Reptilien und Fische der böhmischen Kreideformation. Prag, 1878.

[3]) Správně *Euclastes Benstedi* Ow. (sp.). Z titulu této studie patrno, že tu o želvách mluviti nehodlám. Ostatně jest druh právě uvedený přesně určen a rovněž tak jest oprávněn Laubeův druh *Pygmaeochelys michelobana*. Ze druhu *Chelone* (?) *regularis* Fr. popsána[1]) a zobrazena problematická kost z končetiny (tab. 8., fig. 10.), jež vlastně není leč odlitek negativu té kosti, pak část štítu (str. 18.), jíž také nelze bezpečně určiti a zařaditi. — Z ostatních plazů rovněž netřeba znova činiti obšírné zmínky o popsaných posud zbytcích druhu *Ornithochirus* (*Cretornis*) *Hlaváči* Fr. (sp.), nyní definitivně (i Fričem) mezi Pterosauria zařaděném. — A co souditi o křídovém zbytku r. *Lacerta* od Nebužel, pověděl jsem ve svém „Katalogu českých fossilních obratlovců" (1905; str. 68.).

[4]) Srovnej: Seeley, On an associated series of cervical and dorsal vertebrae of Polyptychodon etc. (Quart. Journ. Geol. Soc. London, XXXII. 1876). — W. Kiprijanow, Studien über die fossilen Reptilien Russlands (Mémoir. Acad. Imper. des Sciences de St. Pétersbourg, XXXI. 1883). Do skupiny Thaumatosauria klade Kiprijanow rody Polyptychodon, Thaumatosaurus a svůj nový rod Lütkesaurus (= Polyptychodon dle Lydekkera). Z rodu Polyptychodon (a Lütkesaurus) uvádí, po případě popisuje zuby, fragmenty lebky a snad i žebra (Owen), obratle a kosti ploutve přední (humerus) i zadní (kůstky tarsální; snad i os ilei).

[5]) Ještěr Polyptychodon Ow. Nový nález. Věstník král. české Společnosti nauk 1897.

kým krkem a velikou hlavou (Pliosaurus; ovšem zatím rod jurský). Kiprijanow také charakterisuje skupinu Thaumatosauria (z Plesiosaurií) tím, že mají toho druhu ještěři krátký krk, hlavu velikou a těžkou (asi jako vorvani), silné, kuželovité zuby v alveolách, krátké, mělce bikonkávní obratle a dlouhé kosti končetin bez dutiny morkové.[4]) I Lydekker[6]) výslovně dodává, že měl r. Polyptychodon hlavu velikou.

Ze druhého ještěra (*Iguanodon? exogyrarum*) popsal a zobrazil Frič r. 1878 (tab. I. fig. 4. a 5.) kamenné jádro z dutiny veliké kosti, jež prý se podobá holenní kosti Iguanodontů. Kromě této kosti dostala se z téhož naleziště (z Holubic) do musea jiná kost z končetiny, zobrazená v naší monografii[1]) na tab. 8. (fig. 9.). Obou kostí nelze určiti již z té příčiny, že nemají apofys; také nové jméno *Procerosaurus exogyrarum*, Fričem[1]) pro ně navržené, nepraví ničeho o jich příslušnosti neb umístění v soustavě plazů. Že nejsou kostmi Iguanodontů, potvrdil Fričovi sám Dollo. Ani nelze říci, náležejí-li opravdu nějaké formě Dinosaurií vůbec.

V pozdějších svých „Studiích v oboru křídového útvaru v Čechách“[7]) uvádí Frič nejprve (IV.) několik článků prstů velikého ještěra od Lahoště u Teplic (str. 59. obr. 21.), o nichž píše, že náležejí snad rodu Plesiosaurus, a srovnává je se saským, Geinitzem popsaným druhem *P. Bernardi* Ow. Již ve svém seznamu křídových plazův a ryb[8]) upozornil jsem na to, že analogické nálezy z tohoto útvaru mají býti počítány k rodu *Cimoliosaurus* Lyd. a Frič ve své pozdější monografii[1]) uvádí Geinitzův nález jménem *C. Bernardi* Ow. (sp.), ale Lahošťské kůstky popisuje jinde, pode jménem *Hunosaurus Fasseli* Fr. (v. t.), ježto prý spíše náležejí nějakému Mosasauru. O tom ještě promluvíme.

Z Březenských vrstev uvedl Frič nejprve[7]) porušený článek prstu, fragmenty plochých kostí a jiné drobty ze Srnojed, jež r. 1895 označil jménem *Iguanodon* (?) *albinus* Fr. V pozdější monografii[1]) dal jim jméno *Albisaurus scutifer* Fr. (pag. 30.), ježto prý jich k Iguanodontům řaditi nelze. Ale Dinosauria Ornithopoda, k nimž tu Frič přece zbytky tyto zařadil, nemají kostry kožní, kteráž z Dinosaurií jen u skupin Stegosauri, Ceratopsia a Theropoda (p. p.) bývá nalezena; na tyto skupiny však při našem nálezu pomýšleti nelze. Definitivní jeho pojmenování jest až do příštích nálezů nemožné.

* * *

Z ostatních Fričem popsaných forem[1]) beze sporu k Plesiosauriím náležejí fragmenty označené jménem *Cimoliosaurus lissaensis* Fr. (l. cit. pag. 15.); i prof. Seeley potvrdil, že tu jde o zbytky nějakého druhu té

[6]) Lydekker, Catalogue of the fossil Reptilia and Amphibia in the British Museum. II. 1889.

[7]) IV. Teplické vrstvy. 1889. — V. Březenské vrstvy. 1895.

[8]) Kritický seznam plazův a ryb českého útvaru křídového. Věstník. Č. Akademie, V. 1896.

skupiny soustavné. Jest to nejprve silná kost z končetiny (femur nebo humerus; tab. 6., fig. 6.—8.; tab. 9. fig. 4.), pak plochá kost (tab. 9. fig. 5.—7.), jíž blíže určiti nelze; výkres její (fig. 5.) není také zcela přesný.

Jen mezi plazy šupinaté (*Squamata*), nejprve beze všeho bližšího určení, zařadil Frič nejdůležitější nález, druh *Iserosaurus litoralis* Fr.; ke konci popisu jeho připomíná, že jest asi příbuzným s Mosasaury, ale tuto domněnku opřel jen o domněnku jinou, pohříchu neudržitelnou.[9])

Jde tu o kosti velikého ještěra, r. 1899 v lomu u Mílovic nalezené, jichž většina jest ve sbírkách musejních zalita v sádru a pospolu montována v rámci (v textu obr. 18). Mimo kosti tu i na tabulích zobrazené jsou v zásobách sbírek uloženy tři ploché kosti, z nichž jedna s okrajními výběžky, druhá užší, se zřetelnou hlavicí kloubní, tedy zajisté z končetiny,[10]) a to bez pochyby z končetiny přední.

Odlitky kostí byly Fričem poslány do Ameriky a prof. Seeleyovi do Londýna; ale nejmenovaný znalec zámořský (zajisté Osborn) vyslovil se o nich v ten rozum, že zatím nedají se přesně určiti, a mínění Seeleyovo již tu bylo citováno.

Fragmenty jsou zobrazeny na tab. 5., 6. a 9. Pohříchu nejsou všecky výkresy zcela přesné; zejména obr. 1. na tab. 5. jest kreslen jen podle sádrového odlitku, a to ještě ne zvláště dokonalého. V popise praví Frič (str. 20.), že kosti na první pohled zdají se náležeti končetinám, a to je také zcela správné. Pak ale je popisuje jako kosti lebečné a v tom se s ním Seeley ovšem nemohl srovnati. Ještě nejspíše lze přisvědčiti tomu, že ploché kosti s ryhami po cevách, zobrazené na tab. 6. (fig. 2. a 3.), jsou krycí kosti s temene lebky. Ale srovná-li kdo na př. obraz 1. na tab. 5. s odlitkem, podle něhož jest kreslen, a s kostí na textovém obr. 18. (str. 20.) dole v levém rohu, z níž byl odlitek upraven, vzniknou první pochybnosti. A ty se množí, prohlédneme-li si jednotlivé kosti a textový obr. 23. (str. 23.), rekonstrukci lebky, do níž Frič kontury jednotlivých kostí zakreslil. Ani nás nepřesvědčuje srovnávání jich s analogickými částmi lebek u r. Tylosaurus, Mosasaurus, Platecarpus a j., ježto Frič dle vlastního doznání srovnával mílovické kosti jen s výkresy těch plazů v příslušné literatuře.

Nebudeme tedy šíře citovati popis lebky, jak jej Frič podává (str. 21. až 24.), ale povíme vlastní mínění o jednotlivých kostech, k němuž jsme došli bedlivou prohlídkou a srovnáním.

Nejprve jest zřejmo, že dlouhá kost, zobrazená na tab. 5. (fig. 4.), není pterygoideum lebky, nýbrž proximální kost z končetiny ještěra ze skupiny Plesiosaurií. Také druhá delší, ale prohnutá kost (tab. 5. fig. 3.)

---

[9]) Nejprve (str. 21.) pronáší ovšem mínění, že kosti náležejí ještěru příbuznému s Mosasaury nebo s Plesiosaury; ale na str. 25. výslovně jej řadí jen v příbuzenstvo Mosasaurů.

[10]) Srovnej končetinu r. Polycotylus Cope (Sauropterygia!) v díle: E. D. Cope, The Vertebrata of the Cretac. formations of the West (Unit. St. Geol. Survey. Vol. II. 1875.).

nenáleží dolní čelisti (jakožto coronoideum), ale také končetině; připomínáť dle mínění profesora Seeleye, Fričem uvedeného (str. 24.), humerus Nothosaura (rovněž z Plesiosaurií).

A ploché kosti, pokud je vůbec lze určiti, zejména obr. 1., 5. a 7. na tab. 5., pak obr. 1. a 5. (sub. *p*) na tab. 6., nejsou frontalia nebo articulare a subarticulare dolní čelisti, ale zajisté fragmenty kostí z pásma lopatkového, především korakoidu. Štíhlejší kosti (na př. tab. 5. fig. 2.; tab. 6. fig. 1. sub *m*) zase za žebra možno pokládati. V tom s Fričem souhlasíme, že před novými, lépe dochovanými nálezy kostí všech přesně určiti nelze. I tu platí nejen „mostly fragmentary", ale zároveň „indeterminable."

Fričova diagnosa zvláštního nějakého rodu Iserosaurus (loc. cit., str. 21.) tedy odpadá.

Také diagnosy druhého nového r. *Hunosaurus* Fr. [1]) nebylo třeba uváděti (str. 25.), ježto se vztahuje jen k těm kostem velikého ještěra (druhu *Hunosaurus Fasseli* Fr.), jež v lomu u Hudcova (Hundorf; u Teplic) byly nalezeny, totiž k obratlům s horními oblouky, k žebrům a jedinému fragmentu silné kosti z končetiny; jest to zajisté kost proximální, a Frič sám správně dodává, že nelze rozhodnouti, je-li to humerus či femur.

Obratle jsou lépe zachovány; jsou mělce bikonkávní, jako u četných Plesiosaurií (viz na str. 26. v textu obr. 26.; ve fig. 1. na tab. 7. nakresleno jest šikmo posunuté tělo obratle), a také jinak neliší se od obratlů jiných ještěrů ze jmenované právě skupiny, i netřeba jich právě srovnávati s výkresy obratlů r. Platecarpus. Vždyť Mosasauri mají obratle p r o c o e l n í a horní oblouky s tělem obratle p e v n ě s r o s t l é, kdežto u Plesiosaurií bývají tyto dvě části obratlů spolu spojeny volněji, někdy švem, takže se pak snadno oddělí, jak to v díle Fričově na př. i na tab. 7. (fig. 1.) jest zobrazeno. Také fragmenty žeber (v textu obr. 28. na str. 27.) nepodobají se žebrům Pythonomorph; Mosasaurus a rody příbuzné mají žebra sice také o jednoduché hlavici, jako Plesiosauria (námitka Fričova na str. 28. v ř. 13. a 14. tedy odpadá), ale žebra jsou válcovitá, nikoli tou měrou se stran smáčklá, jak patrno na citovaném Fričově obrazci v textu (str. 27. *B*). Také sotva lze s apodiktickou jistotou tvrditi, jsou-li to žebra ze střední nebo zadní končetiny hrudníku.

Jak bylo již řečeno, řadí Frič[1]) ke svému druhu Hunosaurus Fasseli také podlouhlé, uprostřed štíhlejší kůstky z končetiny, nalezené v blízkém lomu u Lahoště (u Teplic), jež ve své studii o Teplických vrstvách[7]) srovnával s Geinitzovým druhem Plesiosaurus Bernardi. Nejsou to ovšem metapodiala (v textu své monografie z r. 1905 na str. 28. zove je metacarpalia, pod obr. 29. pak stojí označení „metatarsus"), nýbrž články prstů, kůstkám toho druhu u některých Plesiosaurií právě z r. Cimoliosaurus velice podobné. Pro blízkost obou nalezišť (Hudcova a Lahoště) bylo by možno týmž právem tvrditi, že ostatní zbytky r. Hunosaurus také sotva třeba jinam řaditi.

K Mosasaurům (*Hunosaurus*?) klade Frič[1]) také fragment kosti, zobrazený na tab. 8. (fig. 11.), z opuky od Přibylova; praví o něm (str. 29.), že jest to asi os ilei, ježto prý se podobá toho druhu kosti u r. Tylosaurus, Clidastes a Platecarpus (dle cizích výkresů koster těchto plazů). Již za návštěvy A. Smith Woodwarda v musejních sbírkách v květnu r. 1897 byl jsem přiveden na myšlenku, že by to mohl býti konec dlouhé kosti z končetiny nějakého Ornithochira, ovšem nikoli humerus nebo články prodlouženého prstu předního; ve své zprávě o cestě do Londýna[11]) jsem pak také uvedl, že tu jde skutečně o dlouhou kost z končetiny jmenovaného tu rodu Pterosaurií.

Kam by rod Hunosaurus vlastně náležel, Frič výslovně a určitě neuvedl; naznačil jen, že jest příbuzný s Mosasaury. K tomu již vzhledem k úpravě obratlův a žeber, pak k povšechnému rázu a i zevnějšku kostí přisvědčiti nelze. V cizích museích vystavené kostry nebo jich části z uvedených rodů Clidastes, Platecarpus a j. vyhlížejí docela jinak, než naše fragmenty rodů, nazvaných Iserosaurus nebo Hunosaurus.

Kromě ještěrů v monografii Fričově[1]) uvedených mají sbírky musejní ještě dvě skupiny fragmentů, v sádře a v rámci montovaných, posud nepopsaných. Frič dal jedněm těm zbytkům jméno *Cimolisaurus teplicensis* Fr., ježto pocházejí také od Hudcova u Teplic, druhým (od Chrasti) pak jméno *Cimoliosaurus vicinus* Fr.

Z prvého druhu zachováno zejména něco plochých, větších i menších kostí, z nichž největší asi náleží pásmu lopatkovému, pak krátké obratle, připomínající obratle Plesiosaurií; ze druhého jsou tu rovněž ploché kosti různé velikosti, obratle, pak několik dlouhých kůstek a jiných drobnějších fragmentů. K rodu Cimoliosaurus možno je snad počítati, ale druhů stanoviti netřeba. Není to vlastně ani možno; vždyť je tu jen něco úlomkův a to ještě nevalně zachovaných.

* * *

Z toho, co tu bylo uvedeno o jednotlivých fragmentárních zbytcích ještěrů křídových, jest patrno dvojí. Nejprve, že před dalšími nálezy lépe zachovaných částí koster nelze vlastně zcela přesně určiti, kterému druhu nebo rodu většina zbytků náleží; po druhé, že právě pro tuto příčinu netřeba dávati všem těm fragmentům určitá, i druhová jména jen z té příčiny, aby jaksi byly fixovány v literatuře.

Obě shora uvedené křídové želvy sluší pokládati za bezpečně určené a jména jejich tudíž za oprávněná. Také není pochybnosti, že to, co popsáno u nás pode jménem Ornithochirus, jsou zbytky tohoto rodu Pterosaurií, k němuž i kost z Přibylova (u Friče Hunosaurus?) náleží. Z nečetných posud nálezů nelze však usouditi, je-li nezbytně nutno dávati jim

[11]) Zpráva o studijní cestě do Londýna. Věstník České Akademie, VII. 1898

zvláštní druhové jméno O. Hlaváči Fr. (sp.) a nenáležejí-li fragmenty jinému, již před nálezem choceňským popsanému druhu toho rodu.

Co bylo popsáno u nás z rodu Polyptychodon, může právem podržeti toto jméno, vyjma snad obratel, Fričem[2]) zobrazený. Byla by opravdu na snadě domněnka, nenáležejí-li tomuto rodu velikých ještěrů křídových všecky ty naše fragmenty, jimž dal Frič jména Iserosaurus a Hunosaurus, ale pokud nebude i v cizině z Polyptychodontů bezpečně známo a určeno víc, než co tu posud bylo uvedeno,[4]) bude nutno váhati s definitivním zařazením problematických, právě jmenovaných ještěrů k Owenovu rodu Polyptychodon, dle Lydekkera[6]) s rodem Cimoliosaurus příbuznému, ale lišícího se od tohoto rodu Plesiosaurií především velikou hlavou. Iserosaurus i Hunosaurus jsou dle mého přesvědčení nesporná Plesiosauria, a ježto u nás v křídovém útvaru nade vši pochybnost zjištěn opravdu rod Cimoliosaurus Lyd., nepochybíme zajisté, označíme-li vše to, co posud u nás určeno a popsáno jako Cimosliosauru, Iserosauru a Hunosaurus, jménem **Cimoliosaurus sp.** Ovšem do té doby, pokud nebude možno na základě dalších nálezů stanoviti také příslušnost druhovou; neníť hromadným jménem rodovým řečeno, že by všecky ty zbytky náležely jedinému z četných posud známých druhů tohoto rodu.

Byly tedy posud v našem útvaru křídovém nalezeny z plazů jen zbytky želv, Plesiosaurií a Pterosaurií, ale zajisté nikoli Mosasaurií.

Zbývají ještě fragmenty, jež označil Frič jmény Albisaurus scutifer a Procerosaurus exogyrarum. Ty také ovšem i dále zůstávají naprosto problematickými.

Několik poznámek k morfologii larev Dipter.

Podává

Ant. Vimmer.

(S 18 obrazci v textu.)

Předloženo 30. listopadu 1914.

I. O trachealní soustavě.

Všeobecně je známo, že larvy dipter dělí se dle umístění stigmat na *peripneustické, amphipneustické* a *metapneustické.*

Umístění stigmat ku klassifikaci larev využil Brauer (1882) ve své velké práci o larvách dipter, kteráž byla prvou soubornou prací o larvách vůbec. Ač Brauer nervovou soustavu larev znázornil jasnou a přehlednou tabulkou, o soustavě trachealní takřka ani nepojednal.

Poměrně nejbohatší žeň poznatků o trachealní soustavě zanechali nám Dufour (1839) a Perris (1870), takže oba lze považovati za průkopníky, kteří pomáhali budovati nauku o trachealní soustavě larev dipter vůbec. Ze starších autorů třeba ještě jmenovati Bouché (1830).

Jejich instruktivní obrázky zřetelně poučují, že trachealní soustava metapneustických i amphipneustických larev skládá se ze dvou podélných hlavních kmenů a že larvy z čeledě Mycetophilidae mají hlavní kmeny spojeny silnými komissurami. Tím byly již zhruba naznačeny hlavní typy trachealní soustavy, a to trachealní soustava *larev primitivních* a vývojem zjednodušených *strusek.*

Weismann, Kowalevský a Pratt[1]) studujíce postembryonální vývoj much, dotekli se vzniku trachejí.

Pokud sahají naše zkušenosti, můžeme tvrditi, že je málo larev dipter, jimž by absolutně chyběly tracheje. Tak z plovacích měchýřů *Corethry,*

[1]) Obsáhlá práce Grabrova pokládá se za pochybenou.

jež jsou podstaty trachealní, vybíhají přece jenom větévky trachejí, byťby třeba velmi jemné. Lumen jejich vyplňují sloupečky vzduchu, což je zřetelně viděti na vyobrazeních Meinertových. Keřík z trachejí vyskytuje se také v předních partiích těla larev *Chironomů*, ač dýchají žaberními přívěsky (Meinert). Způsob dýchání Chironomů případně vystihli *Miall* a *Hammond*.

Vskutku jen nepatrný zlomek larev dýchá branchialními přívěsky. Jsou to zvláště larvy *Chironomů*, larvy rodu *Ulomyia* z čeledě Psychodidae, larvy *Blepharocerid* a larvy rodu *Dicranota* z čeledě Limnobidae.

Hodně světla na soustavu trachealní vrhly také monografie larev jednotlivých druhů, neb vyšších skupin. Meinertovi (1886) vděčíme za popis dýchací soustavy v larvách vodních, komárovitých Eucephal. Dle jeho výzkumů lze říci, že larvy těchto vodních Eucephal dýchají většinou metapneusticky mimo rody Simulium a Chironomus. Blízkost svou k larvám primitivním prozrazují larvy rodu Simulium a . . jejich hlavní kmeny jsou spojeny sice tenkými komissurami, ale přece jenom komissurami.

Naše poznatky o soustavě trachealní značně rozšířili Wahl (1899) a de Meijere (1900). Prvý pečlivě probádal larvy rodu Eristalis. Při tom popsal rozvětvení trachejí a vyložil, které to větve zásobují vzduchem ty a ony části těla, čili přičinil se o *topografii* soustavy vzdušnicové. Dále potvrdil, že část trachejí při proměně přejde ve stav kukly a imaga tím, že se *renovují*. Jejich larvální buňky totiž obmění se v menší, tak zvané „embryonální", jež snáze odolávají sarcolyse a phagocytose. Ta část trachejí, jejichž epithel se nerenovoval, při kuklení zajde. Mimo to luštil Wahl vztah imaginálních terčků k trachejím a přesvědčil se, že terčky vznikají tam, kde některé kapillary vzdušnicové inserují k pokožce.

De Meijere podrobně nakreslil vzdušnicovou soustavu rodu Lonchoptera a dle četných příkladů dovodil, že stigmata larev dvoukřídlého hmyzu jsou stigmaty složenými.

Pro topografii trachealní soustavy larví není bez významu fakt, jejž se podařilo odkrýti Tölgovi. Týž totiž nalezl v larvách II. stadia druhu Billea pectinata Mg. (z podčeledě Dexinae) dvě komissury, jež spojují oba hlavní kmeny trachealní.

Konečně třeba vytýčiti Keilinův objev *žlaz stigmatických* (1912), jichž posud nikdo neuvedl. Keilin nalezl je pod prothoracalním stigmatem na larvě Trichocera. Ovšem, že řezu nenakreslil, takže nelze bezpodmínečně říci, že nakreslený útvar je žláza.

Na základě právě uvedeného historického úvodu možno posavadní znalosti o trachealní soustavě larev dipter shrnouti v následující stručné these:

1. Tracheje jsou vchlípeniny pokožkové.
2. Část se jich při vývoji larvy v kuklu renovuje.

3. Primitivní larvy mají hlavní kmeny trachejí spojeny příčními komissurami.

4. Strusky jako vývojově pozdější dýchají dvěma podélnými kmeny trachealními, jež buď spojuje jedna neb dvě komissury.

5. Podél hlavních kmenů probíhají u četných larev kmeny vedlejší.

6. Kapillary trachejí jsou v určitém vztahu k imaginalním terčkům.

7. Stigmata larev dipter jsou složená. Mezi stigmatem a trachejí bývá plsťová komora.

8. Pod některými stigmaty mohou býti žlázy stigmatické (?).

9. Buduje se topografie soustavy trachealní.[1])

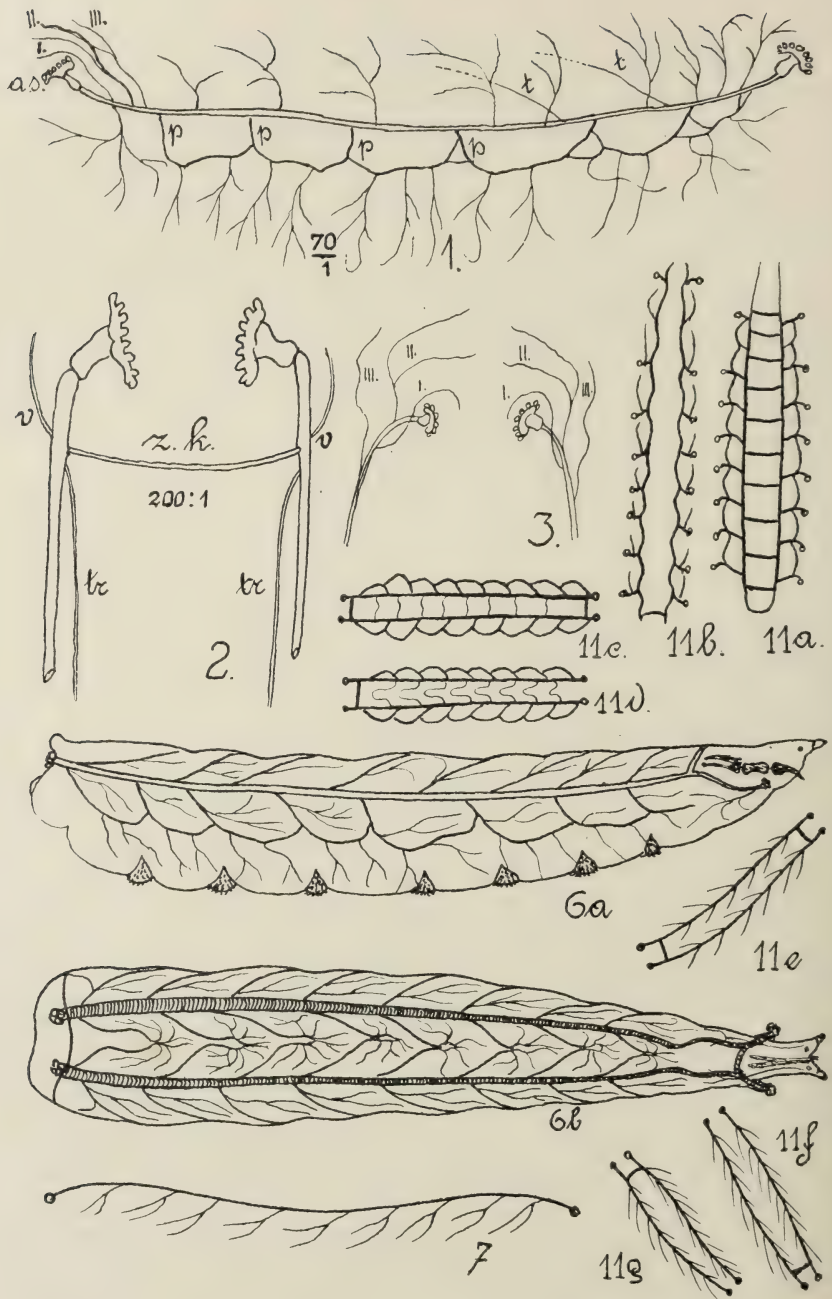
Ke všem tuto postaveným thesím je třeba ještě nových a nových dokladů, z nichž některé níže následují. Poněvadž ale při zkoumání larev objevily se ještě málo známé neb posud neznámé zjevy souběžné, nepustil jsem jich se zřetele a uvedu je jako dodatky.

Trachealní soustava larvy druhu *Phytomyza xylostei* Kaltb. skládá se ze dvou hlavních kmenů (obr. 1.), jež spojuje toliko *komissura zadní* (obr. 2. *z. k*). Blízko dstí komissury odbočuje ze kmenu po jedné tracheji (obr. 2. v.), kteráž se rozvětvuje v kapillary, jež zásobují vzduchem 11. článek těla. Za komissurou proximálně odvětvují se a probíhají dorsální části těla larvího dvě tracheje, které postupují souběžně s hlavními kmeny a míří k tukovému tělesu, aby mu přinesly potřebného vzduchu. Tyto dvě tracheje, jak ještě později bude doloženo, *vyskytují se pravidlem v trachealní soustavě larev z podřádu Cyclorrhapha*. V larvě Phytomyzy však vystupuje z oblouku laterálního ještě po jedné podobné větvi, ztrácející se brzy uvnitř těla a vinoucí se k dalším shlukům tukových těles. Ostatní dorsální větve vnitřní mezi kmeny hlavními přivádějí vzduch kůži, svalům a srdci. Blíže předních stigmat vybíhá z hlavních kmenů po třech větvích, zpočátku těsně vedle sebe se vinoucích, jež opatřují vzduchem 1. článek hrudní a článek hlavy (obr. 1. a 3.: I., II., III.). Sedm laterálních oblouků (obr. 1. p. p.) tvoří dohromady pobočni kmen. Tento korresponduje s hlavním kmenem dosti silnými větvemi. Z každého oblouku vedlejšího kmene vybíhá vpředu po 2, vzadu po 3 vzdušnicích, hlavně k ventrální části těla. Tyto vnější vzdušnicové větve vysílají větévky do vnitř těla, ku zažívací rouře, jež je kapillarami hustě opletena. Do přední části těla v okolí prvé panožky vniká trachealní větev přímo z hlavního, nikoli z vedlejšího kmenu; v podkožních svalech se mnohonásobně rozvětvuje v jemné kapillary, jež se dotýkají až buněk hypodermálních.

Trachealní soustava larvy druhu Phytomyza xylostei podobá se značně soustavě, jak ji nalezl v larvě Lonchoptery de Meijere. Má také vedle dvou hlavních kmenů dva kmeny vedlejší, jež korrespondují s hlavním kmenem prostřednictvím vnějších větví, ba ani boční větve larvě Phy to-

[1] These fysiologické pouštím se zřetele, poněvadž pojednávám jen o morfologii.

Tab. I.



1.,2.,3. Phytomyza xylostei. 1. Boční pohled na trachealní soustavu, z. k. = zadní komissura, I., II., III. trachealní větve hlavy.

6. Helomyza; a = lateralní, b = dorsalní pohled na tracheje.

7. Vermileo; hlavní kmen s vnějšími větvemi.

š 11. Schema trachealní soustavy larev hmyzu dvojkřídlého; *a*) primitivní, *f*) *g*) nejvíce redukované.

myzy nechybí. Za to nemá larva Lonchoptery oné samostatné větve, jež odnožuje přímo z hlavního kmene a přivádí vzduch ventrální části hrudi. Celkem trachealní soustava Lonchoptery jeví se primitivnější než u Phytomyzy, neboť při prvé spojuje oba hlavní kmeny *přední* i *zadní* komissura, mezi nimiž vinou se příčné tenké větévky sice křivolaké, ale přece zřetelně nesoucí na sobě ráz původních komissur primitivních larev. — Stigmata této larvy důkladně prostuďoval Trägardh,[2]) proto se o nich nezmiňuji.

V podobném oekologickém prostředí jako larva Phytomyzy žije i larva rodu *Ptiolina* (obr. 4.). Obě totiž vyhlodávají listy, jenže Phytomyza zimolezové (Lonicera) a Ptiolina jatrovkové (Marchantia). Poněvadž v literatuře nenalezl jsem ani popisu ani vyobrazení dýchací soustavy larvy Ptioliny, promluvím o této soustavě poněkud obšírněji.

Jako při většině muších larev, jež dýchají amphipneusticky, táhnou se tělem i této larvy dva podélné hlavní kmeny trachealní od předního stigmatu k zadnímu. Oba kmeny spojuje zřetelně vyvinutá *přední komissura*; v trachealní soustavě Phytomyzy jest jen *zadní*, v soustavě Lonchoptery *zadní* i *přední* komissura. Devět vnitřních dorsálních trachejí (obr. 4. dv.) bohatě se rozvětvují v celé dorsální části těla. Spojujíce oba hlavní kmeny mezi sebou, připomínají zakrsalé komissury jako je tomu v larvě Lonchoptery. Z nepravých komissur vybíhá po 4 větévkách neb 6 větévkách (na vyobrazení jest jich viděti jen polovici na straně levé), mířících ku předu a po dvou neb jedné vinoucí se do zadu, mimo to při počátku každé vnitřní větve vysílá hlavní kmen směrem dorsálním po 2 větvičkách. Vedlejší kmeny jsou velmi křivolaké a v každém článku, ležícím mezi stigmatem předním a zadním, korrespondují při basi článku silnými větvemi vnějšími s hlavním kmenem. Ač napohled zdá se, že tvoří větve a větvičky trachejí spleť velmi nepravidelnou, přece po bedlivém prohlížení objeví se oku jistá pravidelnost jako v dýchací soustavě Phytomyzy a Lonchoptery. Z každého oblouku vedlejšího kmene vystupuje vně směrem ventrálním po třech v předních článcích a po čtyrech větvích v zadních článcích (obr. 4.), kteréžto větve svými odnoži a kapillarami opředou dokonale veškery organy ve článku, jemuž přisluší. Větve s těmito homologické lze najíti také v trachealní soustavě larev Lonchoptera i Phytomyza, jenže po třech a po 2 nikoli po třech a čtyrech. Rozdíl také jeví se v počtu vnějších větví (větve, jež spojují vedlejší kmeny s hlavními), při Phytomyze napočítal jsem jich sedm, při Lonchopteře 8, při Ptiolině 10.

Části těla mezi hlavními a vedlejšími kmeny vzduchem zásobují větvičky trachealní, jež vybíhají *z vnějších větví*. Větévky tyto (obr. 4. v.) přivádějí vzduch zažívací rouře a tukovým tělesům.

Hlavu vzduchem zásobují tři větve tracheje (obr. 5.), kteráž vystupuje blíže přední komissury z hlavního kmenu; spodní větévka této

[1]) Viz seznam literatury.

tracheje obrací se zpět proximálně do částí těla v okolí předních stigmat. Ač u Phytomyzy do článku hlavy vinou se tři tracheje, u Lonchoptery pak jen dvě, přece nechybí ani těmto spodní větévka proplétající se tělem v okolí přední komissury. De Meijere našel, že z přední komissury u Lonchoptery vybíhají dvě větvičky směrem distalním, já pak nalezl v larvě Ptioliny dvě větvičky, jež se vinou směrem proximálním, tedy opačně.

Přední stigmata mají komoru plsťovou podoby hruškovité; na ní sedí terček s ostiemi. Podařilo se mi zjistiti jich toliko po třech. Zadní stigmata sedí v mírné prohlubince těsně vedle sebe, jsou na obvodu vystužena radialními přejemnými tyčinkami s chitinu a mají po 2 dýchacích štěrbinkách; jejich plsťová komora je velmi kratičká a neliší se tak nápadně od trachejí jako tatáž na předních stigmatech.

Značně tlusté hlavní trachealní kmeny mají larvy rodu *Helomyza* (obr. 6.). Oba kmeny spojuje toliko *přední komissura*, tedy právě tak, jako při larvách z rodu Ptiolina. Vnitřní větve vyskočí z hlavního kmenu v předcházejícím článku (obr. 6*b*), běží šikmo do středu a sbíhají se na hranicích následujícího článku, kde se jemně rozvětvují; kapillary vinou se tak blízko sebe, že ještě při značném zvětšení vypadají jako srostlé. Celkem jest jich 8 párů. Vedlejší kmeny spojuje s hlavním kmenem též 8 párů vnějších větví. Z vedlejších kmenů v jednotlivých článcích vyrůstá po 2 větvích trachealních, které přivádějí vzduch do ventrálních částí těla. Počet těchto větví málo kolísá: u larvy rodu Helomyza je jich po 2, u larvy druhu Phytomyza xylostei v předu po 2, v zadu po 3, v larvě rodu Ptiolina v předu po 3, v zadu po 4. I počet párů vnitřních větví je různý: u Helomyzy 8, u Ptioliny 10, u Phytomyzy 7 párů; při tom jest třeba pozor míti, aby se nečítaly větve vinoucí se do hlavy a větve vybíhající zpět do posledního článku.

Přední stigma je válcovité a prstovitě rozvětvené v jednotlivé nosiče pupenů s dýchacími štěrbinami. Je mnohem tlustší než krátká plsťová komora, na jejímž temeni sedí.

Zadní stigma je normální složené stigma, jakéž se vyskytuje na struskách muších vůbec. Ke sloupku připojují se tři pupeny s dýchacími štěrbinami ledvinkovitými. Štěrbiny jsou opatřeny peritremata s příčnými chitinovými můstky. Pod pupeny přisedá k mohutné tracheji plsťová komora dosti krátká.

Z úboru heřmánku obdržel jsem mladé larvy z rodu *Trypeta*. Larvy měly již obě stigmata mezi nimiž probíhaly oba hlavní kmeny trachealní. Poznav v larvách stadia vskutku mladá, pilně jsem pátral po jejich komissurách v naději, že najdu v nich jako Dr. Tölg v larvách druhu Billea pectinata *přední* i *zadní* komissuru. Leč marně. Pokaždé mohl jsem zjistiti, že jen *zadní* komissura spojuje oba hlavní kmeny trachealní. Nápadným zjevem bylo mi, že mezi kmeny probíhá velmi málo vnitřních větví. Za zadní komissurou odnožuje se pár větví, jež zabočí do vnitř mezi hlavní kmeny a postupuje s nimi skoro rovnoběžně. Asi uprostřed hlavních kmenů

vybíhá z nich další pár větviček; konečně před stigmaty předními odvětvuje se trachea, jež se obloukovitě zahne zpět proximálně jako v larvách rodů Phytomyza, Ptiolina a Lonchoptera; tato vysílá pak větev do přední hrudi a do části tak zvané hlavy.

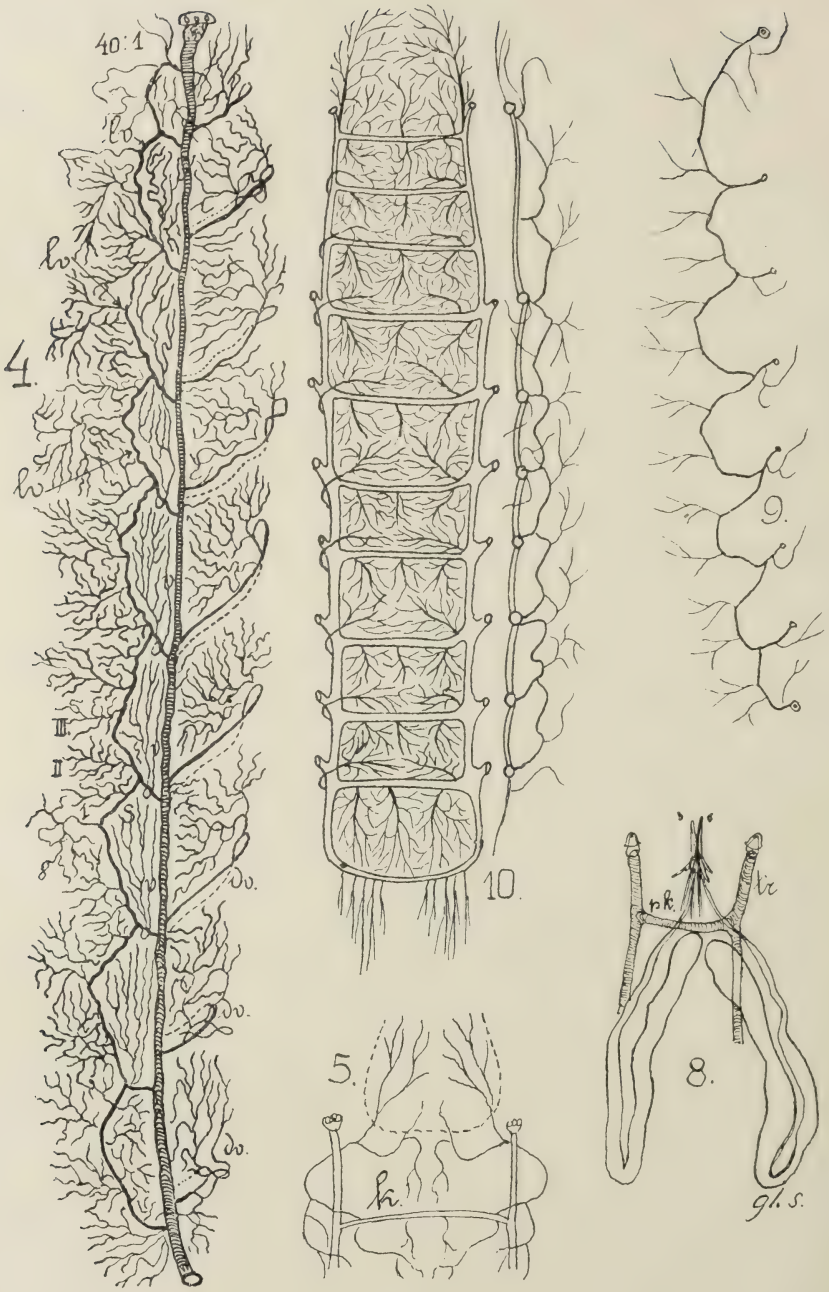
Prosté rozvětvení lze znamenati také na trachealní soustavě v larvách rodu *Vermileo* (obr. 7.).[1]) Tvoří ji dva podélné hlavní kmeny, z nichž vycházejí jemné větve vnitřní a vnější. Chybí tu zcela kmeny vedlejší. Ani předních ani zadních komissur nebylo možno dopátrati se v tomto posledním, tedy třetím stadiu larvím. Přední stigma má kratičkou plsťovou komoru, k níž přiseďá pět pupenů se štěrbinkami k přijímání vzduchu. Zadní stigmata jsou nápadně malá, mají plsťovitou komoru na povrchu hrbolkatou; k bási komory hrbolky se prodlužují, takže base komory na zevnějšku již vypadá skoro jako trachea. Nepodařilo se mi zjistiti přesně počet štěrbin dýchacích, zahlédl jsem jen 2 pupeny, tedy snad jsou na stigmatu zadním také jen dvě štěrbinky.

Hlavní kmeny vzdušnic v těle larev rodu *Syrphus* (obr. 8.) spojuje toliko *přední* komissura. Na larvách z čeledě Syrphidae dobře je znáti, jak tracheje souvisejí s pokožkou jako její vchlípeniny. Při kuklení náhle se tělo larví smršťuje, a svléká. Při tom celý děj postupuje násilně, neboť roztrhává se soustava trachealní na části vnější a vnitřní. Částmi vnějšími jsou přední komissury s kusy hlavních kmenů a velké části hlavních kmenů od zadních stigmat směrem ke středu zadečku. Svědčí o tom kukly Chrysotoxum, v nichž se ukrývá přední komissura s částmi kmenů, a kukly Syrphus balteatus, v nichž nalézáme skoro $^1/_4$ hlavních kmenů vzdušnicových. Z toho je patrno, že část trachejí zůstala v těle kukly, a to je asi ta-o níž píše Wahl, že se její buňky vzrůstem promění v buňky rázu embryonálního, jež přejdou jako takové až do imaga. Nechť prohlíží se mikroskopicky puparium kterékoli mouchy z podřádu Cyclorrhapha, vždy najdou se v nich kusy hlavních trachealních kmenů při *předních stigmatech.* Při *předních i zadních* nalezl jsem je posud jen v kuklách z čeledě Syrphidae.

Křivolaké hlavní kmeny tracheální v larvě Perrisia (obr. 9. *a*) spojuje toliko *zadní* komissura. Stigmatické tlusté větve probíhají od stigmata po boku těla k hlavním kmenům. Mezi kmeny probíhají četné větve vnitřní sice párovitě sestavené a blízko sebe, ale nekorrespondují vzájemně, takže nelze v nich viděti zakrsalých komissur, jako je tomu v larvě rodu Lonchoptera. Zadní komissura vysílá dvě větve, jež se vinou směrem do předu k tukovým tělesům. Podobné dvě větve běží ze zadu do předu i v larvách z podřádu Cyclorrhapha, avšak vyrůstají ze kmenů a nikoli z komissury. Vedlejších kmenů trachealní soustava Cecidomyií nemá. Z hlavních kmenů vybíhají větve vnější po dvou mocnějších v každém článku těla. Nehledí-li se k podřízeným nepatrným větévkám, objeví se

[1]) 7. nedopatřením se opakuje dvakrát.

Tab. II.



4. 5. Ptiolina; dv = křivolaké dorsalní komissury, I., II., III. = vnější větve; lv = vnější (ventralní) kmen; k = přední komissura.
8. Syrphus ribesii; p. k. = přední komissura, gl. s. = slinné žlázy.
9. Perrisia; lateralní pohled na tracheal. soustavu.
10. Cordyla fusca; dorsalní a lateralní pohled na soustavu vzdušnic.

v počtu těchto vnějších větví určitá zákonnitost, která se dá tušiti při zkoumání larev z obou podřádů dipter, ať z Orthorrhaph neb Cyclorrhaph: vládne v počtu vnějších větví číslo 2 a 3, výminkou 4.

Ze stigmatické větve prothorakalního stigmatu odvětvuje se trachea, kteráž štěpíc se ve dvě odnože, vysílá horní z nich k hlavě a dolní do okolí ústrojí zvaného spathula sternalis (obr. 9*b*.).

Přední a zadní stigmata jsou otevřená, ostatní nepochybně uzavřená. Podrobněji zmíním se o nich později.

Abych neztratil priority, uveřejnil jsem před časem částečné vyobrazení soustavy dýchací druhu *Cordyla fusca* L a t r. jakožto předběžnou zprávu. Nyní podávám úplný popis a vyobrazení (obr. 10.). Larva dýchá peripneusticky osmi a osmi průduchy po každé straně. Podle stigmat probíhají na hřbetě dva silné trachealní kmeny hlavní. Od nich odbočují v 1. thorakalním a v 1. až v 7. abdominálním tlusté krátké větve stigmatické do průduchů (stigmat) — obr. 10. Z větve stigmatické prvého stigmatu vybíhá větev, po každé straně jedna, do hlavy, kde se rozvětvuje naprosto jinak, nežli jsem to posavad líčil. Není tu větve zpět zahnuté, z níž by teprve vycházela jedna neb dvě větve k hlavě, nýbrž hlavní kmen jako ztenčená větev pokračuje do hlavy. Tlusté skoro rovné komissury vedou napříč od kmenu ke kmenu, celkem jest jich 10. Distalně vyrůstají z komissury 2 tracheje, proximalním směrem vybíhají 3. Opatřují vzduchem kůži, podkožní svaly a tuková tělesa. Hlavní kmeny nekončí posledním stigmatem, nýbrž zúží se a vzájemně v následujícím článku srůstají. Pravíme tudíž, že jsou vzadu *uzavřené*. Vnější křivolaké větve (obr. 10.) spolu srůstají a činí dojem velmi zohýbaného vedlejšího kmenu. Odtud vycházejí laterálně ventrální větve jednak k zažívací rouře, jednak do ventrálních částí těla; z jednotlivých oblouků vnějších větví vybíhá po jedné lateralně ventralní větvičce.

Při této příležitosti nemohu opomenouti objevu S c h m i t z o v a na larvě druhu *Polylepta leptogaster* W i n n., obyvateli to jeskynním. H. Schmitz nalezl, že této larvě z celé primitivní dýchací soustavy zůstal jen zbytek, jenž záleží ze dvou velmi zkrácených hlavních kmenů, dvou komissur a 4 stigmat. Je zajímavo, že z hlavních kmenů larvy Polylepta odštěpuje se větévka, jež se kličkovitě zahýbá, vidličnatě se dělí a vine se vnitřní větvicí na dorsální část článku právě jako při larvě Cordyla fusca, jenže tuto je podobných větviček sedm a nikoli jedna, poněvadž larva druhu Cordyla fusca má úplnou soustavu tracheální. Pokládám tento zjev za vývojové zjednodušování organismu, jak se pak u strusek vyšších much nápadně jeví.

Po těchto jednotlivých faktech následuj souborný přehled po trachealní soustavě larev dipter vůbec.

Primitivní larvy Mycetophilid mají v soustavě dýchací 2 hlavní kmeny spojené tlustými komissurami. Z hlavních kmenů vycházejí stigma-

tické větve, z těchto odbočují spolu korrespondujíce vnější větve, jež vysílají k ventrální části těla větévky lateralně ventrální (obr. 11. *a*).

Malé zjednodušení nastalo, když vymizely komissury až na *zadní*, ale stigmatické větve zůstaly (Cecidomyidae) (obr. 11 *b*).

V dalších případech vytrvávají vedlejší kmeny; ze skutečných komissur zůstala *přední* i *zadní*, vnitřní větvice spolu korrespondují v podobě zakrsalých tenkých komissur (Lonchoptera). (obr. 11 *c*.) Toto zjednodušení může postoupiti ještě o krůček dále, totiž tak, že z komissur zůstane *jen přední*, a vše ostatní opětuje se jako u Lonchoptery (Ptiolina) (obr. 11 *d*.).

Vymizí-li i *zakrsalé komissury*, proměnivše se v samostatné páry vnitřních větviček, a *zadní komissura*, vznikne dýchací soustava zase o stupeň jednodušší, ale *s hlavními* i *vedlejšími* kmeny a s *přední* komissurou. Tento stupeň má souběžný vývoj, při němž vymizelo vše, jak shora bylo vylíčeno, i zadní komissura; zůstala však *přední* komissura. Vzorem byla dýchací soustava larev z rodu Helomyza. Podobně vyvinula se soustava trachealní u mnohých druhů ze skupiny Holometopa.

Velmi zjednodušenou soustavu dýchací mají larvy z čeledě Syrphidae, při nichž dva *hlavní kmeny* spojuje jen *přední komissura*; vnitřní a vnější větve nesrůstají (obr. 11. *f*.).

Mladé larvy z čeledě Dexidae mají obě komissury (obr. 11. *e*.), kdežto mladé larvy Trypet vyznačují se jen zadní komissurou (obr. 11. *g*.).

Nejjednodušší soustava trachealní je soustava jen ze *dvou hlavních kmenů bez komissur* (Vermileo a mnohé larvy čeledě Muscidae).

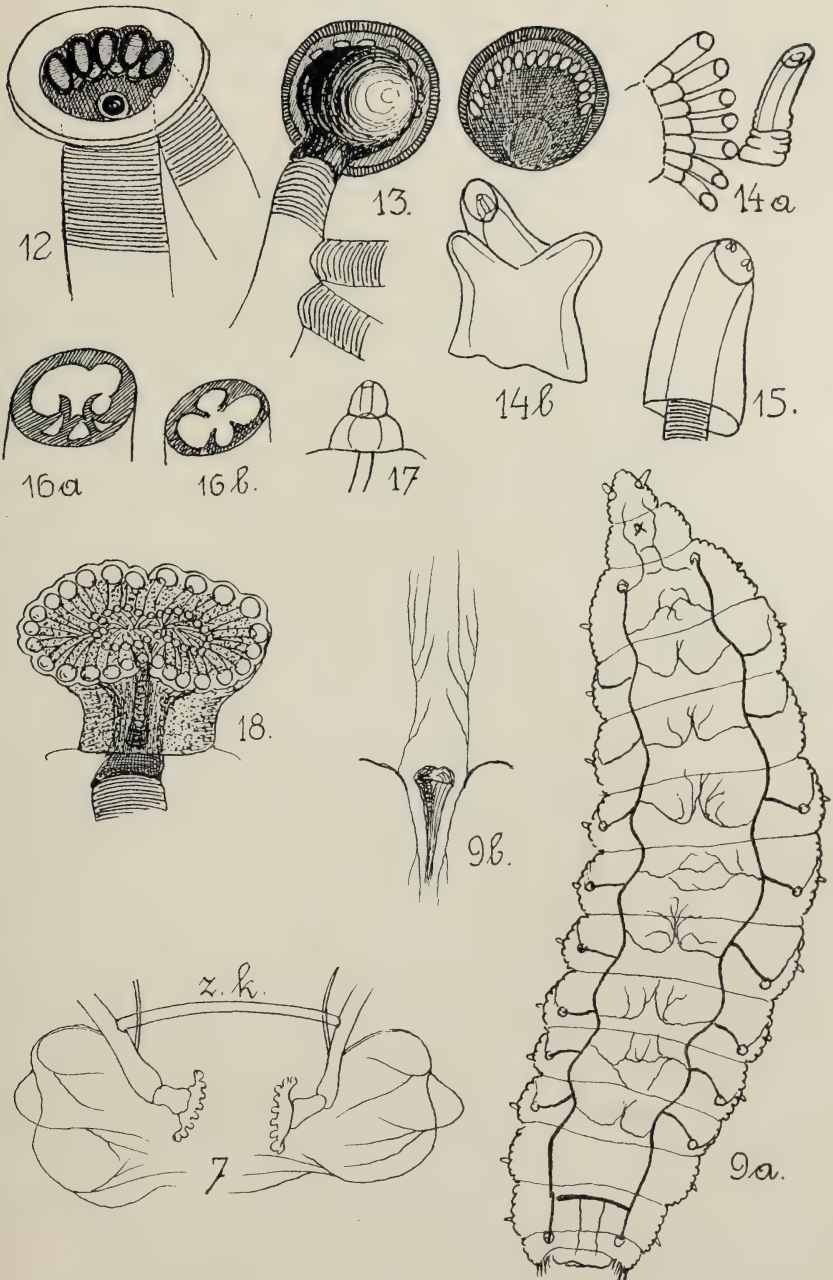
Ze všeho, co bylo posud řečeno, plyne, že v trachealní soustavě larev hmyzu dvojkřídlého jsou dva *hlavní* kmeny, neb *hlavní kmeny s vedlejšími*. V prvé skupině oba hlavní kmeny spojují buď *komissury v jednotlivých článcích*, buď komissury *dvě* (přední i zadní), buď komissura *jediná* (přední neb zadní); konečně jsou hlavní kmeny vůbec *bez komissur*.

Soustava s kmeny hlavními i vedlejšími má při prvém oddělení larev zakrsalé komissury ve článcích, a to v podobě tenkých, křivolakých větviček; vedle toho má řádné *dvě* neb jen *jednu* komissuru. Druhému oddělení larev chybí zakrsalé komissury, hlavní kmeny pak spojuje jen *jedna* komissura (přední nebo zadní).

II. O stigmatech.

Po stránce morphologické pojednal o stigmatech larev hmyzu dvojkřídlého de Meijere s hlediska vyššího, při čemž dokázal, jak bylo již dříve řečeno, že stigmata larev jsou stigmaty složenými. Trachea připojuje se k plsťové komoře, z níž vystupuje sloupek a na temeni se k ní přikládají pupeny.

Tab. III.



7. Larva Phytomyzy; z. k. = zadní stigma.
9. *a*, *b*. Perrisia; a = dorsalní pohled na tracheal. soustavu, *b*) větev hlavy a spathuly.
12. Mycetophyla xanthopyga; abnormální stigma prothoracalní.
13. Xylophagus cinctus; stigma.
14. Phannia (Homalomyia); *a*) stigma prothorocalní, *b*) zadní.
15. Scatopse notata; zadní stigma.
16*a*, *b*. Řezy plsťovou komorou.
17. Prothoracalní stigma larev Cecidomyií.
18. Stigma.

Ač se de Meijerovi podařilo stanoviti schema pro stigmata larev, přece mnohotvárnost jejich poskytne při podrobném studiu ještě dosti zajímavých podrobností.

Tuto zvláště upozorňuji na prothoracalní stigma larvy *Mycetophila xanthopyga* Winn. pro jeho neobvyklý tvar. Na chitinovém terčku sedí proti sloupku *pět* štěrbinek (obr. 12.), opatřených řádnými peritrematy s chitinovou síťkou. Dvě mocné trachealní větve vybíhají ze stigmatu. V tomto, patrně abnormálním stigmatu překvapuje počet (5) dýchacích štěrbinek, poněvadž nejmohutnější stigma na těle larev z čeledi Mycetophilidae, *zadní stigma*, mívá jen tři, kdežto prothorakální stigma často jen dvě štěrbinky.

Zajímavou stavbou také vyniká přední stigma (prothorakalní) na larvě druhu *Xylophagus cinctus* Deg. Při pohledu ventrálním, tedy z vnitřku těla (obr. 13.), jeví se jako kulatá plsťová komora, jež svým krčkem objímá připojující se tracheji. Vsunuta je do chitinového terčku. Vně vypadá stigma jako tmavý kroužek z chitinu (obr. 13*b*.) obklíčený chitinovou obrubou. Vnitřní tmavý terček odpovídá temeni plsťové komory a sedí při jeho předním kraji 16 maličkých pupenů, zda-li se štěrbinkami či jenom s blankou uprostřed, nelze udati. Bělavý kruh na polu protivném je asi prokmitávající obrys hranice mezi trachejí a plsťovou komorou.

Stigma larev druhu *Phannia* (Homalomyia) v podstatě nakreslil a popsal již Dufour počátkem minulého století. Přece však i tu objeví se oku ozbrojenému zajímavé podrobnosti. Každý pupen prothorakalního stigmatu je válcovitý, mírně zahnutý a na basi opatřen malou vrásčitou podložkou (obr. 14*a*), jež svoji dutinkou korresponduje se společnou plsťovou komorou. Na terminalní plošce jeví se por, od něhož vede zřetelná rourka do dutinky ve vrásčité podložce. Tyto rourky marně hledáme v pupenech vějířovitých stigmat na larvách Holometop.

Zadní stigma (obr. 14*b*.) také se liší od obvyklé formy zadních stigmat z čeledí Muscidae a Anthomyidae. Má sice normální tři pupeny i terminalní plošky pro štěrbinky, ale štěrbinek ani peritremat jsem nenašel. Za to viděl jsem na terminalní plošce kruhovitý otvůrek, z něhož vedla rourka do výběžku plsťové komory. Ocitáme se tu před zjevem neobvyklým ve veliké skupině muší zvané Anthomyidae, že zadní stigma je obdobně stavěno jako stigma přední, což jest charakteristikou pro stigmata velikého množství larev avšak ze skupiny Holometopa.

Pokavad jsem mohl seznati z literatury, kreslí se dlouhá zadní stigmata larev *Scatopse notata L.* jako válečky s terminalní ploškou, na niž sedí okrouhlé ostium. Proti tomu nalezl jsem že larva výše uvedeného druhu má na terminalní plošce *čtyry malé pupeny* (obr. 15.), nikoli tedy jedno veliké ostium. Uvnitř pokožkové schránky vine se plsťová komora.

O této ještě několik slov. Na řezu plsťovou komorou v larvě Lonchoptera nakreslil de Meijere vedle průřezu sloupku několik chitinových příček. Plsťová komora každé larvy není však tak důkladně vystužená

jako u Lonchoptery. Larva Phytomyzy má komoru jednodušší (obr. 16*a*.), právě tak larva Pegomyia hyosciami, v jejíž komoře jsou 4 samostatné dutinky (16*b*.).

Na stigmatech larvy Cordyla fusca dokázal jsem, že ani k nim nepřiléhá trachea bezprostředně, nýbrž velmi úzkým proužkem, jenž je snad rudiment plsťové komory.

Věnoval jsem bedlivý zřetel též stigmatům larev Cecidomyií a nalezl jsem po dlouhých a namáhavých pracích, že stigma skládá se ze spodní širší a horní užší papilly (obr. 17.). Horní papilla má na temeni štěrbinku, z níž pokračuje lumen do širokého baňkovitého útvaru (obr. 17.), k němuž se připojuje trachea; tak vypadá prothorakalní stigma většiny larev Cecidomyií.

Dle toho počíná býti pravdivějším a pravdivějším názor můj, že *v larvách dipter nepřipojuje se trachea bezprostředně k štěrbinám dýchacím, nýbrž prostředečně baňkovitými útvary, z nichž některé jsou skutečně plstové komory.*

Nejen v kuklách, ale i v larvách lze najíti stopy dokladů o pokožkovém původu trachejí. Přední stigma larví druhu *Pegomyia bicolor* zřejmě svědčí, že hypodermový epithel obnovovací je uvnitř stigmatu. Tvoří se totiž uvnitř pupenů a plsťové komory před svlékáním nové pupeny a nová plsťová komora (obr. 18.).

Tolik prozatím o vedlejších zjevech, jež se naskytly při zkoumání na trachealních soustavách larev hmyzu dvojkřídlého.

LITERATURA.

1840. L. Dufour. Second mémoire sur les métamorphoses de plusieurs larves fongivores appartenant à des Diptères. — Ann Soc. Natur. Paris. 11. sér. t. 13. p. 169.

1878. Batelli. On the anatomy of the larva of Eristalis tenax. — Soc. Tosc. di Sccienze Natur. Proc. verb. n.

1883. Fr. Brauer. Die Zweiflügler des kaiserlichen Museums zu Wien. III. — Denkschrift. d. k. Akademie d. Wissensch. Math.-Naturwiss. Classe. 57. Bd. p. 1—96.

1886 Fr. Meinert. De eucephale Myggelarver. — Wid. Selsk., 6 Raekke, naturvid. og math. Afd. III. 4. Kjöbenhavn. p. 371—493.

1896. Dr. J. C. H. de Meijere. Über zusammengesetzte Stigmen bei Dipteren — Larven. — Tijdschr. Entomol. V. 38.

1897. Bengtsson. Studier öfver Insektenlarva. I. Till. Könnedomen om larven af Phalacrocera replicata. — Lundes Univers. Arsskrift. Bd. XXXIII.

1899. Bruno Wahl. Über das Tracheensystem und die Imaginalscheiben der Larven von Eristalis tenax. — Arb. Zool. Instit. Wien. T. XII. 1. H. p. 45.

1900. Miall L. C. and Hammond A. R. The structure and life history of the harlequin Fly.—Oxford.

1900. Dr. J. C. H. de Meijere. Über die Larve von Lonchoptera. Ein Beitrag zur Kenntnis der cyclorrhaphen Dipterenlarven. — Zoolg. Jahrbüch. XIV B. p. 87—132.

1901. J. Pantel. Sur quelques détails de l'appareil respiratoire et de ses annexes dans les larves des Muscidées. — Bull. Soc. Ent. Fr. Nro 4, p. 576.

1909. Dr. Trägardh. Zur Kenntnis Phytomyza xylostei Kaltb. — Zeitschr. f. wiss. Insektenbiol. Bd. V. Heft 10.

1909. A. Vimmer. Anatomické poznámky o larvách Blepharoptera serrata L. a Pegomyia conformis Neidl. — Čas. Č. Sp. E. R. VI. č. 3. p. 109—113.

1909. A. Vimmer. Larva bedlobytky Cordyla fusca Ltr. — Čas. Č. Sp. E R. V. č. 4. p. 148—153.

1910 Dr. Franz Tölg. Billea pectinata Mg. als Parasit von Cetoniden- und Cerambyciden-Larven. Zeitschr. f. wissen. Insektb. Bd. VI. p. 208—211. 278—283. 331—36. 387—95. 526—30.

1911. A. Vimmer. Příspěvek k poznání kukel z čeledě Syrphidae. — Čas. Čes. Sp. Ent. R. VIII. č. 4. p. 109—119.

1912. D. Keilin. Recherches sur les Diptères du genre Trichocera. — Buli. Sc. de la France et Belg. T. XIVI, p. 172—190

1913. Dr. Franz Tölg. Biologie und Morphologie einiger in Nonnenraupen schmarotzender Fliegenlarven. — Centralbl. f. Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten. 37 Bd. p. 392—412.

1913 H. Schmitz. S. J. Biologisch.-anatomische Untersuchungen an einer höhlenbewohnenden Mycetophilidenlarve Polylepta leptogaster Winn. — Naturhist. Genootschap in Limburg.

1913. D. Keilin. Formes larvaires et biologie d'un Cynipide entomophage Eucoila Keilini Kieff. — Bull. Scient. de la France et d. la Belgique 7. ser. T. XLVII. p. 88—104.

1913. D. Keilin et Picado. Evolution et formes larvaires du Diachasma Crawfordi n. sp. — Bull. Sc. de la France et Belg. T. XLVII, p. 88—104.

1913. D. Keilin. Sur une formation fibrillaire intracellulaire dans la tunique de la glande salivaire chez les larves de Syrphinae. — Compt. Rend. Acad. Sc. Paris T. CVI. N. 11. p. 235—283.

1913. M. Bezzi. Blefaroceridi Italiani con descrizione di una nuova forma e di due specie esotiche. — Bull. del. Società Ent. Italiana. Firenze. Anno XLIV. p. 1—114.

1913. A. Vimmer. Ergänzungen zu dem Aufsatze „Zur Kenntnis Phytomyza xylostei Kltb." — Zeit. f. wiss. Insektb. B. IX., Heft 1, p. 19—21.

1914. Julius Komárek. Über die Blepharoceriden aus dem Kaukasus und Armenien. — Sitzungsb. der Kön. Böhm. Geselsch. der Wissensch. in Prag p. 1—19.

Příspěvek k poznání morfologického vývoje české tabule křídové.

(S 6 obr. v textu.)

Napsal Dr. **Václav Dědina.**

Severočeská tabule křídová, pokud nepodlehla v době třetihorní a pleistocénní destrukci, jeví přes jednotný původ ve svých různých oddílech značně odchylný ráz. Na jedné straně — v Českém Středohoří a v Poohří, rozpadla se v nesčetné kry o nestejné výšce a sklonu; rozsedlinami, jež je oddělují, pronikly na povrch vyvřeliny, které v podobě proudů, čoků neb žilných suků v krajině dominují. Také v sousední plošině Dubské jsou pro morfologii krajinnou směrodatnými erupce. Teprve v oblasti položené jižně od Polomených hor a ohraničené Jizerou a Labem jest souvrství křídového útvaru v podstatě hlavním činitelem vně-morfologickým.

Za topografický podklad studií, jejíž předmětem jest oblast posléze naznačená, sloužily listy rakouské specialní mapy v měřítku 1 : 75000, a to:

pásmo 4. — sloupec XI: Mělník (vých. polovina),
„ 4. „ XII: Ml. Boleslav (záp. okraj) a
„ 5. „ XI: Praha (sev. část).

V zájmu doplnění výškových cót byl mi propůjčen výtečný aneroid a horizontální sklíčko a pro další orientaci geologický kompas, vesměs z mineralogicko-geologického ústavu vysoké školy technické v Praze, a to laskavostí přednosty téhož ústavu pana prof. dra C. ryt. Purkyně, jemuž děkuji za to, jakož i za mnohé rady a pokyny studií mojich se týkající, co nejsrdečněji. Neméně a z týchž důvodů zavázán jsem díky p. prof. drovi J. V. Danešovi.

Část české tabule křídové, rozložená mezi Jizerou a Labem a na severu omezená Polomenými horami, jest ve své morfogenesi tak poučna, že bude tvořiti klíč k poznání morfologického vývoje veškeré křídové tabule. Pozorujeme-li kraj s kteréhokoliv vyvýšeného bodu, spatříme kolem sebe

rovinu, z níž jen málo a nevysokých výčnělků — čedičové suky na SZ vyjímaje — se zvédá. Jednotvárnost krajiny stupňuje se při tom okolností, že oku pozorovatele na první pohled unikají četné žlaby údolní, jimiž oblast celá jest rozbrázděna, a to ve čtyrech různých směrech:

a) VSV—ZJZ (směr rudohorský),
b) ZSZ—VJV (směr sudetský[1]),
c) SSV—JJZ (směr „vltavský" n. „jizerský")[2]) a
d) SZ—JV.

a) Směrem rudohorským probíhá:
1. údolí Košáteckého potoka, pak
2. Řepínský důl před svým vyústěním do údolí Kokořínského,
3. tok Jizery od Nových Benátek k Sobětuchám,

Obr. 1.

4. „Dlouhý důl", větev údolí Bělského (vyobr. 1. *d*), toto pak až k hájovně „Bělá" a jiné

---

[1]) S u d e t s k ý směr bývá označován jako směr „hercynský" neb „šumavský". Nevhodně! Jednak že tektonické pohyby směru SZ—JV nemají přímého vlivu na tekt. poměry v Sudetách; tu pak musíme rozeznávati směr k r k o n o š s k ý (VJV) a směr o r l i c k ý (JJV), jímž probíhají směrodatné zde tektonické linie, litická, potštýnská a česko-třebovská.

[2]) Směr „v l t a v s k ý" není nikde S—J, v oblasti palaeozoické synklinály míří k SSZ, tam tedy jest kolmý k směru rudohorskému; na východě má — jmenovitě v rozsahu tabule křídové — směr SSV — JJZ. Jest to směr ř. Jizery v jejím středním toku od Mn. Hradiště k N. Benátkám, kdež se geneticky směr ten uplatňuje, ač neliší se mnoho ani od přímé linie celého toku jizerského. Směr SSV—JJZ lze tedy nazvati též vltavsko-jizerským, neb v sev. Čechách jen „j i z e r s k ý m".

5. četné úryvky postranních větví údolí Kokořínského a Líběchovského.

b) Směr sudetský má

1. údolí Bezvelské (obr. 1. — *bz*),

2. „ Bělské (*bl*) mimo část výše vytčenou a

3. některé pobočné větve jiných údolních soustav, jmenovitě údolí doubravické (*db*), protilehlé valovické (*v*), trnovské (*t*) a j.

c) Směrem vltavsko-jizerským jde

1. údolí Jizerské od Mnich. Hradiště k N. Benátkám,

2. některé větve údolí strenického (*st*) a to: údolí březovické (*b*), sudoměřské (*s*) a spikalské (*sp*), pak

3. údolí Kokořínské po Lhotku a

4. „ Líběchovské s některými úryvky jeho levých větví.

Směr JV jeví

1. údolí Kojanské (*k*),

2. „ Strenické (*st*),

3. „ Vrátenské (*vr*) a Chorušické, přecházející společně v údolí Košátecké (viz skup. a_1).

Údolí prvních tří směrů (*a, b, c*) jsou většinou tektonická[3]) a shodují se, jak jména jejich směrů naznačují, s tektonickými liniemi, zavládajícími v celých Čechách, ano i ve veškeré střední Evropě.

Údolí čtvrté skupiny (*d*) jsou svahová. J. N. Woldřich[4]) pokládá sice Chorušické údolí za tektonické a to dle všeho pod vlivem názoru Krejčího, který praví, že „rozsedliny v Jizerském pískovci západně od Jizery mezi Kokořínským a Jizerským údolím, dle nichž množství roklí a malých údolí vybrázděno jest, počítati lze k soustavě této“ (krkonošské).[5]) Názor ten, který, jak vidno, málo kategoricky vyznívá, potvrdil se zdánlivě, ač ještě jen částečně, studiemi Č. Zahálky, jmenovitě profilem, který vedl týž auort od Nemyslovic k JZ.[6]) Profil zastihuje t. zv. Chotětovskou dislokaci, a to nedaleko při spoji údolí Chorušického a Vrátenského a tedy při počátku údolí Košáteckého.[7]) Jest tudíž řečenou studií zjištěno, že Chorušické údolí jest při vržení Chotětovském dislokačním, pro další však, a to horní (SZ) průběh jeho není nijakých důvodů, viděti zde jakou-

[3]) Viz studie Č. Zahálky o „pásmu IX útvaru křídového z okolí Řipu“ a o pásmu III—X v Pojizeří. Věst. kr. č. spol. nauk, r. 1895, 6 — pak 1902 — 5. Jen pro údolí a_4 a b_3 nelze tou dobou ještě tektonický původ prokázati.

[4]) Dle „zprávy o podzemní detonaci z Mělníka v Čechách dne 8. dubna 1898. Rozpr. Č. Akad. c. Fr. Jos. tř. II. roč. VIII. (1899) č. 7. Viz přil.

[5]) Stať: „Směry, dle nichž se v česk. kříd. útvaru vyzdvižení stalo“ v závěru Studií z oboru kříd. útvaru v Č. I. Archiv pro přír. prozk. Čech I, 2.

[6]) Pásmo III. a IV. kříd. ú. v Pojizeří, obr. 9.

[7]) Č. Zahálka nazývá i toto údolí Vrátenským. Pokládám však za vhodnější, nazvati tuto nejspodnější část údolím Košáteckým, jednak protože tohoto jména se v kraji skutečně užívá, zvláště pak pro specifický směr i ráz údolí toho, jejž také Č. Zahálka postřehl.

koliv tektonickou poruchu. Stejného názoru jest — jak mi k příslušnému dotazu laskavě sdělil — sám Č. Zahálka.

Chotětovskou dislokaci pokládati lze buď za pokračování tektonické linie Košáteckého údolí, neb aspoň za člen dislokačního systému rudohorského.

Máme-li řešiti otázku stáří jednotlivých, výše řečených soustav poruchových, jest úkol takový stížen okolností, že severočeská tabule křídová, jmenovitě vytčená její oblast, není pokryta nijakými uloženinami třetihorními; pouze vrstvy pleistocénních štěrků, písků a hlin jsou zde přítomny. Jest tudíž možno odhadovati stáří tektonických a jiných morfologických změn, pokud se dály v dobách třetihorních, pouze ve srovnání s takovými ději, které mající ráz příbuznosti probíhaly v nedalekých oblastech a tam dají se stratigraficky co do stáří svého určiti. Klíč k takovému postupu podávají poměry v Českém Středohoří, kdež vývoj rozsedlin šel ruku v ruce se vznikem pánve podrudohorské, při čemž předchozí fáse erosivní změnila se tam v děje akkumulační. Tektonické poruchy zasáhly až do oblasti naší, jsouce spojeny s erupcemi, zde (na rozdíl od výlevných spoust středohorských) jen sporadickými.

Na základě poznání tektonických poruch a je doprovázejících vyvřelin v Českém Středohoří a ze srovnání těchto poměrů s nejzazšími výhonky třetihorních erupcí vychází názor Bořického,[8]) že na *dislokace určitých směrů vázány jsou eruptivní horniny jim příslušných kategorií.* Hlavně to platí o basaltických erupcích, kdežto znělce vyvřely rozsedlinami, které za výlevů prvních byly připraveny.

Za nejstarší pokládá Bořický poruchy směru rudohorského, mladší jsou tektonické linie směru sudetského, nejmladší pak ty, jež jsou směru vltavsko-jizerského.

Kontrola Bořického hypothetického pojetí jest znesnadněna okolností, že některé dislokace, zvlaště sudetské a jizerské, jen v skrovné míře projevovaly se vulkanicky, a na druhé straně erupce nevážíse vždy na poruchy vně zející; pronikajíť sice na venek zajisté v pásmech minimalní soudržnosti kůry zemské, ale tento mechanický činitel týče se asi hlavně poměrů, jež podmiňují vzestup magmatu v salických pásmech hlubinných. Tektonické poměry stratosféry nejsou tedy vždy směrodatny pro seskupení vnějších zjevů vulkanických.

Také některé konkretní udaje Bořického bude třeba revidovati. V Českém Středohoří děje se to již monumentální prací Hibschovou.[9])

---

[8]) Petrografické studie čedičového horstva v Čechách. Archiv pro p. p. Čech II. 1. b. st. 190 a n.

[9]) „Geol. Karte d. b. Mittelgebirges" v Tschermakových „Min. u. petrog. Mitteilungen", a to sekce I. (Děčín) r. 1896, II. (Roztoky— Podmoklí) 1900, III. (Benešov) 1898, IV. (Ústí n. L.) 1904. V. (V. Březno) 1902, VI. (Verneřovice) 1910, VII. (Teplice-Bořislav) 1908, VIII. (Zálezly) dosud nevyšlo, IX. (Litoměřice-Třebušín) 1903, X. (Levín) —, XI. (Kostomlaty) 1905, XII. (Lovosice) 1909.

Žel, že není tato ještě hotová; snad proto též autor nezaujal dosud stanoviska k názoru Bořického o poměru různých pohybů dislokačních k differenciaci magnatu v středohorském ohnisku sopečném. Než v hlavních rysech své theorie sotva byl Bořický na omylu; jest velmi pravděpodobné, že mezi tektonickými pohyby určitých směrů s jedné a štěpením magmatu s druhé strany jest přímý příčinný vztah, třebas že jde tu jen o jeden z mnohých činitelů differenciačních.

Na základě Bořického analysí lze souditi, že pokles a vývoj rozsedlin směru rudohorského zasáhl také v oblast naši, ano i dále na východ až do okolí Jičína. Názor takový byl by podporován — ovšem v rámci theorie řečené — prací Bř. Zahálky „O některých eruptivních horninách z okolí Mšena a Mělníka“.[10]) Augitity v různých modifikacích a limburgity zde konstatované náleží prvnímu erupčnímu období vázanému na dislokace směru rudohorského. Než právě naše a sousední Dubská plošina jest to, kdež se směrem rudohorským kříží se druhé, mladší soustavy poruch. Nasvědčuje tomu jednak přehled tektonických údolí výše podaný a pak přítomnost plagioklasických basaltů u Mšena, jež náleží druhému období tektonických pohybů o směru sudetském a pak trachyty a trachybasalty, spadající v období nejmladší o směru jizerském.

Vedle otázky prosté posloupnosti pohybů tektonických, jejíž přesné a exaktní řešení nutno ještě přenechati budoucnosti, bude třeba zjistiti bližší data o stáří řečených pohybů a erupcí. Podobné snahy mohly se však dařiti z udaných již důvodů jen v pánvi podrudohorské, kde jsou přítomny usazeniny třetihorní, v nichž se střídají uhlonosné vrstvy slepenců a písčitých jílů s tuffy a tuffity sopečnými. J. E. Hibsch[11]) zjistil na tomto stratigrafickém základě v krajině teplické, kde jde převážně o dislokace směru rudohorského (ostatní jsou podřadné), pro počátek erupcí stáří těchto z první doby svrchního oligocénu. Jest ovšem pravděpodobno, že vývoj polomu podrudohorského a jednotlivých linií tektonických téhož směru neprobíhal všude zcela současně, že totiž pokles a vznik rozsedlin postupoval časově od hlavního vržení rudohorského v pásmech rovnoběžných do nitra země, že však na druhé straně nevyžadoval proces ten doby příliš dlouhé, takže vývoj rozsedlin zasáhl do territoria, které jest předmětem přítomné rozpravy, ještě před koncem doby oligocénní. Tohoto stáří jsou asi ony dislokace, které daly vznik tektonickým údolím naší skupiny *a*). Při tom není vyloučeno, že tyto linie neztratily pohyblivosti ani při pozdějších pohybech zeměkůry, třeba že tyto měly hlavní účinek v dislokacích sudetských neb jizerských.

---

[10]) Věst. kr. č. spol. nauk, 1905. III.

[11]) Über die Lagerung und Altersverhältnisse einzelner Glieder der nordböhm. Braunkohlenablagerung. Jahrb. d. k. k. geol. RA. 1902, S. 87.

V tom ohledu jest pozoruhodno, že při podzemní „detonaci mělnické“[12]) ze dne 8. dubna 1898 objevilo se territorium tohoto symptomu geotektonické pohyblivosti protažené dle osy o směru rudohorském. Z. od Labe tvoří osu tuto dislokační linie Červeného potoka a dolní Vltavy od Vraňan k Mělníku; v naší oblasti (V od Labe) jest řečené territorium protaženo dle linie rovnoběžné s údolím Košáteckým a Řepínským.

Pro odhad stáří sudetských dislokací nutno uchýliti se k srovnání s vývojem stejnosměrných poruch, jimiž zasažena byla Šumava, hlavní v bavorském svém úbočí. L. Puffer[13]) na základě tektoniky sladkovodních usazenin třetihorních v Bavorsku přikládá stupňovým dislokacím šumavským stáří pontické, svrchně miocénní a soudí, že také „v severních a jižních Čechách máme před sebou poruchy z doby svrchního miocénu“. Puffer měl sice na mysli Čechy severozápadní, kdež na př. v Horách Doupovských mimo dislokační system rudohorský zavládá též směr sudetský, ale jest samozřejmo, že při pohybech tektonických, v celém českém massivu v řečené době všeobecně panujících, oblast naše nemohla činiti výjimky.

Pro současnost tektonických pohybů, jež zastihly v době třetihorní Sudety a jejich podhůří, mluví také okolnost, že jde tu nejen o stejný směr, ale též o stejnou povahu pohybů. Zde jako v Šumavě neb v Doupovských horách děje se propadavý pohyb v stupňových zlomech, zde jako tam vznikají neb orograficky se vyhraňují hrástnatá pohoří (Šumava, Krkonoše), nejde však zde ani tam o pohyby vrásnivé horotvorné.

Nejmladší období erupcí a pohybů tektonických o směru jizerském nemůže býti značně vzdálené. Ukazuje k tomu okolnost, že ještě v době současné toto poslední období jeví v teplých a mineralních pramenech své dozvuky. Pokud se týče údolních rýh původu dislokačního, jako jest „údolí Jizerské od ústí Mohelky až ku konci u Toušně,“ pak rovnoběžně s tímto údolí Kokořínské, Liběchovské a některé úryvky Obrtky a potoka Vrutického u Ouště — veškerá tato soustava rýh svým vznikem — „zdá se, že souvisí s posledním vystoupením čedičů, avšak možno, že zasahuje též do doby diluviální.“ „V oboru Labského pískovce náleží sem Labské údolí mezi Děčínem a Hřenskem a doliny a rokle v českosaském Švýcarsku s ním rovnoběžné.“[14]) V souzvuku s tímto názorem shledáno bylo, že i v Česk. Středohoří jsou dislokační linie směru S—J původu mladého. Netřeba předbíhati konečným závěrům, k nimž v tomto směru asi záhy dospěje Hibsch ve svých výše řečených studiích; než výsledky práce Staffovy a Rasmussovy[15]) již nyní ukazují, že na př. část toku Labského

[12]) Viz J. N. Woldřich na u. m.

[13]) Der Böhmerwald und sein Verhältnis zur innerböhmischen Rumpffläche. S. 159. Geog. Jahrresb. a. Ö. VIII. (1910).

[14]) Krejčí, na u. m. st. 154.

[15]) Staff-Rasmuss, Aus der Morphogenie der sächsischen Schweiz. Geol. Rundschau, 1911.

nad Hřenskem, jmenovitě od Elbleiten výše k Děčínu, jeví jediný cyklus vývojový. Též na druhé straně v Čechách severovýchodních bylo zjištěno J. N. Woldřichem, že údolí Javorky mezi Bělohradem a Ostroměří vzniklo jako puklina v době pleistocénní a to po saském, hlavním zalednění. — Zavládaly tedy v době pleistocénní v celém asi českém massivu a — dle geologů německých také v celé střední Evropě — poruchy tektonické. Rozprava přítomná bude pak pro toto poznání dalším dokladem.

Sem patří již ta okolnost, že údolí směru jizerského (viz skupina *c*) nesou vesměs ráz velmi mladistvý. Jednak: údolí tato nemají vývojových teras. Známé malebné terasy kokořínské nejsou vývojovými; jsou výsledkem různé formy, jíž erose postupuje ve vrstvách kvádrových pískovců na rozdíl od erose opukových vložek (viz IX. a pásmo a některé horizonty v IX. *c*); první vymílány jsou srázně, druhé tvoří povlovné stráně. Dále: okrajní hrany údolní jsou ostré, postranní větve údolní jen neznačně rozřezávají náhorní rovinu; jen tam, kde větve tyto použily starších erosivních rýh, a kde šlo tudíž jen o nové oživení děje výmolného, jsou pobočná údolí rozvinutá a náhorní rovina hustěji rozřezána. (Kraj mezi Kokořínem a Brocnem.)

Naproti tomu mají starší údolní rýhy směru sudetského a rudohorského, pokud pro oživení erose nebylo podmínek, vzezření velmi starobné. Zřetelně ukazuje kontrast mezi starobnou a mladistvou tvářností údolí Košátecké s jedné (viz výše skup. a_1) a jeho větve Chorušická a Vrátenská (skup. d_3) s druhé strany. Č. Zahálka[16]) pozastavuje se nad tím, že severně za dislokací Chotětovskou mění se ráz krajiny; údolí Chorušické a Vrátenské a jich četné větve že nemají již tak povlovné stráně údolní (jako údolí Košátecké), nýbrž mnohem příkřejší. Příčinu toho hledá Zahálka ve změně petrografických poměrů; místo totiž pásma IV. a V. za dislokací (následkem této) vychází na den pásmo IX.

Než vůči vyslovenému zde výkladu lze namítnouti jednak, že pískovce tohoto pásma rozpadajíce se vedly by, a to tempem ještě rychlejším než písčité slíny pásma IV., k tvarům velmi plochým, mimo to pak na povrchu spočívají písčité vrstvy pásma V. petrograficky nepříliš odchylné od pískovců pásma IX *c*, *d*. Změna krajinného rázu jest zde tedy vyvolána jiným činitelem, a tím jest různé vývojové stáří řečených údolí.

Údolní rýhy směru rudohorského a sudetského byly by v době současné morfologicky již zahlazeny, jak tomu jinde jest (viz níže), kdyby novější fáse tektonických pohybů nebyla v nich vyvolala recidivy poruchové neb kdyby následkem snížení erosivní báse nebyly novými epicykly prohlubovány. V tom případě vznikly vývojové terasy, jako na př. v údolí Bezvelském (viz sk. *b*) systém sudetský). Také v ostatních rýhách dislokačních, i v nejmladší, jizerské skupině (*c*) jsou přítomny uloženiny

[16]) Pásmo III. a IV. v Pojizeří st. 11. Na u. m.

pleistocénní na dně údolním. V údolí Košáteckém, Kokořínském a Řepínském náleží dno důlu dle G. Laubeho[17]) v rozsah spodní terasy labské. Též výplň „mělnického příkopu" u Liblic, Čečelic, pak celý pravý břeh Labe až po Jizeru a odtud k Lysé n. L. tvoří vesměs akkumulační, na mnoze nijak nekrytou spodní terasu mladšího původu pleistocénního.[18]) Jelikož tato svým niveau odpovídá spodní terase Purkyňově z pořící Mže a Vltavy,[19]) pak třebestovické neb místy zvěřínecké terase Sokolově z okolí Nymburka a Sadské[20]) a U-terase Engelmannově z okolí Řípu,[21]) možno míti za to, že údolí tektonická skup. *c* byla v mladším pleistocénu tektonicky a do značné míry také erosivně již založena.

To však nelze říci o svahových údolích naší skupiny *d*. Mimo řečené již znaky mladého stáří a rázu — ostré hrany údolní, neznačné rozřezání náhorní pláně (viz obr. 1.) a nedostatek vývojových teras, přistupuje k určení neznačného stáří údolní soustavy této okolnost, že pleistocénní uloženiny v ryhách údolních se neobjevují, naopak že tyto uloženiny jsou erodovány, přetínány a v jednotlivé partie isolovány výmolným cyklem, jichž výsledkem jest celá soustava údolní (skup. *d*). Jest tedy tato soustava mladší, než systém dislokačních údolí skup. *c*.

Máme-li poznati povahu a první dobu vzniku této soustavy údolní, jest třeba pozorovati vnější i vnitřní morfologii[22]) kraje. Povšímněme si předělových čar mezi údolími sousedními! Jak známo, probíhají čáry takové zpravidla klikatě; zde není tomu tak, nýbrž postranní větve paralelních údolí (viz obr. 1. na př. $v_1 - t$ neb $a_3 - a_4$) vybíhají sobě vstříc, na druhé straně pak větve téhož údolí ($db_2 - v$) rozbíhají se diametrálně. Není věru nesnadné konstruovati z jednotlivých úryvků dnes paralelních údolí a jejich větví průběh údolí staršího data a cyklu o směru sudetském (ZSZ—VJV). Podobné vnější morfologické stopy zašlého cyklu erosivního jeví celá oblast. Vše činí dojem, že dnešnímu, recentnímu výmol-

---

[17]) Die im Auftrage d. böhm. Sparcassa durchgeführten Vorarbeiten zur Wasserversorgung v. Prag u. s. Vororten. Lotos. 1899, st. 257.

[18]) G. Laube, na u. m. — J. Krejčí, R. Helmhacker, Vysvětlení geol. mapy okolí Pražského, Archiv pro p. p. Č. IV$_2$ s. 127.

[19]) C. r. Purkyně, Terasy Mže a Vltavy. Sborník č. spol. zeměvědné XVIII, zvl. ot. 156 a n.

[20]) R. Sokol, Tarasy stř. Labe v Čechách I. Rozp. Č. Ak. II. r. 1912 č. 28, st. 29 a n.

[21]) R. Engelmann, Die Terassen d. Moldau-Elbe zwischen Prag u. d. böhm. Mittelgebirge. Geog. Jahresb. a. Ö. 1911 (IX) S., 38 a n.

[22]) „Vnitřní morfologie" jeví se jako paradoxon. Pokládám však toto označení za oprávněné, a to tehdy, když jsme na stopě poznání morfologických poměrů některé plástve kůry zemské, jež vládly v zašlé době geologické, ale byly později zastřeny nějakou heterogenní pokrývkou, která bez abrase neb značné korrose podkladu na tomto byla usazena.

němu cyklu směru JV předcházel v geologické době nepříliš vzdálené výmolný cyklus o směru sice nemnoho odchylném, než přece podstatně jiném (VJV). A když jest řeč o „dojmech", budiž dodáno, že oblast mezi Jizerou a Labem s horami Polomenými byla asi vrchoviskem výmolné soustavy směru sudetského, tak jako (v malém) Vrátenská hora (V) a její okolí byla prameniskem proudu, složeného z úryvků a_1—a_2—bz neb (současně) a_3—a_4—a_5—bz (obr. 1.).

K bezpečnému poznání, zdali dnešnímu výmolnému systému směru JV předcházel vskutku systém o směru VJV, vede stratigrafie uloženin pleistocénních, které v náhorních mezerách meziúdolních se rozprostírají. Hlavním pramenem poznání budou tu jednak přirozené odkryty,

Obr. 2.

vzniklé recentním systémem výmolným na svazích a stráních údolních, pak umělé odkryty, způsobené stavbou silnic a drah, hlavně pak cihelny a písečníky. Větší cihelny jsou poučné tím, že zakládajíce v podloží hlíny vlastní písečníky, umožňují přímé pozorování sledu, v němž jsou fluviatilní a pak éolické vrstvy uloženy.

Menší cihelny písek dovážejí, než tyto dnes již mizí — a to zpravidla beze stopy, jsouce zaorány, takže mnohé z cihelen naznačených v mapách generálního štábu (i v těch, jež byly v době nedávné revidovány) náleží již minulosti.

Velmi poučnou jest uložení štěrků, písků a hlin v písečníku a cihelně katusické (obr. 1. — K.). Ve stěně jihovýchodní shledáváme shora dolů (obr. 2.):

1. Ornici (côta povrchová 306 *m*) barvy červenavé šedě, přecházející nenáhle ve vrstvu

2. zv. „trupelka“,[23]) která jest šedá, sypká a má mocnost 30—50 *cm*. Vrstevnatosti nejeví; přes to lze říci, že spočívá diskordantně na

3. „kostkovici“, hlíně šedočervené až i rudé o mocnosti průměrně 80 *cm*, jejíž vrstevnatost jeví se jen ve variaci její červeni, nikoliv u velikosti jejich jemných součástek. Jméno své má dle toho, že drobí se v kostkách zvící hrachu; proto ji někde jmenují „hrachovkou“. V podloží jejím spočívá — a to opět při zřetelné diskordanci —

4. žlutka o průměrné mocnosti 190 *cm*; mocnost její nepříliš proměnlivá nesouvisí tak s diskordancí, jako spíše s okolností, že s vrstvou následující účastní se na zarovnání spodních, neklidně uložených vrstev písků a štěrků (6—8). Vrstevnatosti nemá, leč že tuto poněkud prozrazují slabá pásma relativně slínitější. Zkušený cihlář je zná jako technicky rušivý element.

5. „*Železná hlína*“ o mocnosti prům. 120 *cm* přechází v

6. „*úlomky slínu*“ v mocnosti asi 45—60 *cm* uložené a, jak se zdá, znovu erodované, které rozdrobením dávají vápenitý ostrý písek. V hořejší, mocnější vrstvě stmeleny jsou úlomky slínu žlutou hlinkou; na spodu pak přechází ve vrstvu hrubého *železitého písku*, částečně limonitovým tmelem zpevněnou, rudou — ač v dosti pestrých nuancích — o prům. mocnosti 15 *cm*, jež pokrývá

7. *železitý písek* s vložkami štěrku v křížovém a diagonalně paralelním slohu; řady oblásků křemenných (zvící hrachu — pěsti) přecházejí v četná čočkovitá ložiska štěrků.

Nepřístupné podloží, — dle sdělení správce p. Č. Fialy — „tvrdá skála pískovcová“, jest dle všeho IX *d* pásmo křídové, které zde jest asi 6—7 *m* hluboko pod ornicí.

Než pokusíme se o vysvětlení genese jednotlivých vrstev, jest třeba podati výsledky mechanické analyse, vykonané pomocí plavicího přístroje Kopeckého s 2.—5. vrstvou.

Souvrství 6.—7. jest uloženinou výlučně fluviatilní. Vrstva 7. jest sedimentem silných, v poloze řečiště proměnlivých proudů. Vrstva železitého písku značí relativní stagnaci v proudění, ale erose vrstvy té záhy uvolnila koryta, aby opět byla zanesena úlomky slínů vrstev křídových. Hlíny nad nimi uložené jsou původu éolohydatinního; vrchol větrné činnosti spatřovati lze v uložení žlutky (4).

---

[23]) Místní a často dosti rozmanité označení hlin vede často k nedorozumění, proto z důvodů praktických i theoretických pocítěna byla potřeba názvosloví hlin upraviti. Příslušné usnesení stalo se na sjezdu keramiků v únoru r. 1913; dosud provedeno nebylo. Bylo by záhodno, aby k provedení úkolu povoláni byli jak znalci techničtí tak i odborníci theoretičtí.

Číslo	Naleziště	Druh	Průměr zrn 1% dle váhy							Poznámky o kostře
			I.	II.	III.	IV.				
			Hlínovka — 0·01 mm	Prach — 0·05 mm	Písek — 0·10 mm	Písek			Kostra 2·0 —	
						— 0·5	— 1·0	— 2·0		
2	Katusice	trupelka	29·0	36·9	13·2	12·4	3·2	3·5	1·8	Zrnka křemene.
3	,,	kostkovice	25·2	32·7	22·3	7·2	4·2	4·6	2·8	Drobty slínu.
4	,,	žlutka	27·8	35·4	27·2	6·5	2·6	0·5	—	—
5	,,	„Žel. hlína“	35·8	20·2	10·4	9·5	6·7	3·2	4·2	Konkrece limonitové.

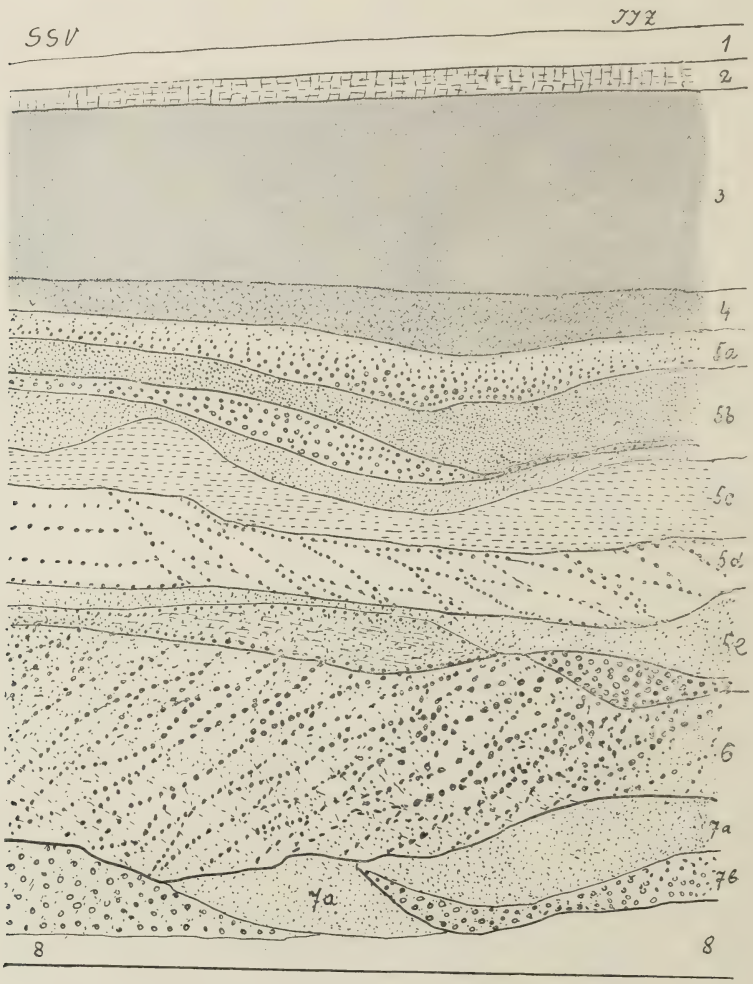
Nově založena byla cihelna u nedaleké Borče, ač dosud bez písečníku. Byly tam shledány tytéž tři vrstvy spražových hlin jako u Katusic. Pod ornicí jest „*spražovka*“ (místní jméno pro katusickou „trupelku“), pak „*hrachovka*“ (= „kostkovici“) a pod touto *žlutka*. — V Krásnovsi (j. od Katusic) není vrchní vrstvy spražové; odkryt v tamní cihelně jeví jen žlutku (na spodu) a hnědožlutou „kostkovici“, na níž přímo spočívá ornice, z této vzniklá. Rovněž některé lokality, analysované B. Erbenem,[24]) nemají svrchní spraše; jmenovitě jest to Stránov, Niměřice, Vinec a Vel. Čejtice (I.). Jsou to vesměs hnědky, jež tvoří spodinu ornice a material, z něhož tato povstala, ovšem nezřídka při značném vlivu kulturních činitelů.

Rolnictvo našeho kraje nerozlišuje „spodinu“, pokud jest tato hlínitou; ornici nazývá skoro vesměs červinkou; jen šedé hlíny vzniklé z „trupelky“ označuje zvláštním jménem „šedivky“.

Při nedostatku písečníků v cihelnách menších jest nám vítanou každá písková jáma. Nad Strenicemi v poli komorního statku horeckého nacházíme pod šedou a hnědou hlínou svahovou (obr. 3.) nejednu analogii s uložením fluviatilních vrstev katusických. Na zastřeném podkladě (8) spočívá železitý nezvrstvený písek (7 *a*) a hrubý štěrk (7 *b*), potom následuje šedý písek s křížovými vložkami štěrkovými (6), jen že ohýbají se tyto v opačnou stranu. Oblásky bílého křemene jako ořech až pěst veliké jsou hranaté a jen na hranách zaoblené. Takovýto sloh se pak opakuje (5 *e* ~ 7 *ab*, 5 *d* ~ 6), při čemž 5 *c* jest zvrstvený slínitý písek, nad nímž opět spočívá 5 *b* ~ 5 *e* ~ 7 *ab*. Po uložení štěrků 5 *a* došlo k nivelaci terrénu hlínami spražovými (2—4). Jedna analogie však jest

[24]) Viz článek: Mechanické rozbory typických půd okresu mladoboleslavského. Časop. pro průmysl chemický r. 1893.

zvláště pozoruhodná: Křížová pásma štěrků a písků ohýbají se všude k SSV neb JJZ. Profil katusický (obr. 2.) i strenický (obr. 3.) jest totiž průřezem onoho boku písečníku, v němž písky a štěrky jeví neklidné uložení a to jest strana VJV. Stěny bočné jeví sloh poměrně klidný, ovšem jen zdánlivé, protože stěny ty protínají vrstvy fluviatilní podélně, naše



Obr. 3.

profily pak příčně. Proti strenickému profilu na protější (levé) straně údolí jest písečník, který jeví vrstvy železitého písku rovněž prohnuté směrem k SSZ a JJV a dotvrzuje tedy závěr, že máme před sebou fossilní soustavu údolní směru VJV.

Výjimku z převládajícího směru VJV, směru to zašlého cyklu výmolného, činily jen proudy vodní na jihozápadní straně oblasti. Staré údolí

se však tyto na 70—80° C, tu v brzku podlehne zmazovatělý škrob v buňkách účinku enzymu.

Vzdor tomu jest Ruhland přesvědčen, že enzymy mohou snadno vnikati do živých buněk. Ano jest prý nutno považovati je za kolloidy, které nejlehčeji jsou s to permeovati plasmatickou vrstvičkou (l. c. pag. 346). Důvodem k tomu jsou mu jednak srovnávací pozorování, která učinil na určitých kolloidních barvivech. Vnikají-li tato do želatiny, jsou s to vnikati také do živých buněk fanerogam a vice versa. Z toho odvozuje Ruhland, že pokožní vrstvička plasmatická má vlastnosti i chová se jako ultrafiltr. Nad to konal týž autor (l. c. pag. 339 seq.) přímé pokusy o diffundování enzymů v želatinu (translokační diastasa z hrachových rostlin i sekreční ze sladu nechány se rozšiřovati po thymolované želatině škrobové s jodjodkaliem. Kapka invertasy z listů řepných s chicagskou modří *B*, jež v želatině nediffunduje, kápnuta na želatinu, po té z kruhů šíření kousky želatiny přeneseny do roztoků saccharosy a proteinového. Šťáva z listů trávových, chovající oxydásu nechána uschnouti na želatině rozprostřené po krycích sklíčkách v atmosféře O_2 prosté, po té přenesena do guajakové pryskyřice. Posléze H_2O_2, jenž modráním ukázal rozšiřování se enzymu atd.) Nalezl, že veškeré enzymy diffundují nadobyčej lehce gely, právě tak jako lehce pohyblivá barviva anilinová, takže dispersita jejich musí býti velmi vysoká. Dle analogie s barvivy tedy i živou kožkou plasmatickou musí lehce permeovati (341).

Pro pokusy referentovy byly by příklady tyto dokladem, že vskutku trypsin řasami mohl býti absorbován, že plasmodermem mohl permeovati. Pak by ovšem byl získán první bezpečný doklad o endosmotickém vstupu enzymu v tělo živé, zelené buňky. Zdali permeabilita u těchto specií — řas — jmenovitě vzpomeneme-li nepochybného prostupu látky tak vysoce molekulárné jako je glykogen — je jinaká než u rostlin vyšších či jiných event. bezbarvých mikrobů, zvláště saprofytických, o tom musí rozhodnouti pokusy další.

* * *

S *Chlorellami* „otrávenými" trypsinem provedl referent ještě jednu serii pokusů. Přenášel je totiž na různě koncentrovanou sladinku bez trypsinu a nechal zde vegetovati srovnávaje barvu jejich s kulturami *Chlorell* na těchže mediích, jež však proceduru trypsinovou nebyly prodělaly Základní ideou pokusů bylo pozorovati, zda zachová řasa „trypsinová" na mediích normálních svou získanou barvu, či zda ji změní, jakým způsobem a jak brzy. Kdyby kultury v brzku na mediu normálním nabyly barvy původní, zelené, bylo by to mimo to snad poukazem k tomu, že k pokusům byla vzata směs populací, z nichž převahu nabyla populace již od přirozenosti žlutá a na trypsinu rychle se dovedoucí rozmnožovati, kdežto na normálním mediu tato ustoupila by zase do pozadí a místo její zastoupila zelená. Kdyby však tomu bylo jinak a trypsinem prošedší kultury

podrážděním některých součástí enzym chovající substance, jež samy nejsou enzymaticky aktivními, ale mohly by působiti jako na př. aktivátory fermentů. Ruhland věří toliko, že Lehmannovi a Ottenwälderovi[1]) podařilo se dokázati vnikání proteolytických enzymů v klíčící semena. Přihlédneme-li však k resultátům těchto pokusů blíže, vidíme, že nic jiného nechybí jim než faktické provedení důkazu, že vskutku běží o zakročení enzymů. Autoři vystavili semena od *Epilobium hirsutum*, jež ve tmě špatně klíčí, za 24° C, klíčení jednak na destilované vodě jednak na papayotinu (0·1%), jednak na trypsinu (0·1%). Po jisté lhůtě pozorovali v destilované vodě klíčivost nepatrnou, na roztocích enzymů však až třikráte větší. Jestliže se však sníží temperatura okolí, v němž pokus konán, jen o 1 nebo 2°, ukáže se zvýšení klíčivosti toliko nepatrné. (Autoři se domnívají, že temperatura byla příliš nízká, než aby v ní mohl enzym rozvinouti svou činnost nebo že byla nepříznivou pro jiné processy, jež jsou nutny pro klíčení semen.) Jestliže však temperatura byla zvýšena na 30°, vyklíčila téměř všechna semena, ano urychlovací působení vyšší temperatury bylo tak velké, že příznivé působení enzymu již nebylo pozorováno. Referent se však domnívá, že tak odchylné působení v tak nepatrných hranicích temperaturních musilo míti jiné příčiny, než jaké uvádějí Lehmann a Ottenwälder. Nad to udávají tito autoři sami, že také asparagin, tedy produkt proteolytického klíčení, působil velmi značné zvýšení klíčivosti (pag. 350). Posléze musí referent vyjádřiti svůj podiv nad tím, že v žádném pokuse s enzymy nebyla provedena kontrola, jakým způsobem budou působiti enzymy, vysokou temperaturou své funkce enzymatické zbavené, což je přece zkouškou, jež v žádných pokusech konaných s enzymy biochemickými není autory pomíjena. A tak nutno vyčkati v otázce této ještě dalších pokusů.

Ruhland (l. c. pag. 34) pointuje sám, že endosmotické pokusy s enzymy — vniknou-li do buňky — všude měly výsledky negativní. Ani do pletiv umrtvených nevnikaly enzymy nebo v tak nepatrných množstvích, (ačkoli na počátku pokusu může býti pozorováno rychlé vnikání enzymu), že nemělo to účinků. Příčinou toho však mohly býti pochody absorbční a ponenáhlé ucpání porů v blanách, jimiž enzymům bylo projíti, kteréžto ucpání způsobily nejspíše látky proteidní, méně dispersní než enzymy, jež tyto provázejí a těžko dají se od nich odděliti. V živých pletivech k tomu ještě přistupuje, že gely plasmatické vrstvičky, velmi úzkých porů a tedy velmi snadno ucpatelné, působí jako adsorbens; při odumírání pak ovšem také plasma koagulujíc k průchodu nepřispívá. V některých případech se pak ještě věc komplikuje tím, že na př. i diastása velmi těžko může působiti na intaktní zrnka škrobová buněk takže se nepozoruje její účinek, nechá-li se působiti na živé řízky bramborové; zahřejí-li

[1]) Lehmann und Ottenwälder A., Über katalytische Wirkung des Lichtes bei der Keimung lichtempfindlicher Samen. (Zeitschrift für Botanik, V. Bd, 1913, pag. 337 seq.).

o nichž lze se domnívati (*Kisch*[1]) 1912 pag. 176), že dají se aspoň za určitých okolností přinutiti k tomu, aby přijímaly lehčeji do svého těla enzymy než rostliny vyšší, majíce plasmatickou kožku buňky jinak ustrojenou, než fanerogamy.

Specielně pak u řas mohlo by býti studováno, jak budou se chovati buňky obohacené trypsinem k mediím, jež by mohla býti tímto enzymem rozkládána, na př. k gelatině (jak vyloženo dříve, mají *Chlorelly* jen nepatrnou schopnost ztekucovati tuto látku), budou-li totiž moci vylučovati i ze zdravých, intaktních buněk ve větší míře tento enzym. Konečně snad nebylo by bezvýsledno obrátiti pozornost i k vyšším rostlinám, nedovedly-li by, přiživovány jsouce ovšem zároveň uhlohydráty, jež by znemožněnou či seslabenou assimilaci (chlorofyll!) nahrazovaly, kořeny svými absorbovati na př. trypsin. Vždyť jest dokázáno, že zelené jevnosnubné dovedou kořeny svými zcela dobře assimilovati uhlohydráty i amidy a v úvodu vylíčené pokusy *Ruhlandovy* nedopouštějí pochybovati o tom, že i kolloidní substance mohou bez překážky vnikati do buněk jejich.

Referentovi je znám z literatury toliko jeden případ, kdy přidáván byl specifický enzym, aby zakročil v processu jisté enzymatické synthesy. Boysen-Jensen[2]) zkoušel tak in vitro působnost oxydativních enzymů dýchacích na synthesu cukru třtinového pomocí zymasy. Naproti tomu bylo již vícekráte pronešeno tvrzení, že lze do intaktních částí vyšších rostlin vpraviti různé enzymy a že tyto vyvolávají zde zcela zvláštní zjevy. Tak udává Tischler (1910), že škrobem bohatý pyl u *Cassia Fistula* za obyčejných okolností není schopen klíčiti. Přenese-li se však pyl do vody, která chová diastásu, počne se škrob rozpouštěti a nastane klíčení. Ruhland namítá mu však (1913, pag. 344), že vystavil mladá, škrobem bohatá zrnka pylová, jichžto blána je pro enzym permeabilnější, usmrtiv je chloroformem, účinku silných roztoků diastatických, aniž by po 4—5 týdnech nalezl v nich zřetelnějšího rozpouštění škrobových zrnek. Vykládá pak, že účinek přidané látky v případě Tischlerově i v jiném, jejž *Faber* pro pylová zrnka od *Psychotria bacteriophila* líčí, spočívá spíše v nějakých přimíšeninách diastásy, jež vniknouce do buněk pylových dráždily jejich plasmu ku produkování většího množství diastásy, což mělo za následek klíčení odpočívajících zrnek. Podobně dal by se vyložiti chemotropismus pylových vaků k diastase v pokusech Lidforssových

---

1899, pag. 31): „Presshefe in diastasehaltigen Nährflüssigkeiten kultiviert, absorbiert daraus eine nicht unbeträchtliche Diastasemenge. Wenn diese Hefe jedoch weiter fortwächst in einem diastasefreien Medium, so ist die Diastase bald aus den Zellen verschwunden" nebudí ovšem mnoho nadějí pro pokusy s kvasinkami.

[1]) Kisch Br., Über die Oberflächenspannung der lebenden Plasmahaut bei Hefe und Schimmelpilzen (Biochemische Zeitschrift 1912, 40. Bd, pag. 152 seq.).

[2]) P. Boysen-Jensen, Über synthetische Vorgänge im pflanzlichen Organismus. I. Die Rohrzuckersynthese. (Biochemische Zeitschrift, 1912, Bd 40, pag. 420 seq.).

barva byla skoro úplně žlutí zatlačena, u *lipské* ukázala se žluť intensivní po třech nedělích jen s zcela slaboučkým bezvýznamným nádechem do zelena, u *variegata B.* pak nebylo po zeleni ani stopy. Zároveň ukázal se u této poslední specie krásný, oranžový, „aureový ton".

Ke kombinovaným mediím trypsin — pepton poutal se ovšem zvláštní interes referentův. Tvořilyť tak říkajíc jakési „experimentum crucis", na němž měla býti zkoušena správnost jeho předpokladů. Vskutku převýšila tato serie i všecko očekávání autorovo. S počátku sice pracováno bylo jen s *protothecoides* (poněvadž u tohoto druhu zeleň nejvíce vystupovala a nejnesnadněji u zkoumaných specií dávala se zapuditi); v prvním téhodni pokusů objevila se zde vzdor trypsinu dosti pěkná zeleň, kdežto rourky s pouhým trypsinem měly žlutavý ton. Později však, po 14 dnech, prosvítala již trávovou zelení do té míry žluť, že cele udávala ton kultur. Po třech nedělích byla zde konečně špinavá žluť, jež úplně pronikala slabou zelení, kdežto kultury s peptonem bez trypsinu byly distinktně zelené.

Pokus tento dokazuje dostatečnou měrou, že trypsin působil svým specifickým způsobem. Naprosto lichá ukázala se ovšem domněnka, že trypsin bude působiti tak, že přinese se jím v kulturu látka obsahující organický, pro řasu ztravitelný dusík a sice v množství, jež by (dle *Chodata*) zavádělo vhodný poměr k uhlohydrátům resp. glukose sladinky. Tuť by musily i na nesterilisovaném trypsinu kolonie intensivně sezelenati, ba intensivněji než na pouhé sladince. Přidání pak peptonu musilo by nezbytně ještě intensivnější zeleň vybavovati, což se však naprosto nedostavilo. Jiná možnost byla, že trypsin bude působiti jako glukosa, glycerin a podobné látky, jež v předcházejících pokusech přiváděly žluť resp. bílou barvu kultur. Přidání peptonu k trypsinovým kulturám mělo pak působiti antagonisticky oproti této domnělé schopnosti enzymu. De fakto však i v tomto případě, ač kvantum peptonu přidaného jistě bylo dostatečné, objevila se distinktní žluť v „otrávených" kulturách, pepton nejevil téměř účinku. Patrně že účinek trypsinu byl vskutku specificky enzymatický.

S jinými enzymy než s tryptickým nebylo pracováno. O pepsinu je známo, že nepřichází v těle rostlinném (insektivorní rostliny?). Zkoušeti amylasu a maltasu bylo by značilo rozdělovati prozatím otázku na příliš specialní themata, než aby bylo možno vzhledem k nynějším našim znalostem o fysiologii řas nadíti se, že skončí tyto snahy s úspěchem. Nicméně po čase bude snad moci býti přistoupeno i k těmto enzymům, také k umělému „vtělování" oxydas, peroxydas, lipas, invertinu atd. Snad také nebylo by bezúspěšné zkoušeti, jak se budou chovati jiné mikroorganismy k enzymům dle této methodiky, jež značí vlastně výživu těmito látkami. V první řadě lze pomýšleti zde na kvasinky[1]) a na plísně,

[1]) Zpráva Beijerinckova (Über ein Contagium vivum fluidum als Ursache der Fleckenkrankheit der Tabaksblätter. Centralblatt für Bakteriologie II., V. Bd,

toliko účinek dextrosy vynikl, obě ostatní media však zůstala, jak pochopitelno, šedožlutými.

IV. serie. Trypsin sterilisovaný u srovnání s normální sladinkou. Řasy rostly na trypsinovém tomto mediu velmi krásně, zároveň však bylo velmi nápadno, že rostou vesměs intensivně, jasně až (u *lipské zelené*) smaragdově zeleně. Rozdíl tento objevil se již po první 8denní periodě, po níž kultury kontrolovány a ba i tenkráte, když srovnávací kultury byly bledavě žluté, objevila se (u *variegata B.*) veselá zeleň s tonem žlutavým, zeleň u *lipské* dokonce intensivní trávová. Tím větší pak byly ovšem rozdíly při ukončení pokusu po 14 dnech, kdy zvláštní jasná smaragdová zeleň odlišovala se distinktně od smutné zeleni rourek kontrolních. Je na bíledni, že výsledek tento přivodilo toliko vystavení trypsinu vysoké temperatuře. Varem mohlo sice býti chemické složení trypsinu do té míry pozměněno, že byl by možný výklad: nesterilisovaný trypsin působil na *Chlorelly* jakožto výživná látka jiného složení jinak než sterilisovaný. V tomto ohledu mohlo by padati na váhu, že agar (se sladinkou), s nímž zároveň trypsin byl vařen, je substance kolloidní a že není snadným prohlédnouti působení na jinou látku pravděpodobně také kolloidní, jako je asi právě trypsin, takže pokusy této serie nejlépe by byly bývaly provedeny tak, že povařený roztok trypsinu by byl přidán k sladinkovému mediu; toho bylo však bohužel opomenuto. Frappantní ale je v každém případě, že enzym právě po povaření se zmíněným způsobem choval. A více než s dostatek je známo, že ztráta katalytických vlastností povařením je právě nejkarakterističtější vlastností valné většiny enzymů (jen, pokud je referentovi známo, laccasa Medicagová snáší zahřátí na 100°; její složení je také velmi zvláštní, byloť konstatováno že jest směsí kalciových solí jedno i vícebasických oxykyselin, mezi nimiž nachází se glykolová, citronová, jablečná a metoxalová (Sr. Euler 160), takže s největší pravděpodobností účin sterilisovaného varem trypsinu právě ve ztrátě enzymatických jeho vlastností spočíval, při čemž chemické složení jeho na výživu řas mohlo působiti způsobem, jak to činí látky, které nevybavují zbělení (maltosa atd.), k čemuž při užití nesterilisovaného enzymu dojíti nemohlo.

Poslední serie, třetí dle pořadí pokusů v protokollu, sestávala z kultur s trypsinem nesterilisovaným v sladince, se sladinkou + peptonem a se sladinkou s trypsinem + peptonem.

Pepton v obyčejné sladince projevil svůj účinek dosti patrně na *protothecoides*, jejíž kultury po více než 14 dnech nabyly barvy světle tmavozelené, kdežto v pouhé sladince byly pouze zelenými se zvláštním „smutným" nádechem. U *lipské „zelené"* také jevil se jakýsi rozdíl proti obyčejným sladinkovým, oproti „smutné" zeleni v pokuse II. objevila se zde intensivní trávová zeleň, třebaže se „smutným" tonem. Nicméně není možno označiti u této specie vliv této látky za intensivní a *variegata B.* zůstala i na peptonu velmi slabě nazelenalá a sice po třech nedělích. Trypsin však také v této serii účinkoval nápadně, u *protothecoides* zelená

protothecoides byla tmavě zelená, u *variegata* a *lipské* světleji žlutozelená, trávově (rourky v této řadě pokusů očkovány byly přímo z mateřských kultur, bez intervence desek v kolonie.) Co se pak týče působení trypsinu, (srovnej protokol, Pokusy s trypsinem, serie I—VI), jenž přidáván v této řadě neetherisovaný a nesterilisovaný, dlužno konstatovati, že vzrůst řas jím nebyl ani v nejmenším ženován: algy rostly týmž tempem, jako na mediu bez trypsinu. Záhy objevil se účinek enzymu. Již po 12 dnech objevil se u *protothecoides* nápadný rozdíl v barvě kultur „otrávených", tyto byly žluté, jen s docela slabým nádechem do žlutozelena, a také ještě po 5 nedělích jevila se v rourkách temná žluť a zeleň jen jakoby nadýchnutá. Druhé dvě specie byly v téže době ještě slaběji zelené, zeleň skoro úplně zmizela nahražena byvši žlutí, jež po 5 nedělích stala se tmavou. Při tom jevila tato žluť nádech do aurea. Co se týče rozdílu oproti normálnímu sladinkovému mediu, byl tento u *„lipské" Chlorelly* v první lhůtě slabý, po 5 nedělích nápadný. U *variegata B.* byl rozdíl slabší v první periodě, jelikož také normální kultury byly slaběji zelené. Nicméně byl tu, a ke konci doby, ve které kultury pororovány, objevil se ještě zřetelnějším.

V následujícím pokusu (Trypsin II. Sl. zř. 1:1, očkováno z „kolonií") užito bylo trypsinu etherem sterilisovaného a ke srovnání vedle sladinky normální také sladinky se 4%ní dextrosou. V žádném případě nedosaženo působením trypsinu tonu žlutobílého, posléze voskově bílého, který vyvolávala dextrosa. Etherem byla působnost enzymu poněkud seslabena, nicméně objevil se i zde zračitě jeho vliv. U *protothecoides* již po jednom týdnu, kdy kultury sladinkové byly trávově zelené, ač jen slabě, objevila se žlutozelená barva, třebaže tonu krásně trávového. Po 14 dnech oproti smutně trávově zelené barvě srovnávacích kultur trypsinových byla trávově zelená, jíž pronikala žluť. U *variegata B.* doba 14 dní nestačila k tomu, aby kultury normální sezelenaly sytým tonem. Proto také po 1 týdnu nebylo rozdílu v trypsinových kulturách oproti nim, obě serie byly slabě žlutozelené, po 14 dnech však účinek trypsinu se projevil velmi nápadně, v kulturách objevily se povlaky úplně vší zeleni prosté a krásně „aureově" žluté. Je jistě důležito, že dosaženo bylo působením enzymu právě oné barvy, jaká se ukazuje často v listech rostlin panašovaných. Nad to objevil se v jedné rource střed gummigutově-„aureově" žlutý s obrubou světlou, bílou resp. hyalinní zonou. Ze středu tohoto očkováno bylo po čase pro serii V., kteréžto řady vedeny jsou pod značkou „aurea"; podobně z obruby získána značka „hyalina". U *lipské „zelené"* projevil se nápadný rozdíl již od počátku. Normální kultury po 7 dnech byly slabounce zelené, kdežto trypsinové byly žlutozelené, stupnice trávové. Nápadný rozdíl byl také téže doby oproti trypsinové *protothecoides*. Po 14 pak dnech objevovala se v trypsinových kulturách sytá „aureová" žluť jen s nepatrným množstvím zeleni, kdežto srovnávací kultury byly distinktně zelené. *Lipská žlutá* nejevila rozdílu v první lhůtě na třech půdách, v druhé pak

Grüblerova, tedy množství trypsinu vzhledem ku množství agaru ne velké ani ne malé. Třepáním trypsin s agarem promísen a nechán při 40° ve vodní lázni v epruvetce se rozpustiti, načež rourky schlazeny v šikmou plochu agaru. Trypsin úmyslně nebyl dáván do sladinky zalkalisované, ačkoli se vykládá, že enzym tento šťávy pankreatické, odbourávající bílkoviny až k aminokyselinám nebo nejméně k nejnižším polypeptidům, jest působivý v roztocích alkalických nebo neutrálních. Neboť nejednalo se o přímé působení této látky v bílkoviny, nýbrž o to, aby byl řasami zassimilován a teprve pak aby projevil svou působnost. Dále nebylo vyloučeno, že v mladince zalkalisované neobjeví se jinaké zbarvení řas než v normální, takže výsledek pokusů tímto způsobem mohl býti porušen. V jiné řadě pokusů přidáván ku sladince trypsin, jenž pod uzavřeným zvonem na malé misce po 14 dní sterilisován byl parami etherovými. Sterilisován byl proto, že byla obava, aby s trypsinem nesterilisovaným nebyly přeneseny některé bakterie v kultury, kterážto obava ukázala se býti bezpodstatnou; vzdor tomu, že rourky musily býti dvakrát otevřeny, neobjevila se infekce. Etherem sterilisován byl enzym z toho důvodu, že dle Kaufmanna (cit. dle Eulera 84) narkotika neseslabují jeho schopnosti proteolytické. Dále zhotovovány kultury, do nichž přidáno bylo stejné množství nesterilisovaného etherem trypsinu, jako v předcházejících seriích, které však byly dvakráte vždy po 1 hodinu při 100° C sterilisovány. Posléze přidáno bylo k některým epruvetkám s trypsinem nealkalisovaným a nesterilisovaným stejné i větší množství peptonu. To učiněno bylo z toho důvodu, aby snad nebyla obohacena kulturní půda přidáním trypsinu o nějaké látky, jež by vyvolávaly samy, bez působení enzymatického, zbělení. (Trypsin nedává reakce biuretové a není nukleoproteidem. (Eul., pag. 27). Neboť kultury založené na sladince se sterilisovaným trypsinem vykazovaly vesměs zabarvení jiné, v každém případě bylo vítáno tedy, jestliže naprosto vyloučena byla možnost, že by trypsin působil ve smyslu *Chodatově*, že by totiž přiváděl v kulturu vhodný poměr mezi látkami organickými dusíkatými a bezdusíkatými. Na štěstí ukázal se však pravý opak. Že by trypsin jakožto látka zajisté kolloidní působil adsorbuje některé substance sladinky, sotva je pravděpodobno. Všem pak těmto i podobným možným námitkám o enzymatickém působení této substance resp. že by působením enzymu „vyselektovány" byly z populace jen řasy snášející jej a již normálně rostoucí barvou „enzymovou" ulamuje hrot faktum, že i po přenesení řas trypsinem „otrávených" na medium normální ještě po velmi dlouhý čas objevovaly se jeho následky v chování se řas. V jedné serii přiloženy ke srovnání rourky se sl. + dextrosou bez trypsinu.

Kultury chovány v thermostatu (za tmy) při 25° C; pro každé medium založeno několik kultur.

Na sladince zředěné v poměru 4:1 rostly řasy známým způsobem, ačkoli tempem poněkud pomalejším, než na sladince silně zředěné. Barva *Chl.*

pečností, nechce tvrditi. Methoda, jež by jistě k tomuto cíli vedla, tušová methoda *Burriho*[1]) pro *Chlorelly* se totiž neosvědčila. Z povlaku na sladince přeneseno bylo jisté množství massy kulturní do tekuté, sterilisované sladinky v epruvetce a v této rozplýleno. Do kapky sterilní tuše *Burriho* na sterilisovaném sklíčku podložním přeneseno po té něco tekutiny, sterilisovaným perem psacím zde rozptýleno a v následujících kapkách tušových přenášením zředěno. Z posledního pak zředění přeneseny kapky tuše s *Chlorellami* na sterilisované desky gelatinové, připravené s pivem světlým, (rostouť na vykvašených látkách podobných *Chlorelly* zvláště dobře) a přikryty sterilisovanými střípky z krycích sklíček. Odhadnutí, zda určitá kapka chová toliko jedno individium, či více jich, nebylo bez obtíží, jelikož dceřinná individua *Chlorell* jsou často malá a snadno se přehlédnou. Nicméně nalezeno takových případů, kde bylo jediné individuum, více, toto bylo pak přeneseno s krycím sklíčkem do připravené živné tekutiny sladinkové. Než nepodařilo se nikdy získati z nich kulturu, nejspíše poškozeny byly řasy působením tuše. Nezbývalo tedy, než litím desek eliminovati možnost, že kultura sestává z populace. V rozlitém třetím zředění označena individua bezpečně od sebe isolovaná, vzniklé kultury z nich odočkovány a proces opakován. Naprosté jistoty, že přeočkované massy vzešly z individua toliko jednoho, sice tím dosaženo nebylo, nicméně s velkým stupněm pravděpodobnosti počítáno býti mohlo.

Pracováno bylo tímto způsobem s *Chl. protothecoides Kr.*, *Chl. variegata B.* a *Chl. lipská a*) zelená (značí potomstvo zeleného sektoru), *b*) žlutá (potomstvo žlutého), jež rozlity byly v kolonie a od těchto získán základní material k pokusům trypsinovým. Před tím bylo zkoumáno, jakým způsobem reagují matečné kultury na dextrosu; ukázalo se, že známá, voskově žlutá barva již ve 14 dnech byla vyvinuta, v době, kdy u *protothec.*, *variegata*, *Chlorophilum* byla vyvinuta zeleň na normálním substrátu. Kolonie na agaru se sladinkou (nezředěnou, stupeň cukernatosti asi 10) po 14 dnech byly u *Protothecoides*, *variegata* zelené, u *lipské zelené*, žlutozelené s okrajem do zelena, u *lipské žluté*, žlutobílé, na téže sladince + dextr., pokud pozorovány, žlutobílé. (*Chl.*, 6 serie). Za základ k pokusům trypsinovým vzat materiál, opětovně rozlitý v desky, vždy z 1 kolonie, bez dextrosy vypěstěné.

Kultury pěstovány toliko na sladince, poněvadž na ní se řasa nejlépe a nejrychleji rozrůstala, takže mohla býti naděje také v rychlé, immediátní působení trypsinu, byl-li by k ní přidán. V první části pokusů (Trypsin, I. serie) užito sladinky zředěné (Sl. zř. 1 :H_2 *O*, 4), ve všech ostatních v poměru 1:1. Agar 2%ní s touto půdou, 2× pečlivě filtrovaný ve sterilisátoru, rozpuštěn v rourkách sterilisovaných a ochlazen na 40° ve vodní lázni. Na to rychle rourky otevřeny a přidána do každé platinová, před tím v plameni sterilisovaná a ochlazená, dosti velká lopatka trypsinu

[1]) Burri Robert, Das Tuscheverfahren. 1909, Jena, Fischer.

chemickými vlastnostmi atd. Vlastnosti tyto mohou zůstati konstantními úplně nebo po delší čas. Sekundérní však takové kolonie objevují se i v kulturách, jež byly založeny od jediného individua[1]) a nemohou tedy sestávati z různých populací, z nichž jednu vytvořily ony z područí ostatních nějakým způsobem se vymanivší sekundární kolonie. Ostatně se stává, a to i tenkráte, když původní kultury vzešly z jediné buňky, že na povlacích, založených očkováním ze sekunderních kolonií objevují se bodovité kolonie „terciární", jež vracejí se zase k vlastnostem kultur mateřských. Zajímavo je, že způsob, jakým se objevují sekundární kolonie v kulturách, je podstatně jiný než uplatňuje-li se oddělení součástek z populací nebo směsí různých (specií), takže i pracnou mnohdy methodiku isolace od jedné buňky může nahraditi ve thematech, jež směřují ku zjevům „mutability" mikrobů, jmenovitě u takových specií, jichž kmeny po dlouhá léta byly studovány různými autory, jako jsou na př. *Chlorelly*.

Jak bude vyloženo později, resultuje velmi pravděpodobně v kulturách *Chlorell* výskyt sektorů i sekundárních kolonií nikoli z vnitřních příčin, nýbrž je způsobován differencemi jistými ve výživě. Proto zdálo se referentovi radno informovati se o tom, jaká bude konstantnost sekundárních forem, což jmenovitě bylo důležito z toho ohledu, že možno bylo očekávati i následné působení trypsinu v kulturách za normálních podmínek držených tak, že vracení se „sekundárních" karakterů mohlo se kombinovati se změnami vybavenými.

Jeden sektor smaragdově zelený od *Chl. variegata Kr.* na téže sladince po 16 dní rostl zeleně i jevil počátky nových sektorů. Žlutý sektor z téhož kmene rostl též po 6 neděl „aureovou" žlutí bez nádechu do zeleně, po kteréžto době počaly se v jedné rource objevovati malé zelené sekundární kolonie. *Chl. z Lipska* vyrostla během jedné zimy na sladince v povlaky, sestávající z větších zelených i žlutých ostrůvků. Žlutá partie vočkovaná na tutéž sladinku rostla intensivně barvou žlutou po 4 měsíce, zelená pomalu světlou žlutozelení. Sekundární kolonie zelené objevily se na žluté formě teprve asi po půl roce, jinak však rostla tato forma neustále žlutě, úplně odchylně od mateřské, k níž by mohla představovati „mutaci". Objevení se karakteristických zelených sekundárních kolonií na žlutých povlacích nesvědčilo domněnce, že mateřská kolonie představovala směs zelené a žluté partie. Přes to byly ale hlavní pokusy s působením dextrosy a pod. na etiolování opakovány s oddělenou zelenou součástí s resultáty úplně shodnými, jak jich bylo dosaženo s původní celkovou kulturou, takže na vyložených výsledcích okolnosti tyto nic nemění.

Co se týče methodiky, bylo snahou referentovou dosíci kultur, jež by vycházely od jednoho individua. Zda se mu to podařilo s naprostou bez-

[1]) Benecke W. v referátě o Müller R., Künstliche Erzeugung neuer, vererbbarer Eigenschaften bei Bakterien. Týž: Vererbung erworbener Eigenschaften bei Bakterien. (Zeitschrift für induktive Abstammungslehre 1909, II, pag. 215 seq.).

KNO_3 a leucin by mohl aktivovati nějakým způsobem činnost trypsinu resp. proteolytických enzymů řasových buněk, nestojí faktum toto v cestě. Ukázaloť se novějšími pracemi, že enzymy nepodléhají tolik účinkům světla, jako toxiny, aspoň za určitých okolností nikoliv. Dále bylo konstatováno, že i různé části spektra různým způsobem zabavují činnost na př. katalásy krevní (cit. dle *Eulera*[1]) 178) a také v našich pokusech objevily se rozdíly v působení leucinu na tvorbu chlorofyllu u *Stichococcus* v různě barevných filtrech světelných, takže nezdá se referentovi nemožno, že v jeho pokusech KNO_3 i leucin vskutku nějakým zpusobem na proteolytické enzymy řas působil ovšem aktivuje jich působnost pouze za světla a jsa podporován v tom teplem. Přímých dokladů pro tuto domněnku nemůže přinésti, také nebylo by lehkým postarati se o ně. Nanejvýše snad parallelitou působení aktivované těmito látkami šťávy z řas resp. enzymů samotných, z nich isolovaných, dala by se tato domněnka opodstatniti. Přivedly však výsledky tímto způsobem získané referenta k myšlence, nechati na kultury řasové působiti trypsinový enzym přímo, a pokusy se zdařily způsobem neočekávaným. O těchto tedy budiž v následujících partiích referováno.

Pokusy s trypsinem.

Než přejdeme k vylíčení pokusů trypsinových, nutno registrovati některá pozorování, jež mají jistou důležitost pro posouzení účinu trypsinu na změnu barvy chlorofyllové našich řas.

Jak již bylo zmíněno, objevovaly se v kulturách *Chlorell*, jež byly vedeny na uhlohydrátových substrátech (sladinka, sladinka + uhlohydráty, Artari + uhlohydráty), zelené povlaky kultur prorvány občas ostrůvky barvy naprosto odlišné, bílé, žluté, nejčastěji však krásně oranžově žlutě až oranžové „aurea". Dostavovalo se tvoření jakýchsi sektorů barevných tak, že celá kultura připomínala nějakou sektorielně „aurea" panašovanou rostlinu. Zjev tento pozoroval referent ve svých kulturách jmenovitě u *Chlorella variegata Kr., Chl. varieg. Beij.* a *Chlorella z Lipska.* Zvláště pak dostavovaly se a krásně vybarvovaly tímto způsobem kultury, jestliže v thermostatu na sladince koncentrovanější poněkud rozrostlé nechány vegetovati v zimních měsících ve tmě v nevytopené, studené místnosti (temp. 10° C i méně). Tu přiházelo se někdy, že i *Chlorella* rostla z části ve voluminésním povlaku barvy žluté, na kterémž místy objevovaly se isolované ostrůvky, častěji pouhé bodovité podoby, temně zelené. Jest to zjev objevování se tak zv. „sekunderních kolonií" v kulturách, zjev na jehož základě mutování, mutabilita u četných mikrobů byla dokázána. V těchto „sekunderních" koloniích objevují se totiž massy mikrobů, jež náleží k téže specii, jako kultura kmenová, nicméně liší se od ní některými význačnými vlastnostmi jako tvarem, barvou, fysiologicko-

[1]) Euler Hans, Allgemeine Chemie der Enzyme. 1910.

byly stanoveny a vybízejí ku prohloubení studia u řas také v tomto směru.

Etiolování vyvoláváno bylo v pokusech referentových také jinými substancemi než určitými uhlohydráty nebo látkami jim podobnými. Jak již vyloženo, také KNO_3 působil tímto způsobem, slaběji leucin. Co se týče etiologie působení, nebyly zvláštní pokusy elektivní vykonány k bližšímu vysvětlení, zda aniontu či kationtu zde větší váha přísluší, zda u mineralné sole též jiných kationtů by bylo možno užíti, zda také jiné aminokyseliny podobným způsobem by byly účinny atd. Ku podivu existují ale v literatuře údaje o shodné působnosti právě KNO_3 i leucinu a sice jako aktivatorů trypsinu. Co se týče leucinu, nalezl Wohlgemuth, [1]) že trypsin žlázy pankreatické stává se účinnějším, nechá-li se žláza před užitím delší čas ležeti. To přivedlo ho na myšlenku, zda aminokyseliny nejsou příčinou tohoto zjevu. Vskutku ukázalo se, že glykokoll, alanin a leucin zřetelně aktivují činnost trypsinu pankreatického, tyrosin však toliko slabě, kdežto kyselina glutaminová a asparagová byla zcela inaktivní. Nicméně ukázaly se při pokusech některé nepravidelnosti; při glykokollu zdařilo se z desíti pokusů aktivování 6×, u alaninu 5×, leucinu též 5×. *Wohlgemuth* domnívá se, že koncentrace zde mohla hráti určitou roli. Zvláštním způsobem shledáváme se ale s podobnými odchylkami právě také při působení KNO_3 na činnost jisté proteasy. Gromow (cit. dle *Palladina*[2]) pag. 440 seq.) shledal, že KNO_3 značně stimuluje činnost proteolytického enzymu, jenž jest obsažen v zyminu. *Zaleski* však nemohl stanoviti žádného účinku této soli na proteolytický enzym semen. *Lewitzky* byl s to, aby potvrdil údaje Gromowovy co se týče zyminu, na klíčení rostliny pšeničné však KNO_3 nepůsobil. V jednom případě může tedy látka tato stimulovati, v druhém nikoli. Z toho následuje, že působení její nemůže býti bezprostřední. *Palladin* se domnívá (pag. 441), že vlivem jejím měněno jest milieu fermentu výhodným pro výsledek akce způsobem právě tak, jako alkali stupňuje katalytický účinek kolloidní platiny.

V našich pokusech vyvolával KNO_3 slabé žloutnutí u *Chlorelly* na sladince pěstěné, a sice ve světle. Intensivně působila (v Artariho mediu s glukosou) tato látka na *Stichococcus majus* a sice též intensivněji ve světle než za tmy. Zároveň se ukázalo příznivé působení vyšší temperatury na zbělení. Není možno vykládati, že KNO_3 působil osmoticky na řasu. Neboť ve tmě v pracovním pokoji, kde nebylo takové vlhkosti jako v teplé komoře (ve skříni), a kde tedy látka mohla osmoticky působiti, objevilo se na KNO_3 u *Stichococcu* vzdor tomu intensivní sezelenání krásných kultur, kdežto ve tmě v teplé komoře, ač méně intensivní, etiolování. Světlo tedy sesilovalo působení dusičnanu. Výkladu, že v našich pokusech

[1]) Wohlgemuth J., Zur Frage der Aktivierung des tryptischen Fermentes im menschlichen Körper. (Biochemische Zeitschrift, II. Bd, 1906, pag. 264 seq.)

[2]) Palladin W., Über die Wirkung von Giften auf die Atmung lebender und abgetöteter Pflanzen (Jahrbücher für wissensch. Bot. 1910, Bd 47, pag. 431 seq.).

přidáno k vodě 10% saccharosy nebo dextrosy nebo ještě lépe saccharosy + kalciumnitrátu, že dostavilo se brzké sezelenání. U etiolovaných lístku pšeničných dostavilo se sezelenání i tehdy, když ponechány byly na světle na pouhé destilované vodě. Zkouška *Fehlingova* s etiolovanými listy ukázala, že pšeniční rostliny, i když byly bez cukru pěstovány, chovaly značné množství rozpustných uhlohydrátu: 5 dnů etiolované na 100 g čerstvých listů 2·67 *g*, 10 dní staré 0·85 *g* (1891, pag. 231). Etiolované listy bobu naproti tomu, ačkoli chovaly železo, rozpustných uhlohydrátů nechovaly. *Palladin* soudí právem: bez cukru není sezelenání. V jiné práci (1897, pag. 394) ukazuje, že toliko určité uhlohydráty to jsou, jež mohou favorisovati tvorbu chlorofyllu u etiolovaných rostlin: saccharosa, raffinosa, glukosa, fruktosa, maltosa, glycerin, galaktosa, laktosa, dextrin. Jiné substance že jsou bez vlivu na sezelenání: inulin, tyrosin. Jiné konečně že retardují nebo i zabraňují úplně tvoření chlorofyllu: mannit, dulcit, asparagin, močovina, ethylalkohol, salmiak, kyselina chinová. Parallelu k našim pokusům s řasami sice zprávy *Palladinovy* netvoří, nicméně tolik je jisto, že jsou určité substance, které i u vyšších rostlin, fanerogam, tvoření chlorofyllu — zde toliko na světle — vybavují, jiné dopouštějí, jiné konečně znemožňují. *Palladin* nalezl také, že toliko do určitých koncentrací může jíti působení příznivé zmíněných uhlohydrátu; stanovil posléze, jaká jest pravděpodobná příčina nepříznivého působení vyšších koncentrací těchto látek (1902, pag. 225 seq.). Vystavil určité množství etiolovaných listů od *Vicia Faba* po 24 hodin a) působení 10% saccharosy, *b*) 30%ní, obě na světle a určil po té množství uhličité vydýchané oběma porcemi během 24 hodin. U *a*) vyloučilo 100 *g* v 1 hodině 150·2 *mg* $C\,O_2$, u *b*) 54·3 *mg* $C\,O_2$. Dýchací koefficient listů, vystavených působení saccharosy po 8 hodin obnášel $\frac{C\,O_2}{O_2} = 3{\cdot}54$. Byl-li roztok cukru slit,: $\frac{C\,O_2}{O_2} = 0{\cdot}96$.

Koncentrovanými roztoky saccharosy byla tedy absorbce kyslíku velmi deprimována a nastoupilo dýchání intramollekulární. Tyto roztoky samy o sobě nemohly poskytovati materiál ku tvorbě chlorofyllu; nicméně působily na etiolované listy nepřímo. Seslabovaly oxydační processy a netoliko že tím zpozďovaly tvoření chlorofyllu, nýbrž i dokonce ho potlačovaly.

Bohužel platí výsledky práce *Palladinovy* pouze pro vysoké koncentrace, dále nevíme, jak působily na oxydace monosy. Na naše resultáty s řasami tím méně jest dovoleno vztahovati beze všeho tato fakta, že nemáme kvantitativních údajů převedených na určité a stejné množství živé hmoty resp. sušiny kultur řasových o dýchání těchto organismů na různých uhlohydrátech. (*Palladin* konaje pokusy s molekullárním a intramollekulárním dýcháním řasy *Chlorothecium saccharophilum* na různých mediích nechal dýchati jednu a tutéž „Rollkulturu" ve vzduchu, resp. H_2, a nesrovnával jednotlivých kultur navzájem.) Nicméně jisté analogie o účinku různých látek na sezelenání jak u řas tak u fanerogam

2. T. komora, světlo; vedle kultur stály etiolované *Salixy*, jež v době protokolu měly lístky již světle zelené:

Původní pahrbek bílý až na jeho hraniční uzounkou obrubu, a jej obklopující na agaru as 2 *cm* zšíří zonu, barvy distinktně světle zelené.

3. Okno v pokoji pracovním. Původní massa bílá; při jedné straně její utvořila se asi 4 × jí větší zona, sestávající z řas, v tenkou kožku se rozmnoživších, intensivně trávově zelená.

II. Po měsíci:

1. Původní ostrůvky bez obruby, kol nich úzká massa, slabě nazelenale žlutá.

2. Ostrůvky původní massy bílé, kol nich temně zelená obruba již asi 4 *cm* široká. Také na agaru se utvořivší zvolna zelená.

Sezelenala tedy na světle toliko ta individua, jež rozmnožila se po agaru, dále pak ty části přenesených kultur, jež nacházely se na periferii původních mass. Největší však část řas nebyla s to, aby sezelenala, třebaže byla vlivu glukosy zbavena; bez tvoření nových individuí nejsou tedy zbělené kultury *Chlorell* schopny sezelenání. Na tomto faktu nic nemění okolnost, že kraj očkovacích mass sezelenal; sestávalť z individuí, jež dostala se pod vliv agaru a následkem toho patrně se rozmnožovala. Také je jednostejno, jestliže v „populaci" okrajní rozmnožila se a sezelenala individua, jež této schopnosti nebyla pozbyla, neboť střed massy zůstal nezměněn, a o ten se právě jednalo, a sezelenání objevuje se pravidelně, očkuje-li se z bílých kultur glukosových na sladinku bez glukosy s maltosou a vůbec na media, jež dopouštějí vývoj chlorofyllu.

Že tedy zbělená individua jsou i ve své organisaci (strukturách?) valně pozměněna, pro to svědčí dle náhledu autorova fakta tato rozhodně. Zasahují tedy media glukosová imediatně a hluboce ve vývoj i differenciaci těchto organismů.

Jak vysvětliti se stanoviska biochemického působení glukosy, resp. které pochody chemické, jak nadcházejí v buňkách řas, attakuje glukosa, o tom lze činiti pouze dohady. Ne bez důležitosti pro tuto otázku jsou údaje *Palladinovy*[1]) (1891, 1897, 1902 a 1911), jež týkají se sezelenání vyšších rostlin a závislosti tohoto pochodu od určitých látek, jež buď v rostlinách samotných se nacházejí, či roztokům, v nichž části etiolované jsou nechány vegetovati, jsou přidány. *Palladin* pozoroval, že etiolované listy od *Vicia Faba*, chované v destilované vodě nesezelenaly, bylo-li však

---

[1]) Palladin W., Ergrünen und Wachsthum der etiolierten Blätter.(Berichte d. deutschen botan. Gesellschaft, 1891, pag. 229 seq.).

Palladin, Recherches sur la formation de la chlorophylle dans les plantes
„ (Revue génerale IX. 1897, 384 seq.)
„ Einfluß der Concetration der Lösungen auf die Chlorophyllbildung
„ in etiolierten Blättern (Berichte d. deutschen bot. Gesellschaft 1902,
„ 20, pag. 224 seq.).
„ Pflanzenphysiologie. 1911, pag. 17.

porušená, snad chloroplasty degenerované, neboť během této doby u normálních, etiolovaných rostlin, jež jsou vystaveny světlu téže intensity, již dávno dostavuje se tvoření chlorofyllu-assimilace. Pozoruhodno je, že základní bílé kultury, jež vzaty byly k pokusu, byly teprve 5 dní staré, tedy čerstvé; nemohlo se tedy v nich nacházeti větší množství individuí odumřelých nebo degenerovaných stářím.

Byly schopny žluté kolonie řasové assimilace? Otázka tato interessovala referenta vzhledem k údaji *Engelmannově*, který pomocí bakteriové methody nalezl distinktní třebaže slabou assimilaci v listech klíčních rostlin *Nasturtia* a vzhledem ku zprávě Ewartově[1]) (pag. 554 seq.), který zjistil slabou schopnost assimilace etiolovaných kotyledonů od *Helianthus annuus*, *Cucurbita Pepo* a primárních listů *Phaseolus multiflorus*, u kterýchžto rostlin sekundární listy etiolované nejevily této schopnosti. O tom informovala autora II. serie pokusů.

II. Kultury 14 dní staré na Sl. zř. + 1·5% glycerinu, krásně rozrostlé, typicky slamožluté. Několik preparátů učiněno, takže také individua z krajů kultur přišla v pozorování. Bakteriové preparáty (také ve Sl. zř. + 1·5% glyc.) s řasami jen v jednom případě ukázaly slabý pohyb bakterií, později však nižádný, u ostatních pak ani po 2 hodinách nebyl konstatován pohyb. V téže tekutině s bakteriemi zelená *Chlorella* ze staré kultury jedné se zřed. sladinkou jevila po zatmění i osvětlení čilý pohyb bakterií i po 2 hodinách.

Barvivo *Chlorell* glycerinovou kulturou ve žluté vybarvených nebylo tedy s to, aby assimilovalo; patrně nenacházelo se v nich ani stopy po chlorofyllu, ba ani ty matečné substance chlorofyllu, jež na světle rychle by dovedly sezelenati, nebyly v nich vytvořeny, resp. bylo vývoji jich glycerinem zabráněno. I ve žlutých kulturách, jak jejich vznik určité látky uhlíkaté vybavují, jest tedy organisace individuí řasových značně abnormní oproti normálním zeleným individuím.

Dále zkoumáno, zda mohou bílé povlaky kolonií *Chlorelly* po přenesení na medium indiferentní, jež dovolovalo by jim samotným t. j. bez přístupu látek zelenání vyvolávajících sezelenati čili tak jak jsou, t. j. bez pomnožování následního individuí, nabýti opět chlorofyllu po delší době. Na agar filtrovanou vodou z vodovodu i destilovanou vypraný, s povrchem asi 3—4 cm^2 velkým, šikmým a suchým přeneseno velkým očkem platinovým množství bílé massy *Chlorelly*, pěstované po 14 dní na Sl. zř. + 2% glukose opatrně tak, aby se řasa nerozlezla.

I. Po desíti dnech.

1. Teplá komora, tma: Původní massa bílá, jen kol dokola pahrbku zona velmi slabě žlutozelená.

---

[1]) Ewart A. J., Further Observations upon assimilatory Inhibition. (The Journal of the Linnean Society 1895, XXXI, Botany.)

vaných, resp. jakým sledován byl vznik chlorofyllu Liro-em[1]) u rostlin etiolovaných. Než základní plán práce referentovy směřoval jinam, otázka tato jevila se mu s jeho hlediska poněkud podružnou i nevěnoval se řešení jejímu.

Že vskutku zjev sezelenávání resp. ztráta chlorofyllu u řas vlivem složení substrátu může býti složitějším než se na prvý pohled zdá, tomu nasvědčují některé zmínky v práci Matruchot-Molliardově, které při nejmenším vybízejí k novému mikroskopickému vyšetření a sledování zjevů těchto. Jmenovaní autoři udávají (1902, pag. 258 a 328), že buňky *Stichococcu* pod vlivem dextrosy a levulosy netoliko ztrácejí tou měrou, jakou se v nich objevují kapky olejné, „degenerace olejová", chlorofyll, nýbrž že i chloroplasty samy pozbývají svých určitých kontur, zdají se jakoby rozplývati až zmizejí: „le leucite deviant très flou ou disparaît complètement." Potvrzení této zprávy bylo by ovšem velmi žádoucí. Vždyt i na údaje Ternetzové o etiolované meziformě *Eugleny* a konstantně hyalinní světelné formě mohly by vrhnouti jisté světlo. Pro naše pokusy vyplývalo by z nich, že jmenované monosy značně hlouběji zasahují do života buňky řasové. Z té příčiny jevilo se referentovi žádoucím zjednati si bližší informace o některých fysiologických schopnostech buněk chlorofyll z části či úplně ztrativších, jmenovitě dovedou-li opět sezelenati a jak brzy. Nejlepší methodou pro to byla ovšem *Engelmannova* bakteriová, jíž tedy užito. Aranžování pokusů bylo totéž, jak vylíčeno v I. díle práce. Každá zkouška provedena s více preparáty.

1. Z kolonie bílé, vyvinuvší se na agaru se Sl. zř. (1:4) + 2% glukosy během pěti dnů, přeneseno do kapky se sladinkou téhož složení (+ 2% gl.) něco řas i *Bacterium fluorescens*. Neobjevil se pohyb jich ani hned ani po půl dni až po 24 hod. V kapce se zřed. sladinkou + 2% glukosou bez řas pohybovaly se bakterie dobře, pokud byl jim k disposici kyslík.

2. Zřed. sladinka — kolonie zelené. Kapka se zřed. sladinkou: Assimilace dobrá.

3. Zřed. sladinka — kolonie zelené. Kapka se zřed. sladinkou + 2% glukosou. Čilý pohyb bakterií, při lampě i denním světle, jež tedy nejsou mediem ženovány. Ještě po 20 hodinách (denní, špatné osvětlení) dosti dobrý pohyb.

4. *Chlorella* zelená ze zředěné sladinky nechána po 28 hodin v epruvetce se zředěnou sladinkou + 2% glukosou. V preparátech s touže tekutinou ukázal se v brzku zcela čilý pohyb bakterií. Tato tekutina nealteruje tedy ani po delší době *Chlorell.*

Bílé *Chlorelly*, jak se ovšem dalo očekávati, nemohou assimilovati. Nedovedou ale ani sezelenati, ačkoli nebylo látek v mediu, jež by tomu mohly překážeti, ani během 24 hodin. Musí tedy organisace jich býti velmi

[1]) Liro J. Ivar, Ueber die photochemische Chlorophyllbildung bei den Phanerogamen. (Annales academiae scientiarum fennicae, Ser. A., Tom. I, No 1, 1908.)

+ 2% dextrosy objevilo se zabarvení světleji zelené než jaké bylo v téže době (asi po 3 nedělích) bez dextrosy. Na Artarim + 1% glukosy + 0·3% leucinu ještě světleji zelené. V modrém zvonu na obou ustředích objevila se temnější zeleň než pod bichromatovým. V modrém zvonu v téže době byla barva kultur světlejší než na diffusním světle v pokoji a valně tmavší než v diffusním světle v teplé komoře.

Protococcus vulgaris a gonidie z *Xanthoria parietina*, obě řasy dle isolací prof. *Beijerincka*, pěstěny v teplé komoře na sladince zřed. (1 : 4 H_2O), Sl. zř. + 2% dextrosa, Sl. zř. + 2% maltosa. U *Xanthorie* pozorován vzrust poněkud lepší než u *Protococca* a sice lepší ve tmě než na světle. Ani u jedné ani u druhé řasy nebylo však možno označiti intensitu jeho za normalní, organismy rostly pomalu. Při tom nejevil se rozdíl v zabarvení jich, jež bylo temně zelené.

Shrneme-li výsledky těchto pokusů, tu především nutno pointovati neobyčejnou citlivost *Chlorell* vůči různým uhlohydrátům resp. látkám uhlíkatým živného substrátu. Citlivost tato umožněna byla ovšem značně vhodností základní půdy kulturní. Resultáty, jichž dosaženo, co do effektu kryjí se do značně míry s pracemi dřívějších autorů o zjevu změny barev řas. Není možno však zamlčeti některých růzností. Byly přivozeny hlavně větším varírováním pokusů, než jak dosud bylo prováděno. Právě pak odchylky tyto dle mínění referentova ukazují, že názorem *Chlodatovým* o významu dusíku při sezelenání řas (Schindler l. c. pag. 570 zdá se, že pojímá tyto příčiny poněkud šíře právě: „Dieser Farbenwechsel wird in letzter Linie stets bedingt durch die infolge der Vermehrung der Fäden eintretende Verringerung *der zur Verfügung stehenden Nährsalze*, vor allem des Stickstoffs") nevystačíme pro všecky případy — jmenovitě přijímáme-li přímé působení peptonu jakožto výživně-fysiologického faktoru.

Na druhé straně ale jest potřebí uvážiti, zda nezahrnuje v sobě otázka dusíku několik parcielních problémů, z nichž při jednom arranžování pokusů zračitěji vystoupí ten, při druhém onen. Při tom pak není vyloučeno, že i názor *Chodatův* netvoří než součást této komplikované „otázky dusíkové". Z dalších zpráv referentových vysvitne snad oprávněnost mínění jeho, že bylo by potřebí celý problém podrobněji zanalysovati. Ty výsledky ovšem, které z jeho práce o tomto sujetu až dosud byly vyloženy, nejsou ničím jiným než několika, a to ještě jen z části, hlasy vypracovanými z komplikované partitury na text: změna barvy chlorofyllu. Až přejde řešení otázky chlorofyllové z rámce čistě chemicky-deskriptivních prací do stadia studií fysiologických, pak podaří se snad jednotlivá themata precisněji stanoviti. Na základě dosavadního materialu bylo by možno aspoň spektrálně analyticky sledovati změnu barev u řas způsobem jakým to bylo provedeno *G. Kränzlinem*[1]) u četných rostlin panašo-

[1]) Kränzlin, G. Untersuchungen an panaschierten Pflanzen. (Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten, XVIII, 1908, pag 193 seq.)

centrovanější sladince (zředění 2:3) objevilo se s glukosou po čase sežloutnutí, na světle ovšem temnou zelení žlutozeleň toliko prosvítala. Zdá se však, že rozdíly tyto oproti *Chlorellám* byly toliko stupňovité. U těchto řas totiž, jak vyloženo, pod vlivem dextrosy objevovalo se úplné zblednutí velmi záhy a bez rozdílu, zda kultury stály na světle či ve tmě. Kdežto u *Stichococcus* dextrosa vybavovala pouze žloutnutí, aniž by zelený ton v kulturách zmizel úplně. Takže sezelenání na světle mohlo býti vybaveno vytvořováním řase vlastních assimilátů. Při použití jodu jeví se totiž v buňkách *Stichococca*, jež vegetovaly bez dextrosy na světle, intensivní zhnědnutí až zčernání, tak jakoby assimilační produkt této řasy byl uhlohydrát již blízký škrobu. U *Chlorelly* však, jak řečeno, hromadí se v buňkách jako produkt assimilace glykogen. Takže substrát kultur na dextrose pěstěných na světle jakoby zároveň obsahoval, jednodušeji řečeno, škrob také. Ostatně také u *Chlorelly* na laktose nebo dextrinu objevovalo se ve tmě pouhé sežloutnutí, nikoli zbělení a v téže době na světle intensivní zeleň, tedy látky, které za tmy působí slaběji, za světla jevily ještě slabší účinek.

Apartním způsobem projevovalo se oproti tomu působení dusičnanu draselnatého (0·5%) a leucinu (0·3%, Artari — jinak bez dusíku — 1% glukosy). Za tmy v pokoji, ještě i po jednom měsíci, byly totiž kultury s dusičnanem temně trávově zelené. Při tom byly krásně vzrostlé, takže není možno souditi, že by KNO_3 působil osmoticky na vývoj řasy. Kdyby tento effekt byl se dostavil v teplé komoře ve skříni, snad by se byl mohl přičítati vlhkosti, jež v ní panovala a eliminování osmotické, škodlivé působnosti dusičnanu. Poněvadž však v pokoji panovalo značnější sucho, než v teplé komoře ve skříni, nemožno činiti zodpovědným za výsledek nic jiného, než vyloučení škodlivého působení světla za přítomnosti dusičnanu. Neboť nápadným způsobem na světle — k disposici byly jen kultury v teplé komoře — objevilo se na tomto substrátu již po třech nedělích skoro úplné zbělení. Poněvadž však v teplé komoře také ve tmě se zbělení dostavovalo, třebaže po velmi dlouhé době — po měsíci byly zde ještě stopy zeleni — je vidno, že k účinku světla přistupovala ještě temperatura okolí. Tedy dusičnan za vyšší temperatury a za světla přivozoval intensivní až úplnou ztrátu chlorofyllu, kultury byly po čase úplně bílé. Podobně, jen pomaleji, působil leucin. V tomto případě zdá se referentovi naprosto nemožným, vykládati zjev jakoby pošlý z nevhodného poměru látek dusíkatých ku uhlohydrátům. Naopak působení světla vystupovalo zde v popředí, effekt byl fotochemické povahy, aktivovaný vyšší temperaturou, upomínající tedy na urychlování tak četných pochodů čistě chemických teplem a světlem.

V monochromatickém světle vesměs objevoval se krásný vzrůst. Na zředěné pak sladince (1:8) jak pod žlutým tak pod modrým zvonem držela se zelená barva dosti dlouhý čas, posléze však nastoupila velmi značná depresse ve výrobě chlorofyllu. Při tom v prvém prostředí kultury staly se úplně bílými, v druhém špinavě žlutobílými. Na téže sladince

umělým vpravováním enzymů v tělo řasové působiti na některé processy biochemické jejich. Dalo se očekávati, že měly-li by tyto látky vliv na stavbu chlorofyllu, že budou řasy reagovati změnou barvy jeho, budou-li přinuceny enzym absorbovati. Jednu část plánu tohoto realisoval referent pokusy svými o vlivu trypsinu na zabarvení chlorell; výsledky jejich budou vylíčeny později.

Lisovaný agar (jedna z nejčistších obchodních sort) vypírán byl po 14 dní proudem filtrované vody z vodovodu lipského a po té po několik dní destilovanou vodou. V něm rozpuštěny součásti mineralního roztoku *Artariho* s $N H_4 N O_3$ a různé uhlohydraty: + 2% dextrosa (Merck, puriss.), 2·5% maltosa, 0·5% glykogen Grüblerův. V každém oddělení pokusu založeno 6 i více rourek. Epruvetky ty drženy v úplné temnotě, v teplé komoře i v pokoji, v obalech velmi řádně upravených a byly jen při kontrole na kratičký čas vystaveny světlu. V seriích v pokoji pracovním otevřeny až po 1 a 2 měsících. Výsledky pokusů úplně potvrdily data, jež byla získána u Sl. zř. s různými uhlohydráty. Barva na všech třech uhlohydrátech byla zcela jinakého tonu a ponévadž pokusy konány v nejpřísnějším zatemnění, není možno pochybovati o tom, že všecky tyto uhlohydráty byly assimilovány. Při tom dokonce vzrůst na glykogenu úplně se vyrovnal vzrůstu na glukose a jmenovitě v pokoji mohl býti označen jako pěkný. Byla pak barva na glukose s počátku bělavá, posléze čokoládově šedá, ale úplně beze stopy po zeleni. Na maltose nazelenalá, posléze trávově zelená. Na glykogenu v Tk žlutozelená, ačkoli distinktně, posléze jasně, v pokoji světle zelená. Rozdíl oproti glukose byl frappantní, že glykogen byl tedy assimilován a působil na vývoj chlorofyllu, o tom nemohlo býti pochybnosti. Jelikož pak tato látka jako normalní produkt výměny látek v těle řasy naší se objevuje a sice ve značném množství, zdá se referentovi stěží myslitelným, ačkoli o částečné pravdivosti výkladu *Chodatova* nemusí býti pochybováno, že by attakovala nějak processy assimilace látek dusíkatých. Spíše specifické její potence chemické se při sezelenání uplatňovaly a vice versa glukosy při zbělení. (*Ruhland*,[1]) 1913, pag. 515 tvrdí, že glykogen nevniká do buněk vyšších rostlin.)

U *Stichococcus* (*Stichoc.*, serie 1) objevily se poměry poněkud odchylné a dosti zvláštní. Především rostla tato řasa za obyčejné temperatury poněkud lépe než v teplé komoře. Nicméně objevil se v obojím prostředí vliv uhlohydrátů stejný, totiž žloutnutí kultur vlivem dextrosy (na Sl. zř. v poměru 1:4). Na Sl. zř. asi po jednom měsíci objevila se barva tmavě zelená, tolikéž na tomto mediu s 2% maltosy. Na světle byla zeleň ještě více stupňována. S 2% dextrosy však objevila se v téže době za tmy žlutozeleň, na 4 resp. 8mi procetní ovšem teprve po značně dlouhé době; na světle bylo sežloutnutí slabší, event. objevila se zde vzdor dextrose zeleň. Také na kon-

[1]) Ruhland W., Zur chemischen Organisation der Zelle. (Biologisches Centralblatt 1913, XXXIII, pag. 337 seq.)

bílá resp. bledožlutá vzdor tomu, že rovnováha mezi dusíkem organickým a uhlohydrátem zde byla. I v tomto případě přicházely asi k platnosti specifické nějaké chemické vlastnosti glukosy.

Další serie pokusů provedena byla tak, že kultury vloženy pod barevné *Senebierovy* zvony. (*Chl.* 4. serie.) *Seibertovým* mikrospektralním apparátem se srovnávacím prismatem zkoušený zvon s dvojchromanem draselnatým absorboval celou modrou partii spektra, objevila se jen červená, žlutá a žlutozelená, s kysličníkem mědnato-ammonatým propouštěl modrou bez zelené a červené. Mělo býti stanoveno, do jaké míry budou působiti různé partie spektra na intensitu vzrůstu *Chlorell* a na barvu jejich v různých mediích, když tato řasa dovedla tak rychle a pěkně reagovati na substrátové složení. Zvony nacházely se na tom místě pracovního pokoje, kam nikdy přímé světlo sluneční nepřišlo (důležité hlavně pro méně lomnou část spektra). Ukázalo se, že pod žlutým zvonem vzrůst na Sl. zř. a na Sl. zř. + saccharosa (2%) probíhal nerušeně, na témže substratu s dextrosou byl však už slabý. Modrý zvon naproti tomu nezabraňoval vzrůstu *Chlorelly*. Co se týče barvy, byla tato na substrátu s glukosou pod modrým zvonem voskově žlutá, uprostřed bílá. Saccharosa také projevovala se poněkud jinak v osvětlení monochromatickém než na diffusním bílém světle. Pod žlutým zvonem po temně zeleném povlaku bílé skvrny, pod modrým kultury s bílým krajem (asi celé kolonie byly potaženy bílým povlakem). Oproti *Nadsonovi*[1]) objevil se tedy vzrůst na substrátech s určitou základní dávkou přirozených živných látek většinou (až na glukosu) nepozměněn. Na appartnějších mediích však nadešly jisté změny, a jest se možno nadíti, že kombinací monochromatického osvětlení a složení substrátu dosáhlo by se intensivnějších effektů ve změně barvy u těchto řas.

Při pokusech s vypraným agarem (*Chl.* 3. serie) zdálo se býti autorovi nejdůležitějším vysledovati, zda působení glykogenu na řasové kultury je vnější či vnitřní resp. zda glykogen buňkami řasovými vskutku je assimilován. Otázka tato je jisté důležitosti pro naše pokusy na př s maltosou, inulinem a jinými složitějšími uhlohydráty, poněvadž, je-li absorbována řasou látka tak vysoce molekulárního složení, jako je glykogen, zajisté že i působení maltosy, inulinu atd. stěží je pouze vnější při čemž by jen látky sladinky samé, eventuelně snad kolloidními vlastnostmi inulinu, rozpustného škrobu atd. „zabavené", působily, nýbrž spíše přímým vlivem na výměnu látek těla řasového se projevuje. Dále podávala se po příznivém zodpovědění otázky glykogenové možnost, že také jiné látky vysokých molekulárních složení, na př. enzymy budou řasami assimilovány, a že celá řada otázek bude moci na základě této methody na řasách býti zkoumána. Tanuť již na počátku pokusů referentovi na mysli plán,

[1]) Nadson G. A, Über den Einfluss des farbigen Lichtes auf die Entwickelung des Stichococcus bacillaris Näg. in Reinkulturen. (Bull. du Jardin Imp. botanique de St. Pétersbourg. T. 10, 1910, pag. 137—150.) Dle autoreferátu v Centralbl. f. Bakteriologie, II. Abt. 31, pag. 286. seq.

tímto způsobem působil (*Mg*). Možno je také, že anion zde zasáhl. Jeť známo z novějších prací Mazé-ho, že nedostatek síry vyvolává u vyšších rostlin etiolování, přidáním této ke kulturám, že vyvolati lze sezelenání. Bohužel nutno v našem případě zůstati při pouhých domněnkách.

Zcela jinak působilo přidání bios ke sladince. Z nich přidání 2%ní maltosy v brzku vyvolalo zeleň za tmy tonu trávového, za světla sytého až tmavozeleného. Maltosa 5tiprocentní působila podobně[1]) a tak také působení koncentrované sladinky velmi pravděpodobně (sytě zelená barva kultur) jest vyložiti jako působení maltosy resp. „přemožení" dextrosy maltosou. Ovšem také přítomnost jiných látek dusíkatých (amidy?) může padati na váhu ve smyslu výkladů *Chodatových*. Zajímavo je, že vzrůst ať na Slzř. ať na Slzř. + dextr. i na Slzř. + malt. byl naprosto stejný, pěkný; snad dokonce na sladince s glukosou poněkud slabší. I to nasvědčuje specifické, chemické působnosti jich resp. glukosy. Saccharosa 5ti i 10ti procentní působila slaběji než maltosa: ve tmě (T k) vyvolala slabou zeleň, ve světle intensivní sezelenání. Snad dovede řasa tento uhlohydrát endoenzymaticky snáze štěpiti než maltosu, kteréžto asi assimiluje nerozštěpenou molekulu. Účinek laktosy byl obdobný saccharose, též glykogen podobně se choval, ačkoli sezelenání nebylo příliš intensivní; dextrin byl obdobně účinným. Inulin ve tmě vyvolával slabé, na světle intensivní sezelenání. Vzrůst na tomto substrátě byl krásný, úplně shodný se Sl. zř. resp. se Sl. zř. + dextr., a valně lepší, než na levulose. Možno z toho souditi, že byl jako rozpustný uhlohydrát assimilován, že však nepřísluší mu chemické vlastnosti dotčených monos (odtud zelenavý vzrůst na světle, posléze intensivně zelený). Škrob (značné sezelenání jak ve tmě tak na světle) snad z části také chemicky působil (dovedouť, jak se zdá, některé *Chlorelly* přece ztekucovati gelatinu dík svým enzymům peptonisujícím (Chodat 88), takže snad také exoenzymaticky do určité míry i škrob by byly s to rozkládati. Jinak bylo by se nutno domnívati, že z odumřelých individuí amylasa vydiffundovala, škrob částečně zcukernila — maltosa, zeleň! — načež zdravá individua látky tyto absorbovala; vyvinulyť se v některých rourkách záhy žlutočervené sektory, jež by mohly býti indiciemi jakéhosi „zápasu" s polyosou, nicméně však z největší části k platnosti přicházelo uhlohydrátové působení základní sladinky.

Glycerin působil (k. sladinka) sežloutnutí kultur, mannit ač tolikéž alkohol (na světle špatný vzrůst) naproti tomu sezelenání.

Dusičnan draselnatý (3%) na Sl. zř. vyvolával většinou na světle jak v T k tak v pokoji distinktní žluto-zelenou barvu, působil tedy poněkud jinak než v pokusech Artariho, kdež na světle s $K N O_3$ nadešlo sezelenání oproti bledým kulturám ze tmy. Uhlohydráty s mineralním mediem Artariho chovaly se podobně jako na Sl. zř.: Maltosa a škrob vyvolávaly sezelenání (také škrob působil tímto způsobem ve tmě), dextrosa zbělení. Přidání peptonu k dextrose bylo téměř bez účinku, dostavila se barva

[1]) Možnost ovšem není vyloučena, že choval preparát dusík.

podobnosti jevila *Chlorella „lipská"* snad s *Chl. variegata Beij.*, neboť po přeočkování na konc. sladinku jevila se po 14 dnech z největší části zelená, dole nažloutlá, jako *Chl. variegata B.* Na sladině + dextrose obě specie nabyly voskově žluté barvy (Srovnej protokoll *Chlorella*, 5. serie). Ku přehledu celkovému stůjtež zde hlavní data z protokollu: (Viz přílohy 1—6.)

Přejděme nyní ke krátkému vylíčení toho, jak se chovala *Chlorella „lipská"* na různých substrátech. Při tom interesovati nás bude hlavně, do jaké míry změnila se zde barva kultur. Za základ pokusu vzata zředěná (zř.) sladinka. Na ní rostla *Chlorella* velmi dobře, takže lze již z toho důvodu stěží vykládati, že účinek přidání určitých substancí (na př. dextrosy) vyčerpával se relativním nedostatkem jiných (na př. organického dusíka), jelikož třebaže zředěná, při nerušeném vzrůstu řasy musila chovati látek jí potřebných dostatek. Závěr tento zajisté tím oprávněnějším by byl, kdyby také za přidávání dalších oněch substancí vzrůst dál se tímže tempem. Pak spíše bylo by lze mysliti na čistě chemické účinky dotčených substancí než na „výživně-fysiologické" ve smyslu *Chodatově*. S pokusy se sladinkou srovnávány byly kultury na minerálním agaru, zde zvláště ovšem byly důležité serie s agarem velmi pečlivě vypraným (*Chl.* 3. serie), jelikož vylučovaly možnost, že *Chlorella* řasa saprofytická, i nepatrným množstvím organických látek za věk asi bráti dovedoucí, reagovala také na látky, jež jako znečištěniny nacházely se v obyčejném agaru. Na sladince zředěné (1:4 H_2O) pouhé (teplá komora = „TK") i s přidáním dalších látek, jež později zeleň vybavují, rostla *Chlorella* v prvních dnech vždy žlutavě, téměř bez chlorofyllu. Teprve později dostavilo se na ní (i bez přísad) sezelenání, a sice jak ve tmě tak i na světle, ačkoli zde dostoupilo po čase větší intensity (Srovnej *Chlorella* 1. serie). Patrně chovala sladinka dosti uhlohydrátů, hlavně maltosy, jež byly s to, aby vyvolaly sezelenání. Přidávání 1%ní dextrosy seslabilo poněkud tvoření chlorofyllu. 2%ní glukosa vybavila v brzku úplnou ztrátu chlorofyllu, kultury nabyly zvláštní, voskově žlutobílé resp. bílé barvy. To dálo se jak ve tmě, tak na světle. Větší dávka glukosy (8%) působila zcela obdobně, jen s počátku objevovalo se ještě trochu zeleni. Jako dextrosa působila i levulosa a cukr invertní, připravený smísením dextrosy a levulosy. (*Chl.* ze serie 2). Jen vzrůst byl na těchto mediích slabší (3—4 oproti 1 u Sl. zř. a Sl. zř. + dextrosa). Také vystupovala při kultivování v pracovním pokoji (obyčejná temperatura, světlo) poněkud zeleň, kdežto Sl. zř. + dextr. byla zde úplně bez nádechu do zelena. Užité monosy vybavovaly tedy intensivní zbělení kultur. Přidání síranu hořečnatého u Sl. zř. + 2% dextr. přivodilo na světle (T k) slabé sezelenání. Poněvadž nebylo pozorovati, že by vzrůst na tomto mediu byl slabší, možno spíše souditi, že $Mg\ SO_4$ byl kulturám ku prospěchu. Snad „antagonisticky" oproti dextrose paralysoval některé její účinky chemické, snad jakožto látka dle Willstättera [1]) účastnící se na stavbě chlorofyllu,

[1]) Willstätter Richard u. Stoll Arth., Untersuchungen über Chlorophyll. 1913. Berlin, Springer.

renoidy (*Chodat*, pag. 85). Na mediích s glukosou ztrácejí buňky zelený pigment, v buňkách objevuje se pak množství kapek olejných (Matruchot & Molliard). Reservní látkou uhlohydrátovou jest u nich glykogen, jenž prozrazuje se hnědočerveným zabarvením celé téměř buňky u velkých individuí po užití jodjodkalia. Rozmnožování děje se endogenně tím způsobem, že mateřská buňka rozpadne se v četná malá dceřinná individua, jež eventuelně i delší čas po degenerování mateřské blány pohromadě zůstávají. Dceřinné buňky tyto se nepohybují (Chodat 85). *Beijerinck* však 1912[1]), pag. 55) uvádí pozorování *H. C. Jacobsena*, jemuž podařilo se v několika případech nalézti u *Chlorella variegata* v kulturách na agaru s vodou z vodovodu a solemi malé, podlouhlé, monociliatní spory, asi po 16 v jedné buňce, které se po uvolnění volně pohybovaly.

Nejlépe reagoval referentovi kmen, jejž obdržel od prof. Miehe-a (Lipsko). Kmen tento pocházel z hygienického ústavu university berlínské a sice z jedné kultury, jež byla označena jako *Saprolegnia* (patrně tvořil znečištěninu bývalé saprolegniové kultury). Kromě toho užito ke srovnání specií *Chl. prototheeoides Krüger*, *Chl. variegata Krüger*, *Chl. variegata Beijerinck-Palmellococcus variegatus Chodat* (pag. 116) a bezbarvé „houbořasy" *Prototheca betulae Bei.* Všechny tyto specie získány byly z botanického ústavu prof. *Chodata* v Genevě. Kromě toho děkuje referent prof. *Beijerinckovi* v *Delftech* předání kultur *Stichococcus majus*, *Protococcus vulgaris* a gonidií z lišejníku *Xanthoria parietina*. Kultury *Chlorell* výborně se dařily ve světle i tmě v teplé komoře (v protokollech „TK") ústavu *Pfeffrova*. Vrstvy vzduchové této místnosti zvláštní výbornou regulací tepla vytápěny jsou konstantní temperaturou od 22—32° C. Pro většinu pokusů zvolena výška 25° C. *Stichococcus* vegetoval lépe v pracovním pokoji níže temperovaném. Nacházely-li se kultury na světle, bylo to osvětlení diffusní; přímé paprsky sluneční k nim nepřipouštěny. Za tmy nacházely se kultury v dobře uzavřených skříních, přikryty černým lepenkovým poklopem, jenž nad to ovinut černou látkou. Toliko pevných medií užívano ke kultivování z toho důvodu, že tekutá media, any řasy vyvíjejí se toliko na dně nádobky, mohla, zvláště ve tmě, trpěti nedostatkem kyslíku. Vzhledem k vyšší temperatuře teplé komory a některým pokusům za zvláště vysokých teplot užíváno všady agaru 3%ního. Většina pokusů provedena s mladinkou, na níž se *Chlorellám* zvláště výtečně daří. Normální sladinka lipská, černá, k pivu ležáku, měla stupeň cukernatosti 18—20; pražská světlá kol. 10. Za mineralní roztok pro *Chlorellu* užito dle *Artarih·* (Pringsh. 46. pag. 444) (v destil. vodě) NH_4NO_3 0·25%, K_2HPO_4 0·1%, $MgSO_4$ 0·025%, stopy $CaCl_2$ a Fe_2Cl_6. Pro *Stichococcus* pak vzato KH_2PO_4 0·2%, $MgSO_4$ 0·1%, $CaCl_2$ 0·02%, Fe_2Cl_6, glukosy 1% a k tomu dusík v různé podobě. Šikmý agar, podélný roztěr. U srovnávaných specií nejvíce

[1]) M. W. Beijerinck, Mutation bei Mikroben. (Folia microbiologica 1912, pag. 4 seq.)

nými uhlohydráty živnými. Nicméně toliko u třech prvních zbarvení objevuje se světle zelené, na galaktose však, ačkoli vývoj fedruje téměř stejně jako látky předchozí, intensivní zeleň. Je tedy dosti lhostejno, zdali dodávaný cukr je ketosou (fruktosa) či aldosou (galaktosa). Na dulcitu zase vývoj jde velmi špatně před se, právě tak na arabinose. Nicméně zeleň na dulcitu je tmavá, ba nejtmavější ze všech medií, na arabinose světlá. U *Stichococcus bacillaris* Naeg. nalezl *Chodat*, že kultury s 2% glukosou (mineralní agar Detmerův) na světle jsou světlozelené, ve tmě čtyřikráte tmavší; se saccharosou že rostou stejně intensivně ve tmě jako na slunci, též že blednou, na světle však více, než ve tmě. Také na maltose že blednou ve tmě i na světle, ačkoliv je slabším zdrojem uhlohydrátovým, než předchozí. Glycerin je stěží assimilován, ve tmě na něm řasy se téměř nevyvíjejí: v souhlase s tím zelená barva kultur se dlouho udržuje a na světle seslábne — látka, která je velmi málo assimilovatelná, neattakuje vývoj chlorofyllu na světle. Pepton, v dávkách 2·4—4‰ přidáván ke glukosovým mediím, vybavoval u *Stichococca* pěknou zelenou barvu (pag 150).

Doplňkem nutno ještě poznamenati, že *Boresch*[1]) a *Schindler*[2]) vysvětlili zvláštní hnědnutí svých řasových kultur (*Boresch*: *Phormidium corium*, *Schindler*: *Phormidium autumnale*, *Oscillatoria formosa*, *Oscillaria limosa*) nedostatkem živných látek, jmenovitě dusíku, jenž přivozován bývá vyčerpáním kultur po jisté době. Přidání nových dusíkatých látek k odbarveným povlakům vyvolá původní chlorofyllové i fykocyanové zabarvení, tolikéž přenesení kultur starých na čerstvé půdy. *Boresch* pozoroval dokonce již po jednom dni, že dostavilo se sezelenání ve zhnědlé kultuře, vhodil-li zrnko KNO_3 do jejího středu. (l. c. pag. 148; u *Boresche* i další literatura týkající se podobných zjevů).

Přejděme k resultátům práce referentovy.

Původně bylo vycházeno od myšlenky, zda nedalo by se hojnou výživou uhlohydrátovou dosíci u zelených řas inaktivace fotosynthetické assimilace. Pokusy, které ve směru tomto byly započaty, v brzku však byly přerušeny z toho důvodu, že zhusta dostavovala se na těchto mediích ztráta chlorofyllu. Poněvadž však objevoval se tento zjev při methodách autorových velmi pravidelně a bylo jej možno velmi lehce vybaviti a oproti dřívějším autorům také daleko rychleji, bylo tím umožněno propracování otázky s jiných hledisk. Valná část kultur provedena byla v botanickém ústavě university lipské za pobytu referentova v r. 1910. Pokusy s trypsinem vykonány v c. k. ústavu pro fysiologii rostlin v Praze 1913.

Za pokusné specie užito po většině řas *Chlorell.* Rod tento vytváří okrouhlé, za normálních okolností zelené buňky, v nichž objevují se py-

[1]) Boresch Karl, Die Färbung von Cyanophyceen und Chlorophyceen in ihrer Abhängigkeit von Stickstoffgehalt des Substrates. (Jahrbücher f. wiss. Botanik, 52., pag 145 seq.).

[2]) Schindler B., Über den Farbenwechsel der Oscillarien. (Zeitschrift für Botanik 5, 1913, pag. 497 seq.)

na sladinku a kultivovány ve tmě, sezelenaly vzdor nedostatku světla. Sezelenání nadešlo také, jestliže bledě vyrostlé kultury na leucinu nebo dusičnanu draselnatém byly osvětleny. Ve tmě vyvolává také erythrit a dulcit zbělení. Mannit s dusičnanem ammonatým vyvolává ve tmě světlou zeleň, mannit s dusičnanem draselnatým až úplnou ztrátu chlorofyllu. Na světle na těchže substrátech všecky kultury objeví se krásně zelenými.

Také *Chodat*[1]) konstatoval u celé řady *Chlorophyceí* (*Scenedesmus, Ourococcus, Chlorella lacustris, protothecoides, vulgaris, Chlorothecium saccharophilum* 1913 pag. 98 seq.), že na substrátech (Detmerův živný roztok) s glukosou zelená barva vystupuje seslabeně. Přidá-li se však k takovým mediím peptonu, že dostaví se sezelenání. Zbělení na glukose nemůže býti degenerací kultur, poněvadž se objevuje již od počátku a řasy rostou zcela dobře. Nemůže býti také následkem příliš rychlého rozmnožování, jakýmsi vyčerpáním, neboť v kulturách s glukosou + peptonem dělení je ještě intensivnější a přece dostaví se temně zelené zbarvení. Na druhé straně (u *Chlorella vulgaris* B.) kultury založené na pouhém agaru bez cukru nebo s přidáním cukrů, jež nemohou býti řasami dobře assimilovány, tak na př. s laktosou, nesežloutnou, nýbrž stále zůstávají zelenými. Zdá se tedy, že příčina této choroby jest to, že není rovnováhy mezi současnou assimilací cukrů a dusíka. Osmotické vlastnosti uhlohydrátů při tom sotva hrají větší roli, neboť cukry neassimilovatelné o téže koncentraci nevyvolávají sežloutnutí. Konají-li se pokusy s medii bez cukrů na světle, assimilace uhlíku, jež se děje na útraty uhličité ze vzduchu, probíhá pozvolna, tak že assimilace dusíku kulturového může jí stačiti. Naproti tomu v cukrových prostředích, k nimž nebylo přidáno dusíku organického, nýbrž dusičnan draselnatý, assimilace uhlíku, umožněná přítomností cukru, je tak intensivní, že převádění dusíku z dusičné kyseliny ve formu organickou, v jaké toliko, jak se zdá, může dusík býti assimilován, nemůže díti se s dostatečnou rychlostí. Věc zdá se býti *Chodatovi* tím pochopitelnější, že chlorofyll je produktem přeměny albuminů, tak že dají-li se řasám za pramen jich dusíkaté látky jim cizí, na př. anorganické, vývoj assimilačního barviva může býti porušen. Zkrátka *Chodat* se domnívá, že musí dostaviti se rovnováha mezi intensitou, s jakou děje se synthesa látek proteinových (redukcí nitrátů) a výživou uhlohydrátovou, nemá-li chlorofyll tvořen býti ve ztenčené toliko míře.

Rozdíly zmíněné projevily se *Chodatovi* zvláště u *Chlorella protothecoides* Kr.; praví v tom ohledu, že by mohla rostlina tato býti nazvána řasou peptonovou.

Také *Chodat* studoval otázku, do jaké míry souvisí výživnost různých látek uhlíkatých v jich schopnostech dekolorovativních. U *Chl. lacustris* Chod. nalezl, že glukosa, levulosa, mannosa a galaktosa jsou vhod-

[1]) Chodat R., Matériaux pour la flore cryptogamique suisse. Vol. IV, fasc. 2. Monographies d'algues en culture pure. 1913, Berne.

Vskutku stanoveno bylo v řadě jiných prací, že lze varírovati barvu některých *Chlorophyceí* zcela zákonitým způsobem dle toho, které látky výživné přidají se k jejich kulturám. Změny dotčené dějí se bez ohledu na to, zda kultury dějí se za světla či za tmy. Ba dokonce *Artari*[1]) ukázal, že gonidie z *Xanthoria parietina* pěstované s peptonem a dextrosou za světla i bez přístupu kysličníku uhličitého sezelenávaly, čímž bylo dokázano, že chlorofyll nemusí býti vytvořován „dle potřeby" organismu, nýbrž že dochází k jeho tvorbě jaksi mechanicky, když převedou organismy řasové ve své tělo látky určité ze substrátu. Někteří autoři nalezli, že zcela určité uhlohydráty vyvolávají u určitých řas ztrátu chlorofyllu. Tak působí dle *Krügera* (cit. dle *O. Richtera*,[2]) pag. 33) na řasu *Chlorella protothecoides* podobným způsobem dextrosa a galaktosa, na *Chlorothecium saccharophilum* tytéž cukry, dále alkoholy glycerin a mannit; z dusíkatých látek pepton, asparagin, také ale i jiné substance. Na třtinovém cukru pěstovaná *Chlorella* rostla zeleně, podobně na inulinu, mannitu a glycerinu. Nicméně nesouhlasí pro jmenovanou *Chlorellu* stupnice barvy, již vybavovaly tyto látky, se stupnicí výživnosti jejich, jež byla: dextrosa (nejlepší kultury, bledé řasy), galaktosa, glycerin, maltosa, dextrin, laktosa, saccharosa; inulin a mannit bezcenné. Také u *Chlorothecia* pozoroval *Krüger* podobné diskrepance, dařilať se tato řasa právě na mannitu velmi dobře (bledozelená vegetace), na glycerinu však (bledý vzrůst) velmi špatně. Naproti tomu Matruchot et Molliard[3]) udávají (pag. 327) pro *Stichococcus bacillaris* dosti značnou parallelitu. Monosy (glukosa a levulosa v 15% gelatině rozpuštěná resp. v Molischově roztoku na světle či ve tmě) jeví se jako jedna z nejlepších živin. Dextrin, gumma, glycerin a mannit mají zřejmou cenu nutritivní. Málo výživnými jsou saccharosa, laktosa, maltosa, pepton a škrob. Co se týče pak barvy: biosy ponechávaly řase její přirozené zbarvení, glycerin a mannit činily ji tmavěji zelenou, dextrin, inulin a škrob zelenou do modra, pepton olivovou; monosy naproti tomu vyvolávaly ztrátu chlorofyllu resp. barvu více méně žlutou.

Artari (1902, cit. dle *Richtera* pag. 33) kombinoval vliv různých látek živných se zatměním resp. osvětlením. Kultivoval-li *Stichococcus bacillaris* na svém minerálním roztoku + 1% dextrosy s leucinem a KNO_3, staly se řasy bledě zelenými až bezbarvými. Byly-li takto zbělené řasy přeočkovány na půdy s asparaginem, či dusičnanem ammonatým, nebo

[1]) Artari, Ueber die Entwickelung der grünen Algen unter Ausschluss der Bedingungen der Kohlensäure-Assimilation. (Bull. der naturforschenden Gesellschaft Moskau, 1899, No 1.)

[2]) Richter Oswald, Die Ernährung der Algen. (Monographien u. Abhandlungen zur intern. Revue der gesammten Hydrobiologie u. Hydrographie, Band 2, 1911.)

[3]) L. Matruchot et M. Molliard, Variations de structure d'une algue verte sous l'influence du milieu nutritif. (Revue générale de Botanique, 1902, T. 14, pag. 192 seq.)

extraktu + 1% citronové za světla, a již zove střední („Zwischenform"). Bylať tak bledá, že při mikroskopování téměř posledních stop chlorofyllu zdála se postrádati, také měla stigma. Po nějakém čase povstala z ní dělením, „štěpením" forma, jež byla úplně bílá, konstantní i na světle a postrádala stigmatu, a individua čistě zelená, tolikéž „neštěpící". Byly tedy mateřské exempláry jejich jakousi intermedierní formou připomínající heterozygoty panašovaných rostlin.

Vznik jich je *Ternetzové* záhadným, nejpravděpodobněji jedná se však zde nikoliv o degenerování chlorofyllu, nýbrž o zastavení tvorby jeho následkem velmi rychlého dělení. Snad při tom náhlé přenášení *Euglen* z roztoků velmi zředěných do koncentrovaných spolupůsobilo. Čistě mechanicky lze dle *Ternetzové* vyložiti vznik formy hyalinní, která objevovala se v jejích kulturách na světle většinou náhle, zůstávala však konstantní neměníc se v zelenou formu ani po několik roků kultivace v peptonových roztocích. Postrádala všeho chlorophyllu, neměla také leukoplastů ani stigmatu a nebyla schopna heliotaktických pohybů. *Ternetzová* se domnívá, že povstala tato forma („die hyaline Lichtform") ztrátou chromatoforů. Představuje si, že jedna *Euglena*, z níž byla založena kultura, na př. s 8 chloroplasty, rozdělí se ve 2 individua tak, že jedno z nich obdrží 8 chloroplastů, druhé však toliko 7, poněvadž jeden z nich ztratil schopnost děliti se. Přejde-li náhodou tento dělení neschopný chloroplast v exemplár, který toliko 7 jich obsahuje, dána jest možnost další generaci dále redukovati počet svých chromatoforů (*T.*, pag. 497), kdežto potomci druhých individuí podrží neztenčený počet 8. Jestliže se pak další dělení stejným způsobem dějí, objeví se generace se 7, 6, 5 atd. chloroplasty, až v osmé generaci povstane individuum chromatoforů úplně prosté. Možnost takovéhoto vzniku hyalinních individuí ovšem není možno popříti. Vskutku máme doklady z experimentalní cytologie pro to, že se elementy buněčné dělí velmi pravidelným způsobem, po případě i experimentalně pozměněné. Nicméně zdá se referentovi výklad *Ternetzové* poněkud umělým. Předpokládá netoliko, že onen vadný chloroplast musí se nacházeti v oné *Eugleně*, která jich obsahuje 7, nýbrž že i při dalších děleních vždy se musí objeviti v individuích s menším počtem chloroplastů, takřka vyměniti se na př. ve IV. generaci s jedním chromoplastem té připravované poloviny individua, jež obdržela jich sudý počet, aby při následujícím dělení rozpadla se v sudý počet chromatoforů a lichý (s nedělitelným). Proto případnější byla by snad domněnka (*Ternetzová* pag. 498), že na př. všecky chromatofory určitého individua schopného opětovně se děliti staly se pojednou nedělitelnými. V každém však případě je velmi nápadným, že forma tato daleko pomaleji se rozmnožuje než zelená původní, že chybí jí odpočívající stadia, že rychleji odumírá, zkrátka, že je značně choulostivá. Dále že může býti vyvolána jen v živných tekutinách, jež chovají bílkoviny. Nezdá se tedy referentovi vyloučena možnost, že jedná se zde spíše o vlivy chemické než jakési mechanické.

látek, jmenovitě uhlohydrátu, tak na př. na desky se želatinou sladinkovou nebo pivní, tu vyrostou kolonie, které jsou s počátku úplně bezbarvé, tak že se podobají kvasinkovým. Teprve po čase, tak po 2—3 týdnech, barví se tmavozeleně nejprve po kraji, posléze však i v prostředku. Při delším přeočkování pomocí téhož substrátu jeví se kolonie peřestými: roztěry jsou s počátku úplně bílé nebo žlutavé, podržují tuto barvu na pokraji povlaku trvale, uprostřed nabývají tonu temně zeleného, načež vysílají odtud jeden nebo více zelených sektorů. Celá kultura podobá se pak ovšem značně panašovanému listu na př. javorovému. Učiní-li se výsev ze střední zelené části, pokud je ještě mladá, objeví se pouze zelené kolonie. Z bílé nebo nažloutlé krajní partie povstanou dle *Beijerincka* po většině opět bílé a nažloutlé kolonie smíšené se zelenými buňkami. Později však objeví se v nich zelené sektory nebo skvrnky. *Beijerinck* udává, že podařilo se mu vyvolati na chudých substrátech, na př. na vypraném agaru se stopami dusičnanu ammonatého a fosforečnanu draselnatého pestré směsice zelených, žlutavých i bílých kolonií, z nichž poslední objevily se mnohdy konstantně bezbarvými. Výsevy na pivní želatině ze starších a často přeočkovávaných kultur jevily velmi různou dědičnost pestrosti. Vliv výživy na tuto variabilitu byl prý v pokusech tohoto autora pouze nepřímý.

Práci *Beijerinckovu* následovalo několik publikací jiných autorů, které ovšem na základě přesných method mikrobiologických byvše provedeny, věnovány byly otázkám týkajícím se změny barvy chlorophyllu řas. Pracemi těmito byly některé údaje *Beijerinckovy* korrigovány, zároveň bylo však jimi ukázáno, že zjevy podobné nikterak nejsou bezvýznamné, „nevinné", nýbrž že zahrnují v sobě několik otázek, které týkají se i vyšších rostlin a jsou významu všeobecnějšího. Pro důležitost, jakou mají vzhledem k výkladům, jež budou v předložené práci podány, buďtež zde nastíněny hlavní jejich resultáty; při tom není ovšem možno opomenouti některých zpráv, jež uveřejněny byly již před *Beijerinckem*.

Zumstein (1899, tolikéž *Ternetzová* 1912)[1]) ukázali, že *Euglena gracilis* ve tmě při dobré organické výživě ztrácí chlorofyll. Ztráta tato, podobná do jisté míry etiolování u vyšších rostlin, a provázená ku podivu rozmnožením leukoplastů (stigma a reaktivnost heliotaktická se nemění), může býti úplná, jestliže původní chlorofyll musí se rozděliti rychle na velkou řadu nových individuí a nový pro tmu nemuže vubec býti vytvářen. Proto je nejlépe vycházeti při očkování pouze od jediného individua. Na světle mohou hyalinní tato individua (die hyaline Dunkelform) opět sezelenati, při čemž v prvních dnech počtu chromatoforu opět ubude (*Ternetzová*, pag. 469). Od tohoto způsobu etiolování odlišuje *Ternetzová* (pag. 475) formu, jež objevila se jí při pěstění *Euglenv* na 2% Liebigově

[1]) Ch. Ternetz, Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Euglena gracilis Klebs. (Pringsheim's Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik, 1912, 51. Bd., 4. Heft.)

Studie o inaktivaci fotosynthetické assimilace a tvorby chlorofyllu.

Část III.[1])

O mutabilitě Chlorell.

Napsal

Dr. **Jaroslav Peklo.**

(Předloženo dne 16. října 1914.)

„Chlorella variegata, ein bunter Mikrobe" jest název práce, v níž přináší 1904 Beijerinck[2]) pozoruhodné, s několikeré stránky důležité zprávy o variabilitě resp. (jak se v posledním svém sdělení z r. 1912 o témže předmětu vyjadřuje) o mutabilitě jednobuněčné, endogenně se však rozmnožující *Chlorophycey*. Isoloval tuto řasu (*Chl. variegata Beijerinck*) delftský mikrobiolog ze šťávy, jež vytékala z jilmu, napadeného drvopleněm, z bahna stokového a z faeces. Podobně jako celá řada jiných řas (*Gloeothece, Aphanothece, Gloeocapsa, Protococcoideae, Bacillariaceae*: *Ludwig* 1893—1901, srovnej též *Krüger* a j.) ztrácí velmi lehce za určitých okolností chlorofyll, podobajíc se pak úplně rodu *Prototheca*, kterýžto ve všem s ní se shoduje až na to, že konstantně chlorofyllu postrádá za žádných okolností ho nenabývaje. (Proto pokládají někteří autoři *Prototheku* za houbu, jež povstala z nějaké zelené *Chlorelly* ztrátou chlorophyllu.) Vyseje-li se species *Beijerinckova* na substrát, chovající hojně živných

[1]) Část I. a II. (O vlivu jedů na fotosynthetickou assimilaci. Pokusy s radiumbromidem) vyšla jako číslo 20. Rozprav České Akademie, třída II, ročník XXII, 1913.

[2]) Beijerinck M. W., Chlorella variegata, ein bunter Mikrobe. (Recueil des travaux bot. Néerl. No 1, Sep.-Abdr., 14 p.). Cit. dle Cetralblatt für Bakteriologie, II. Abth., XIV. Bd., 1905, pag. 338.

v době středního a svrchního oligocénu. Elementární a všeobecný pokles plástve podkrkonošské nastal však až koncem miocénu.[46]) Doba pleistocénní způsobila pak hlavně jen sklon celé plástve k jihu do nitra země.

---

[46]) Důvod pro toto datování byl podán již výše a to v důsledku Puffrova určení (viz pozn. 13.) stáří analogických a stejnosměrných stupňových pohybů při bavorském úbočí Šumavy. Soudí-li Krejčí dle analogie Karpat, že pohyby děly se v českých Sudetách „po době eocénnové" (Předběžné poznámky — v „Archivu pro přírodov. prozk. Čech", I. 2. str. 16) — dle V. Uhliga (Bau in B. d. Karpaten str. 907, 8) v době svrch. oligocénu dělo se čtvrté vrásnění Karpat —, lze se stejnou analogií míti za to, že pohyby v Sudetách odpovídají pátému svrchně miocénnímu vrásnění karpatskému. Ostatně Krejčí nevyslovuje se formou rozhodnou. Důvody Petraschkovy pro oligocénní nebo dokonce předoligocénní pohyby při okrajních poruchách sudetských („Das Bruchgebiet des böhmischen Anteils der Mittelsudeten w. des Neissegrabens" v Zeitschr. d. deut. geol. Gesellschaft 1904, str. 221 a vývody v Abhandl. der Isis, Drážďany 1901) jsou příliš vzdálené, než aby byly rozhodující. — Fr. Frech v pojednání „Über den Bau der schlesischen Gebirge (v Hettnerově „Geogr. Zeitschrift" VIII. — 1902, str. 558) praví, že pozorování na Annabergu u Lešnice ve Slezsku oprávňuje nás k datování sudetských poruch, dle něhož pohyby jejich v druhé polovině miocénu byly ukončeny. Ostatní doklady poukazují k oligocénním pohybům, ale tyto dají se uvésti v souvislost se vznikem Rudohoří a západního Č. Středohoří, jenž předcházel poruchám sudetským.

K												J		B	
ZSZ.	1.		SSV. 2*a*		2*b*		2*c*		2*d*		2*e*		3.		4.	
I.	Střezivojice (*k*)	394	Brusné (*c*)	411	Nosálov vrch	384	Bezdědice	365	Katusice sv.	320	Bukovno	315	Nad voj. cvič.	251	Plasy	221
	Vlkov j.	384	Olešno	410	,, obec *c*	371	Valovice	331	,, sz.	326	,, ob.	309	v. od v. cvič.	248	Vala jz.	226
	Špičák	381	Řibohy sz.	399	Libovís jz. (*vl*)	364	Na písku	326	,,Nad lesem"	310	,, v.	297		—	Větr. mlýn	229
		386		**407**		**373**		**341**		**319**		**307**		**250**		**223**
II.	Jestřebice (*c*)	348	Čepička	352	Stránka v.	334	Skalsko	321	Kováň	303	Plošina	293	(*vl*)	253		
	Nad Hlučovem	354	Mšeno	368	,, sz.	337	,, -Vrátno	313	Krásnoves j.	295	vých. od	283	Chrást	251	Švédské hradby	366
	St. Kokořín	349	Sedlec	361	,, sz.	347	,, - ,,	319	,, v.	293	Kojan	281	(*vl*)	250	Chlomek	355
		350		**360**		**339**		**318**		**297**		**286**		**251**	Bojetice vrch	365
III.	Humenský	333	Nebužely vrch	330	Choroušky z.	320	Kadlín z.	304	Niměřice vrch	287	Řehnice sz.	269	Mezi Zámostím a Chrástem	234	Chlum, z. cíp.	**362**
	Bosyně	327	,, sv.	335	,, sv.	318	,, sz.	301	Na plachtě	286	Vinec sz.	267		230		
	Vysoká	313	Kanina	336	Oujezd	315	,, s.	312	M. Všelisy v.	290	Rokytoves (*c*)	270	Písk. Lhota (*vl*)	238		
		324		**334**		**318**		**307**		**288**		**268**		**234**	Sýcin	222
IV.	Turnovský	252	Nebužely ves (*c*)	311	Zahájí	298	Všelisy vrch v.	286	Bezno ob.	283	Vtelno Jiz. (*c*)	260	Písk. Lhota vrch	260	Němčice (*c*)	228
	,, (*vl*)	256	,, sv.	310	Chorušice jz.	299	Zamachy jz.	286	,, v.	277	,, z.	268	Strašnov z.	247	Libichov	226
	Komársko	257	,, v.	303	Živonín j.	295	Krušiny	282	,, jz.	274	,, z.	263	Němčice vrch	246		**225**
		255		**308**		**297**		**285**		**275**		**264**		**251**		

snadno se dobrati; jest to k *S* rostoucí skočná výše dislokace Bezděčínské. Arci že při čedičovém suku Dědka a Báby u Kosmonos poměry tektenické se zase mění. Velezajímavá jest mohutná kra Chlumu, oddělená od předešlé oblasti dislokací Bezděčínskou (*B*) [45]) a svou výškou dominující celému kraji. Lze se domnívati, že tato kra uchovala se před tektonickým poklesem i denudačním snížením (a to ve výši 362 — viz coll. 4 v côtovém přehledu — pouze tím, že jest proražena žílou čedičovou, u Hrádku pronikající na den. Podobně dělo se též se sukem Dědka a Baby u Kosmonos.

Chlum sice nepřevyšuje nejvyšší oblasti plástve západojizerské, přes to však jest nemyslitelno, že by jeho náhorní pláň náležela parovině neogénní západního Pojizeří; neboť od této ji odděluje nepoměrně vyšší stupeň (135 *m*) než co obnáší Bezděčínské vržení mezi obojí plošinou probíhající (30—35 *m*). Oblast ta vyžaduje ještě podrobnějších studií, ale již dnes předběžně lze říci, že parovina neogénní výšinu chlumeckou obchází, takže tato z první svědecky vyčnívala.

Pásmo Chlumu na východ klesá až po dislokaci Domousnickou ku côtě 290 *m*, nad níž však opět zvedá se kra Markvartická do výše 371 *m* (Hladoměř) a 396 *m* (Čakov). Rozvodí Jizery k Cidlině a Mrlině u Sobotky převádí nás v oblast vysočiny Hruboskalské. Od Libošovské hůry (394 *m*) stoupají pozvolna jednotlivé kry pásma X. *c* a *d* tektonicky neb jen erosivně oddělené k výškám nad 400 *m* a to jednak k Žehrovským skalám a Mužské hoře (420 *m* + příkrov čedičový 42 *m*), k Vyskři (405 + 60), k Troskám (442 + 72) a k skalám Prachovským (455—460). Ostatní côty pásma X. *c* po příp. X. *d* pohybují se kolem 400 *m*. Teprve skály Turnovské (od toku Libunky na sever) vystupují podstatné výše: Rokliny k výši 422 *m*, Rotštýn 455 *m*, Drabovna 465 *m*, Sokol 559. Kry tyto jsou jednak zbytky mohutné flexury, po příp. vysokého vržení, jemuž plástev podkrkonošská při dislokaci lužické podlehla v době sudetských tektonických poruch pravděpodobně koncem miocénu. Vymýkalo by se z rámce thematu, kdyby geologické a morfologické poměry oblasti měly býti zde obšírnějšímu rozboru podrobeny. Účelným jest zde jenom poznamenati, že náhorní plošiny Chlumu Markvartické pláně, Žernovských, Turnovských, Troseckých i Prachovských skal lze s velkou pravděpodobností pokládati za zbytky Rasmussovy paroviny oligocénní, jíž se stejnou pravděpodobností náležely také hory Krkonošské, tehdy jen málo nad své podhůří vyčnívající.

Arci že dnešní poměry výškové nejsou původní. Flexurní a skočné poruchy a vznik četných ker při lužické dislokaci (výše jen příkladem jmenovaných) dávají tušiti, že dnešní côty ca 400 *m* byly v době oligocénní paroviny ve výši dnešního pásma Ještědského a Kozákovského. V té výši asi spočívala v době eocénní a počátkem oligocénu tabule křídová. První poruchy zasáhly sem v době tvoření se polomu podrudohorského,

lépe část plástve křídové, jež jest rozložena mezi dislokačním údolím střední Jizery (v tab. násl.: J)[42]) a údolím Kokořínským (*K*). Tabule tato není bez poruch tektonických, které však jen na některých místech (na př. v údolí březovickém, sudoměřském, spikalském) jsou povahy dislokační; tvoří tedy celkem jednotku morfologickou o svahu jednotném. Oblast jest rozdělena v 20 komplexů o přibližné rozloze asi 8—10 *km*^{2}, takže centra mají lineární vzájemnou vzdálenost asi 3 *km*. V každém oddílu stanovena byla 3 data côtová a po té vzat jejich průměr. Jednotlivá data jsou stanovena hlavně z výsledků měření generálního štábu, pak z udajů Kořístkových (*k*) a Callotových (*c*)[43]). Jen na několika málo místech byl autor nucen doplniti data měřením vlastním (*vl*).

Koordinaty, jimiž rozdělena byla naznačená plástev křídového souvrství, vedeny byly směry, jež jsou dány morfologickými fakty. Oblast jest — jak výše řečeno — mírně zvlněna dle směru sudetského, t. j. ZSZ—VJV. V směru tom byla tedy data côtová seřaděna, a to ve čtyrech pásmech: I.—IV., která soustavu recentních rýh údolních protínají. Pokud se týče sloupců 1, 2*a*—2*e*, 3 a 4, jmenovitě 2*a*—2*e*, tyto rozlišeny zcela uměle, jenom že vedeny byly rovnoběžně se směrem dislokačních údolí Kokořínského a Jizerského.

Takto uspořádané řady průměrných dat prozrazují nepřetržitý vzestup všech pásem plástve naší (2*a*—2*e*) od Jizery k ZSZ. Také sloupce vykazují vzestup, a to k SSV, takže úhlopříčka daného obdélníka jest průměrnou isohypsou. Naznačený vzestup plástve jest náhle přerušen tektonickou poruchou kokořínskou. Dislokační skok této není sám o sobě značný.[44]) U Kokořína činí vržení VIII. a IX. kř. útvaru asi 2—3 *m*, pod Komárskem 13 *m*. Hlavním činitelem zvláštních výškových poměrů v západní části plástve naší jest její zvláštní sklon, (k Z a JZ) a pak rozpad její v menší kry.

Stopujeme-li côtové poměry na druhé straně, t. j. na východním břehu Jizery, pozorujeme nenápadné a poměrům západního břehu přiměřené snížení jen na jihu, při IV. pásmu našeho přehledu. Pásmo třetí jest tu poměrně příliš sníženo. Příčinou byla zde mocnější denudace. Než ani pásmo II. a I. nevykazují vzestupu, který bychom čekali se zřetelem na poměry západního břehu jizerského. Příčiny toho zjevu jest

---

[42]) Dislokace jizerská jest tu zdvojená. Jizera protéká linii poruchy bez vržení. Rovnoběžná s ní porucha Bezděčínská (B) jest spojena s vržením.

[43]) Viz: Práce topografického oddělení v Archivu pro přír. prozk. Čech. I. díl. První řada měřených výšek v Čechách od K. Kořistky. Pak druhý spisek měřených výšek v Čechách II. 1. Tamtéž udán také pramen dat K. bar. Callota.

[44]) Viz: Č. Zahálka, Pásmo IX. útvaru křídového v okolí Řípu; na u. m. obr. 53.

[45]) Č. Zahálka, Pásmo X. v Pojizeří obr. 66.

V závěru pokusíme se o přehled geohistorických událostí, jejichž jevištěm byla severočeská tabule křídová v době třetihorní. Starší éra končí *parovinou oligocénní*, která ze středních Čech prostírala se k Z a SZ do Saska a Durýnska.[39]) Parovina ta zasáhla bezpochyby také do Pojizeří. Podrobný rozbor této otázky pokládati dlužno za jeden z nejbližších úkolů morfogenetického prozkoumání Čech. Do oblasti touto rozpravou vytčené a také dále na V zalétají ozvuky vývoje rudohorského polomu i s vulkanickými jeho důsledky. Sklon k tomuto polomu a dislokace směru rudohorského způsobily, že větší část (S a SZ část) české křídové tabule byla zaujata erosní bází podrudohorské sladkovodní pánve. Poměry tyto trvaly asi do doby svrchního miocénu, kdy vznikaly tektonické poruchy směru sudetského, t. j. v Pojizeří směru VJV, v okolí Pardubic směru JJV. Zde vládly, jak se pravdě podobá, již od doby eocénní svahové poměry směru JV a JJV. Ve svrchním miocénu pak mohla býti vodní síť poruchami sudetskými jen modifikována a prodloužena z V Čech až k Č. Středohoří, tedy též do Pojizeří, kdež erosivní cyklus směru sudetského, podporován jsa příslušnými dislokacemi, zavládl na troskách (jistě sestárlého již) erosivního cyklu rudohorského, jehož zbytky — na př. údolí Košátecké, Řepínské a Jizerské, toto čítaje od Turnova k Mn. Hradišti — sobě podřídil. Dvojí tento erosivní cyklus odnesl v kraji mezi Jizerou a Labem pásmo X. křídového útvaru[40]) v celé mocnosti jeho až na některé zbytky, jež jsouce zpevněny sopečnými suky aneb jsouce po dlouhou dobu předělem tekoucích vod odolaly destrukci a tvoří dnes nevysoké výčnělky nad úrovní paroviny, do níž sploštil se koncem neogenu zašlý cyklus erosivní směru sudetského, zavátý sprašovými hlínami v mladší době pleistocénní. — Jelikož starší třetihorní erosivní děj ukončený oligocénní parovinou Rasmussovou, jen nepatrně splavil usazeniny křídové,[41]) jsou dnešní morfologické poměry v Pojizeří hlavně dílem dvou erosivních cyklů, z nichž první, rudohorský měl svůj počátek v sv. oligocénu, hlavně však probíhal v době spodního a středního miocénu, druhý pak ve svrchním miocénu, pliocénu a starším pleistocénu. Proto parovinu, kterou končil sudetský cyklus, ale která jest výsledkem obou neogenních cyklů, nazvati dlužno **parovinou neogenní**. Tato parovina stala se v mladším pleistocénu a v době alluvialní (— recentní) jevištěm erosivního „cyklu recentního", který jest ovládán tektonickým směrem jizerským a směry, které jsou dány místními poměry svahovými.

Existenci neogenní paroviny a její poměr k starší parovině oligocénní illustrují výškové poměry v středním Pojizeří. Za východisko hodí se nej-

---

[39]) H. Rasmuss, Zur Morphologie d. nordw. Böhmen. Zeitsch. d. Ges. f. Erdk. Berlin, 1913.

[40]) Č. Zahálka, na u. m.

[41]) K tomu poukazují téměř úplně zachované vrstvy X. — deltového pásma kř. útvaru, jež sopečný příkrov Mužské hory, Vyskře, Trosek a j. zastihl.

vodních směru VJV, linie b_1, b_2, b_3 značí nynější svah křídového souvrství a povrchové plochy směru JJV. Založení svahových rýh tohoto směru a jich epigenetické prohlubování do křídového podkladu bylo jedním činitelem, který však byl kombinován druhým činitelem: směrem nejmenšího odporu, jejž při zpětné erosi t. j. při dalším prohlubování kladla fossilní soustava údolní směru VJV. Zpětná erose totiž přecházela na př. od svahové rýhy b_4 k západnější b_3 atd., takže průměrná linie celkového směru jde k JV.

Odchylku od tohoto pravidla činí takové úryvky údolní, kde probíhají dislokace směru jizerského (údolí *b*, *s*, *sp* — obr. 1.). Ale tam zase intensivně se uplatnil činitel sudetského směru; fossilní erosivní cyklus našel zde následkem hluboké rozsedliny *b* — *p* v údolí valovickém (*v*), doubravickém (*db*) své oživení.

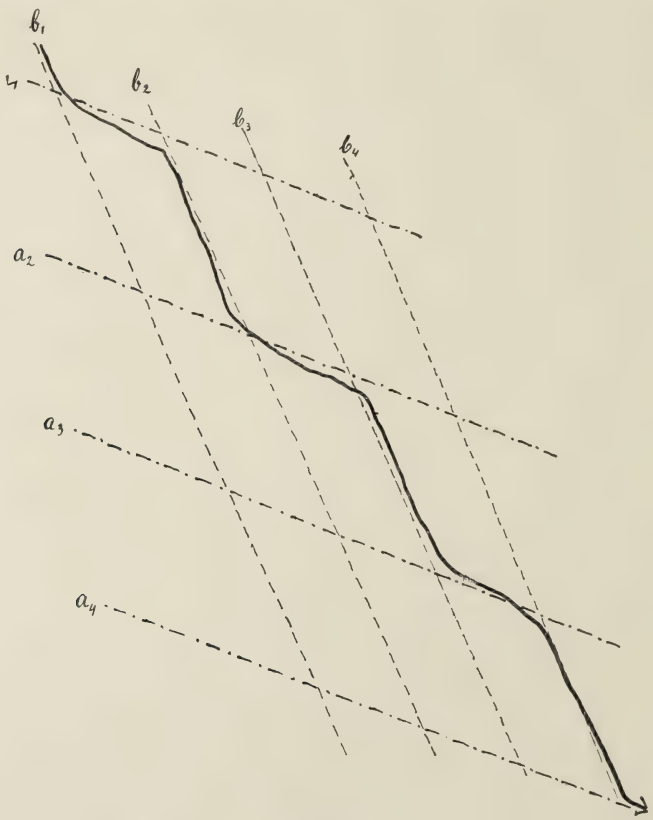
Dislokace směru jizerského byly prvním rušivým činitelem, který zpřetínal údolní systém směru sudetského; v malém vidíme to v účinku dislokační rýhy březovické (*b* — obr. 1.), větší převrat způsobil vznik dislokační rýhy Kokořínské, Liběchovské, hlavně pak Jizerské. Jimi odvedena vrchoviska erosivní soustavy sudetské, jež směřovala k JV českého massivu, do nitra Čech do dnešního Polabí, k čemuž přispěly nové poměry svahové.

Oba děje: změna svahu a vývoj rozsedlin směru jizerského jsou děje korrelatní, vyplývající ze společné příčiny, t. j. z poklesu nitra Čech, jehož osou byla pravděpodobně dislokace nymbursko-mělnická. Arci že pokles takový neděje se zcela jednotně. Jest takřka nemyslitelné, aby tabule křídová klesala tak, jako pevná deska, jíž ubíráme snad po jedné straně podkladu. Plástve kůry zemské klesajíce rozpadají se v kry, oddělené rozsedlinami, při poklesu vznikajícími.

Jest velmi pravděpodobné, že řečené dva děje, změna svahu a vznik rozsedlin, jakožto důsledky jedné společné příčiny, děly se současně. *Morfologicky* ovšem *působí rozsedliny neodkladně*; erosivní děj jen modifikuje účinek dislokačního pohybu. Naproti tomu *změna svahu dává jen disposice, jejíž důsledky probíhají po té v dlouhé době geologické.* V našem případě důsledky nového svahu, t. j. jím vyvolaný nový erosivní cyklus jest dosud v průběhu a nedosáhl po dnes ani svého stadia dospělosti. Sem náleží ještě jeden zajímavý moment. Bezprostřední, t. j. urychlující vliv rozsedlin na vývoj soustavy údolní, jako jest naše soustava jizerská (skup. *c*), způsobil, že údolí tato byla již ve své nynější hloubce koncem doby pleistocénní založena, takže mohly se usaditi na dně údolním štěrky a písky „spodní terasy" Laube-ovy, jež zahrnuje *O* a *U*-terasy Engelmannovy; — dle výškových poměrů soudě jde tu o terasu *O*. — V době vzniku akkumulačních teras *O* a *U* soustava svahových údolí (skup. *d*) se teprv tvořila, a to zdlouhavou erosí v téže době intensivněji působící, co dislokační údolí již jen svá údolní dna zjevy akkumulačními zarovnávala a stala se pro svahová údolí nejbližší erosivní bází.

---

sudoměřské — *s* a spikalské — *sp* a j. v.), jež jsou z výše řečených tří kategorií nejmladší. Tato okolnost ukazuje také k nevelikému stáří dnešního sklonu: JV, JJV. Mimo to nutno uvážiti, že kdyby sklon právě naznačený byl velmi starého geologického data, byl by též erosivní cyklus směru JV dnes již značně sestárlý. Krátce: sklon k JV a JJV jest stejného stáří jako příslušný směr recentního výmolného děje, a tak lze říci, že obojí má svůj vznik a počátek v době polského zalednění, tedy v mladší době pleistocénní.



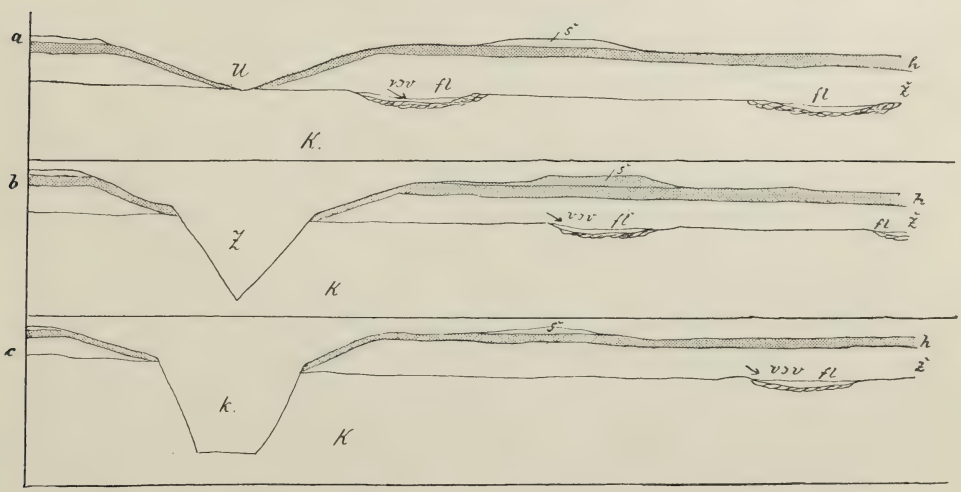
Obr. 6.

Z tohoto poznatku lze vyvoditi též další důsledky. Než předem zde stůjtež ještě některé poznámky k předešlým vývodům se vížící. Jest třeba vysvětliti, proč údolí Strenické (obr. 1. *s*), ač probíhá hlavně oblastí sklonu JJV, nebylo erodováno týmž směrem JJV, jak tomu jest při dolním průběhu údolí „Kojany" zvaném (*k*). Jest nezbytno vyjíti z toho, že také údolí Strenické založeno bylo úžlabními rýhami směru JJV, neboť pro tento směr nebylo žádných překážek na rovině spražovými hlínami zarovnané a k JJV svážené. Ale erose záhy zasáhla epigeneticky (tvrdší) křídový útvar IX. souvrství, a to stalo se nejdříve na bývalých pásmech předělových. Linie a_1, a_2, a_3 (obr. 6.) naznačují schematicky předěly fossilních cest

2*

okolnost, že snad po usazení žlutky, jakožto splodiny subaridního podnebí, nastal znovu normální děj výmolný, anebo že snad erosní cyklus byl oživen snížením denudační báse; — v Polabí dnešním byly asi vskutku podmínky takové dány a to erosí svrchní — hořanské terasy Sokolovy a vůbec všeobecným výmolným dějem, který zasáhl Polabí, tok Vltavy, Berounky a všecky přítoky řek těchto.

Takovýto stav věcí stačil by jen k návratu erosivního děje neb k jeho oživení; údolí systému staršího byla by prostě prohloubena a původní směr VJV byl by zachován. Založení svahových rýh o novém směru (JV) jest vysvětlitelné jen tím, že na staré parovině zarovnané sprašovými hlínami vznikl *nový sklon* oné oblasti křídové plošiny (a její



Obr. 5. *K* = křídový podklad; *fl* = fluviatilní pleistocénní usazeniny rozšířené ve směru vjv; *u*, *z*, *k* = úžlabí, žlab a koryto recentní soustavy údolní; *ž*, *h*, *š* = žlutka, hnědka, šedka mladších odb. pleistocénních.

pokrývky pleistocénní), v níž recentní cyklus erosivní směru JV dnes probíhá.

Na západě, v okolí Mělníka jest sklon rozmanitý; vyvinul se místně pod vlivem četných dislokací jako jest kokořínská a jiné s ní rovnoběžné a starých tektonických linií směru rudohorského. Na východě, blíže k Ml. Boleslavi vládnou klidnější tektonické poměry. Na jih a východ od Mšena „sklon temene pásma VIII. je 2°13′ k JV",[37]) v kraji přilehlém pak k toku Jizery, „na př. mezi Sovinkou, Bukovnem a Dol. Krnskem sklon je temene pásma IX. JJV. o velikosti 20′ "[38]). Variace mezi sklonem JV a JJV jest asi v úzké genetické souvislosti se vznikem dislokačních linií směru jizerského (viz tektonické údolí březovické — obr. 1.— *b*, pak

[37]) Č. Zahálka, Pásmo VIII v Pojizeří, na u. m., str. 27.
[38]) Č. Zahálka, Pásmo IX v Pojizeří, na u. m. str. 143.

ního, lučního a lesního,[33]) která se dle něho na sklonku diluvia vystřídala a se zřetelem k analogickému složení hlin, u Prahy a v naší oblasti usazených, jeví se řečený vývoj podnebí pravděpodobným. Jest však velmi pochybno, že by klimatická období naznačená mohla se vystřídati až při samém rozhraní pleistocénu a doby recentní. Uvážiti dlužno, že jednotlivá období ta byla příliš dlouhá, než aby mohla proběhnouti po posledním zalednění a před dobou recentní.[34]) J. E. Hibsch a Seemann[35]) objevili zajímavý doklad o střídavé akkumulaci éolické a vodní v nedaleké oblasti naší na „Dominikánské hůrce" u Litoměřic. Na střední terase Hibschově spočívá 3—4 *m* (!) mocná vrstva spražové hlíny, která nese ložiska štěrků, jež uloženy jsou na hlíně v poloze značně diskordantní a složeny z hrud a balvanů až i 80 *cm* v průměru měřících. Vidno, že různé fáse stepního podnebí (v širším smyslu) byly přerušovány obdobím „ledovým" t. j. u nás obdobím vlhka a chladna.

Pro určení doby, v níž erosivní cyklus sudetský zaměněn byl recentním, jest důležitou okolnost, že žlutka jest směrovým systémem recentním erodována, přes to však nevychází ani v erosivních užlabích[36]) na den a nebývá přímým podkladem ornice; tato má z největší části svůj genetický původ v mladších, hnědých hlínách, jež mění se v půdu, zvanou v celém kraji „červenkou". Hnědé hlíny tyto přikládají se hlavně v úžlabích (obr. 5 *a*. — *u*) diskordantně na erodovanou žlutku; podobně jest tomu také na náhorních svazích hlubších žlabů (*z*) a koryt (*k*) nad okrajní hranou údolní. Svahy ty jsou totiž zbytkem úžlabních rýh, které zpětná erose recentního cyklu prohloubila.

Z těchto poměrů lze vyvoditi, že *výmolný cyklus recentní směru jv. byl zahájen po usazení žlutky*, ale před usazením hnědé hlíny, tedy ve smyslu hořejšího výkladu o stáří hlin těch *v období polského zalednění*. Ovšem že lze si představiti pro tu dobu pouze vznik mělkých rýh úžlabních, hlavně jen éolické uloženiny zasahujících a křídového podkladu sotva se dotýkajících.

Záměna sudetského směru erosního (vjv.) v recentní (jv.) měla zajisté svou zvláštní fysickou příčinu. Tou však nemohla býti pouze

---

[33]) J. N. Woldřich, Všeob. geologie III. str. 502. 1905).

[34]) Byl tedy správnějším starší názor J. N. Woldřichův (viz „Fossilní fauna stepní z Košířské Bulovky u Prahy — 1897" na u. m. str. 33. dole), když praví: „— upříti se nedá, že i další slabší a méně rozsáhlé zalednění evropské přece po ěkud i na kraje uvedené (české země, Dolní Rakousy, Halič) jakéhosi účinku dosáhlo. — Ve smyslu tom vyrozumíváme pod obdobím poglaciálním u nás období sledující prvnímu (?), hlavnímu zalednění."

[35]) Vysvětlívky ku geol. mapě č. středohoří IX. str. 105.

[36]) „Úžlabím" jest si mysliti rýhu údolní mělkou v podobě ⟍⟋, viz vyob. 5. — u, „žlab" má profil ⟍⟋ v podobě příkřejšího. Tvar údolí ⟍_⟋ zván budiž „korytem".

pleistocénu, dokud rozbor štěrků, písků a lih na jejich palaeontologický obsah nebude systematicky a jednotnou methodou v rozsahu celého českého massivu, pokud se tu naskytá, studován. Dnes má vše ráz prozatímnosti, což platí též o všech pokusech o paralelu s ledovými obdobími v Alpách a v střední a sev. Evropě.

Navážeme-li na vývody ryt. Purkyně[30]) o stáří jeho teras, že totiž nejmladší asi povstala v poslední, t. j. čtvrté době ledové (Würmian), skupina středních teras pak v třetí (Rissian) a skupina svrchních teras v druhé a první době ledové (Mindelian, Güntzian), lze různé hlíny uložené v oblasti námi vytčené pokládati za dílo více méně aridních dob meziledových, erosi jejich pak za stopu dob ledových. Jsme sice zvyklí představě, že období ledová jsou fásemi akkumulačními, v meziledí pak, že štěrkové příkrovy jsou erodovány. Tak tomu vskutku muže býti v Polabí, kdež fáse akkumulační byly přivoděny přibližováním se severského ledovce a z toho resultujícím vzdýmáním vod labských. Ale tam, kde činitel tento byl svým působením vzdálen, způsobil obnovení vodních rýh, jež v období meziledových, pokud tyto byly aridními, byly spraší zaváty; vznikaly takto nové rýhy erosivní.

Jest otázkou, která z našich výše analysovaných a v obr. 2. popsaných hlin odpovídá staršímu loessu Hibschovu.[31]) Dle habitu jest staršímu loessu nejbližší žlutka (obr. 2. č. 4.); potvrdí-li se její současnost, pak bude na snadě veškerá chronologie usazenin našich. Pravděpodobno, že žlutka naváta byla po saském zalednění, v meziledovém období helvetském, rudá hlína železitá (č. 5.) jest pak ovšem ještě starší; hnědá hlína (č. 3.) měla by stáří mladšího loessu Hibschova pocházejíc z období následujícího polskému zalednění, tudíž z období meziledí neudeckého. Její erose odpovídala by poslednímu, u nás ještě méně pocítěnému zalednění meklenburskému, po němž na sklonku pleistocénní doby byly asi usazeny šedé hlíny.

Čtyřdílné hlíny oblasti naší lze svým vznikem předběžně připsati čtverým obdobím aridním, jež následovaly po čtverém alpském zalednění.[32]) Se zřetelem pak k názorům J. N. Woldřicha o posloupnosti období step-

---

[30]) Terasy Mže a Vltavy na u. m. st. 156 a n.

[31]) J. E. Hibsch, Versuch einer Gliederung der Diluvialgebilde im nordböhm. Elbtale. Jahrb. d. k. k. geol. R.—A. 1899.

[32]) Dodatečně jest názor ten podporován nálezem lebky, zubů a úlomků kostí, jež náleží turu krátkorohému, bos brachyceros fossilis Woldř. Jest to člen fauny ropicko-subtropické, v meziledových dobách k nám přistěhovalé. Jest ovšem pravda, že příchod zvířeny té se opakoval v různých dobách meziledových a ústup její při návratu klimatu drsného; proto musíme si všímati zároveň polit olitických nálezů kulturních, zbytky zvířen doprovázejících. Při řečeném nálezu však překvapují robustní rozměry (— stoličky dosahují 10—11 *cm*!) ukazující na zvíře nijak nedegenerované. Nález objevil se ve hloubce 2 *m*, tedy asi uprostřed žlutky. — Vrchní vrstvy, kostkovice a trupelka nejeví ani stopy podoba čistě stepní fauny.

měry z okolí Katusic, Borče a j. J. N. Woldřich rozeznává „šedé žlutky léssovité", pak hnědé hlíny různých odstínů a hlíny šedé. Podati bezpečnou paralelu mezi těmito a našimi hlínami na základě mechanického rozboru stíženo jest okolností, že J. N. Woldřich užívá mechanického rozrůznění dle klíče, který nekryje se zcela s modernějším tříděním, jež vyvolává konstrukce dnes užívaného plavidla Kopeckého. Srovnáme-li rozrůznění

Starší:	Částky suspendované		Písek				Kostra
			pod 0·25 *mm*	0·25—0·5	0·5—1·0	1·0—2·0	nad 2 *mm*
dnešní:	I. Hlínovka pod 0·01 *mm*	II. Prach 0·01—0·05	III. Písek práškový 0·05—0·1	Písek IV. 0·1—0·5	V. 0·5—1·0	VI. 1·0—2·0	Kaménky nad 2 *mm*

ta, tu seznáme, že nekryjí se jmenovitě součástky střední velikosti a ty právě bývají dle názoru C. r. Purkyně[28]) udavatelem pro účastenství vodního ronu při vzniku éolohydatinních usazenin.

Možno tudíž jen přibližně hlíny naše srovnávati s hlínami z Jenerálky a Bulovky. Předběžně lze říci, že Woldřichovy „žlutky", „hnědky" a „šedky" upomínají na naše hlíny (obr. 2. vrstva 4., 3. a 2.). Určitěji odpovídají tyto hlínám od Skvrňan na Plzeňsku,[29]) kdež pod ornicí spočívá „loessu podobná" šedohnědá hlína, která svým rozborem č. 6. (na str. 12) blíží se naší trupelce.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Kostra
Purkyňův rozb. č. 6.	35·38	36·47	12·36	11·75	1·82	1·42	0.80
Trupelka viz výše č. 2	29·0	36·9	13.2	12·4	3·2	3.5	1.8

Rudohnědá hlína č. 4. (str. 12) upomíná na kostkovici. „Loessu podobné žlutky" mají na Plzeňsku vyznačnější stopy ronu vodního, než žlutky z naší oblasti.

Než přiznati dlužno, že tyto a všecky ojedinělé pokusy srovnávací nebudou míti tak dlouho závažné ceny pro stratigrafii a chronologii

[28]) Plistocaen na Plzeňaku. Na u. m. st. 20.
[29]) Purkyně, „Plistocaen —" na u. m. st. 15. 16.

následují dvě vrstvy písku (prům. 1·2 a 1·3 *m*), hrubšího. pak jemného s vrstvami jílu větvícího se. Teprv potom uložena žlutka 1·5—2·5 *m* mocná, nahoře (pod ornicí) přecházející v červenou „kostkovici".

Erosivní cyklus směru sudetského dospěl — podobně jako právě řečené pozůstatky cyklu rudohorského — svého starobného stadia. Široká a mělká údolí o nízkých předělech byla éolo-hydatinními uloženinami jen dokonaleji zarovnána, takže, nebýti jednak nevysokých výčnělků (monadnocků), jednak recentních rýh údolních, parovina takto vzniklá byla by dokonalou rovinou. Názor ten dotvrzují přirozené profily, jež vyvolány recentním výmolným cyklem a jsou viditelné při hranách údolních. Recentní výmolné rýhy přetínají starší fossilní plochá údolí v kosém úhlu. (Viz obr. 5.) Podél hran údolních lze sledovati pravidelně se střídající partie, v nichž éolické uloženiny mají nejmenší mocnost a spočívají bez fluviatilního podkladu přímo na křídovém podloží s partiemi, kde obojí uloženiny, fluviatilní i éolické, v mocnosti 8—10 *m* jsou uloženy a recentními údolními rýhami prořaty. Nejsou-li éolické usazeniny přítomny hned při hraně údolní, nalezneme je ve směru vjv. na př. v úvozech polních cest neb na druhé straně ve směru zsz. Někde užila nová výmolná soustava údolní tohoto pásma nejmenšího odporu k vyhloubení pobočných údolí (viz na př. *v* neb *t* obr. 1.).

Po takových dokladech mizí poslední pochybnost, že pod příkrovem éolických usazenin skrývá se jen málo zvlněná parovina, kterou jako své konečné dílo vytvořil zašlý dnes erosivní cyklus směru sudetského.

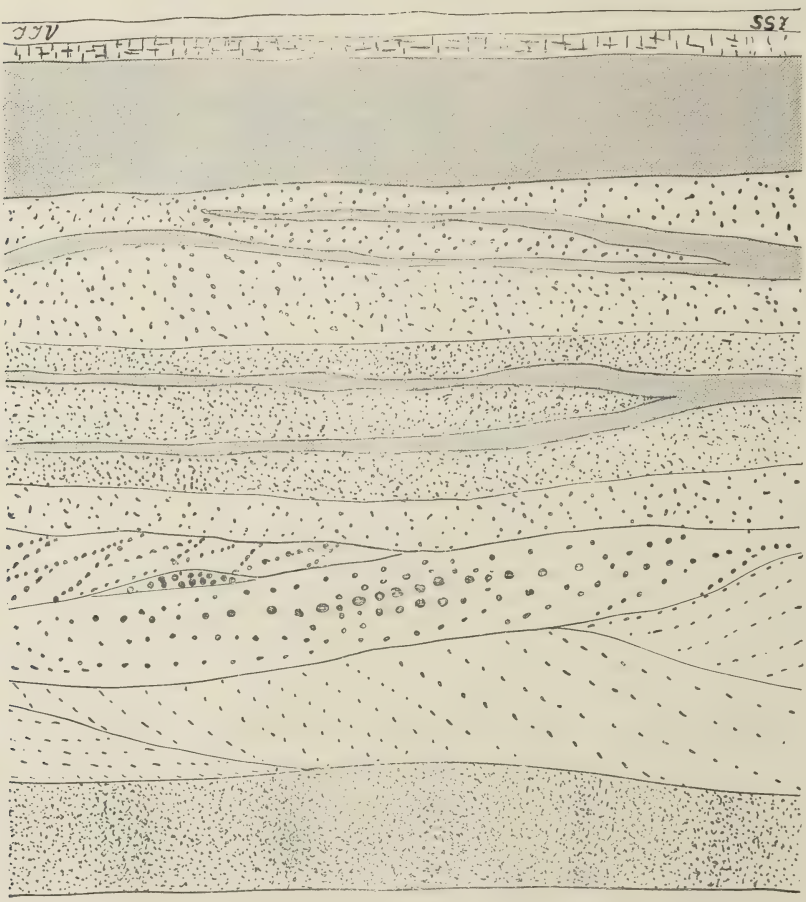
Nastává úkol, pokusiti se o určení doby vzniku a zániku tohoto cyklu. Předem datum zániku. Ten jest přibližně současný s usazením éolické přikrývky jeho, popsané výše v profilech. Určení stáří této přikrývky — aspoň přímé určení — jest dosti nesnadné. Pro nedostatek pomůcek palaeontologických[25]) jest nutno vzíti útočiště k methodě srovnávací se zřetelem k mechanickému složení příbuzných usazenin bližších a vzdálenějších oblastí. Tak na př. hlíny v Jenerálce a Košířské Bulovce u Prahy uložené a J. N. Woldřichem analysované,[26]) pak hlíny pleistocénní na Plzeňsku, analysované C. ryt. Purkyní[27]) jeví nejednu analogii s po-

[25]) Učiněno bylo opatření, aby na příště nepřišla na zmar žádná fossilie, a to jak v oblasti zde vytčené tak i v sousedních, takže další pokračování práce, které bohdá rozšíří a prohloubí tuto geomorfologickou studii bude se moci opírati též o material palaeontologický. — Mezitím, co tato rozprava byla v tisku, sdělil mi laskavě p. Jos. Lukavec, řídící učitel v K. tusicích, řadu nálezů uči.ěných v hliništi popsané cihelny. Poukazuje se k nim — pokud nenáleží v obor historické archaeologie níže — v pozn. 32.

[26]) J. N. Woldřich, Fossilní fauna stepní z Košířské Bulovky u Prahy; pak: Tábořiště diluviálního člověka v Jenerálce u Prahy. Obojí v Rozpr. Č. Akad. II., r. 1897, resp. 1900.

[27]) Plistocaen (diluvium) na Plzeňsku. Rozpr. Č. Akad. II. 1904.

Košátecké směru rudohorského bylo s ponecháním tohoto ač v opačnou stranu (v s v) obráceného směru převedeno do vodní sítě sudetského směru. Mimo důvody, k nimž se ještě vrátíme, ukazuje k tomu směr největšího neklidu viditelného v písečníku cihelny u Chotětova (obr. 4.); směr ten leží v prodloužení údolí Košáteckého, takže jde tu o jeho pravděpodobné fossilní pokračování. Další studie ještě ukáží, není-li toto prodloužení



Obr. 4.

totožné se vzpomenutou již dislokací Chotětovskou. Pojetí možné totožnosti s dislokací Košáteckého údolí podporuje tu senilní morfologie povrchu, pod nímž dislokační vržení se skrývá, z něhož pak dá se souditi na stejné stáří, jaké jeví údolí Košátecké.

Skalnatého t. j. křídového podkladu písečník chotětovský (obr. 4.) nedosahuje. Na spodním, nezvrstveném šedém písku spočívá rzivý, štěrkem prostoupený písek o několikeré diskordanci, 2—2·8 *m* mocný, načež

po dlouhý čas zachovávaly na mediích složení normálního barvu trypsinovou, pak by to bylo dalším důkazem, že jedná se v pokusech referentových o jeden toliko genotyp, kmen tento že byl trypsinem ve svých základních vlastnostech pozměněn, a změny tyto že udržují se během četných generací. Ku zjevu tomuto musil by se přirozeně poutati zvláštní zájem referentův.

Za kmen pokusný zvolena byla *variegata B.* (od jedné kolonie odočkovaná), která 1 měsíc byla rostla na sl. zř. (1:1) + trypsinu etherem sterilisovaném. Utvořila zde krásné, aureově zbarvené povlaky, jež do jedné třetiny své šířky ovroubeny byly hyalinním lemem. Rozumí se samo sebou, že při mikroskopování před další serií pokusů osvědčila se naprosto čistou.

Za media kulturní zvolena sladinka zředěná vodou v poměru 1:1, dále v poměru 2:1 + trypsin varem sterilisovaný. Za material srovnávací vzata *variegata B.* z téhož lití (opět od 1 kolonie isolovaná), jež však trypsinem nebyla prošla. Veškeré kultury vegetovaly opět ve tmě v thermostatu na 2%ním agaru za 25° C. (Trypsinová variegata rozdělena na dva typy, z nichž jeden, odočkovaný ze středu „aureového" kultury, v protokolech veden jako „aurea" ze středu, druhý, z hyalinního kraje, veden jako „hyalina"). Trypsin sterilisovaný ve sladince zvolen ke srovnání z toho důvodu, že v předcházejících pokusech objevilo se na něm intensivní sezelenání řasy tak, že právě „otrávená" *Chlorella* měla největší možnost v krátké době na tomto mediu sezelenati. Již předběžný pokus (serie V.) ukázal, že trypsinová *Chlorella* (aurea i hyalina) po měsíčním téměř vegetování na sl. zř. (1:1) nenabyla barvy zelené, zůstávajíc žlutobílou; na sl. zř. 2:1 nabyla barvy gummigutově žluté. Aureový ton zmizel zde právě tak jako hyalinní; v rychlosti vzrůstu nebylo pozorovati nejmenšího rozdílu oproti tempu, jakým rostla řasa na trypsinu ani oproti normálním „otráveným" mediem neprošedším individuím. Tyto poslední kultury nabyly v téže době na Sl. zř. 1:1 intensivně zelené barvy. Podrobnější pak data při opakování pokusu po delší dobu vegetační byla tato (serie VI.):

Po 4 asi nedělích byla aurea na Sl. zř. 1:1 žlutobílá, buď úplně bez zeleni nebo se zelení téměř nepozorovatelnou, „hyalina" úplně bez veškeré stopy po zelené barvě, bílá až žlutobílá. Na silnější sladince oba typy nabyly barvy gummigutově žluté, druhá poměrně zelenější. Normální kultury byly v té době distinktně zelené na obyčejné sladince, na téže sl. s trypsinem sterilisovaným varem intensivně trávově zelené. Po 5 nedělích dosáhly trypsinové řasy na sl. koncentrovanější tonu aureově gummigutového (netrypsinová *variegata* byla v té době na tomže mediu zelenavě naběhlá.) Na Sl. zř. 1:1 byla barva žlutavá resp. aureově nažloutlá, po zeleni nebylo téměř ani stopy, na trypsinu sterilisovaném jen u bývalé „aurea" objevila se žlutavá zeleň až slabá. („Hyalina" nabyla tonu šedožlutého.) Srovnávací kultury byly již normalně zelené, na trypsinu steril. tato barva byla ještě význačnější.

Ton zeleni od té doby měnil se jen nepatrně. Po 6 nedělích také ještě nebyla téměř žádná zeleň v kulturách trypsinových; na sl. koncentrovanější udržoval se ton gummigutový. Po 10 týdnech na Sl. zř. 1:1 „aurea" byla žlutavá, „hyalina" kalně žlutavá s tonem gummiguty. Na Sl. zř. 2:1 H_2O oba typy byly světleji žlutavé, v době, kdy kontrolní kultury na tomže substrátu byly již tmavě smaragdově zelené. Patrnější zeleň mohla býti konstatována pouze u „aurey" kultivováním na Sl. + trypsin steril., jež byla však slabě zelenou s nádechem do kávova, kdežto „hyalina" zachovávala šedožlutý ton téměř úplně zeleně ještě prostý. Slabé sezelenání objevilo se v kulturách na Sl. 1:1 (ostatní zatím vysazeny) teprve po 3 nedělích. Po 6 měsících ukázala se špinavá žluť, jen se slabým nádechem do zelena. Pro jiné práce musily býti po té pokusy přerušeny.

Při mikroskopování ukázala se naprostá čistota kultur po skončení pokusu. Také morfologicky byl rozdíl mezi řasami trypsinovými a netrypsinovými nepatrný. Obě sestávaly z individuí, jež při zbělení zůstávajíce více méně při sobě nabývají hranatých obrysů, z individuí volných kulatých a chlamydomonadových protáhlejších. Jen u trypsinových bylo těchto posledních trochu více, což asi souvisí s tím, že hojněji se dělily. Také celkem bylo v trypsinové *Chlorelle* více individuí s glykogenem pozorovati než ve formě zelené. Nicméně mohlo to býti pouhým následkem toho, že řasa trypsinová, jak pozbyla chlorofyllu, tak asi ztratila schopnost převáděti glykogen v další substance.

Kultury úmyslně nebyly přeočkovávány, nýbrž průběhem celého pokusu nechány v těchže rourkách. Při přeočkování na sladinku zř. objevuje se totiž vždy nejprve žlutý ton na povlacích, kultury nepřeočkované tudíž měly lepší možnost sezelenati. Také složení substrátu s trypsinem steril. bylo pro sezelenání velmi výhodné, řasy nacházely se tedy v podmínkách optimálních. Přes to sezelenání bylo nepatrné, kultury zůstaly žlutými resp. nabyly toliko žlutého tonu, lišíce se nepatrně od normálních netrypsinových serií. Tvoření intensivnější chlorofyllu při nejlepších podmínkách nedostavilo se tedy ani po půl roce.

Diskusse resultátů.

S rozmachem nauky o dědičnosti, kterýž datuje se od posledních pěti, nanejvýše desíti let, také tak zv. variabilita[1]) mikroorganismů objevila se v novém světle. Zajisté jest ne poslední příčinou toho, že dříve nebyla hlouběji studována, zjev, že většina mikrobů rozmnožuje se cestou nepohlavní (Na druhé straně ovšem kopulace u plísní i kvasinek je processem velmi rozdílným a také jistě pro přenášení dědičných vlastností velmi významným, a je proto nápadné, že nemáme dosud prací, které by jednaly

[1]) Soustavně vyčerpáno jest thema toto v knížce: Pringsheim Hans, Die Variabilität niederer Organismen. 1910, Berlin, Springer.

o zjevech mendelistických u těchto organismů. O pohlavnosti u bakterií konečně nejsme dobře informováni. Jelikož však typy jejich zůstávají právě tak stálými, jako u vyšších rostlin, jež jen vegetativně se množí, musíme i u těchto předpokládati dědičnost a jsou materiálem vhodným k experimentálnímu studiu této „prosté" heredity). Bylo proto asi v záplavě prací, týkajících se stěpení vlastností, polyfaktorie atd. u vyšších rostlin, prostě přehlédnuto, že měnivost mikrobů na mnoze není pouze pomíjející, efemerní, nýbrž že shoduje se často i s podivuhodnými zjevy tak zv. mutací, jež u vyšších rostlin se objevují a jimž bývá i základní důležitost pro fylogenii připisována. Je zvláštním, že v nejnovější době, kdy de Vriesovy názory o mutacích rostlinných byly tak značně otřeseny, ne-li vyvráceny (srovnej zprávy Heribert-Nilsonovy, názory Nilsson-Ehleho, Johannsena a Baura, z nejposlednějších pak zpráv na př. resumé prací Lidforssových o křížení různých *Rubusů*[1]) důkazem, že mutace jsou vlastně zjevy kombinačními po předchozím křížení, „mutace" mikroorganismů nejsou studovány vlastně ještě intensivněji, než jak se dosud děje.

Methodika pracovní v tomto oboru vyžaduje ovšem daleko větších garancií o tom, že pracováno je s materiálem jednotným, čistým, než jak v obyčejných pracích bakteriologických se děje. Jest nutno učiniti východiskem pro řadu pokusů kulturu založenou od individua jednoho, tak zv. čistou linii dle *Johannsena*, (ovšem že čisté linie vyšších rostlin vyznačují se oproti bakteriovým též zaručenou homozygotitou). V četných případech u bakterií, ovšem také u konidií plísní, lze dosíci takovýchto kultur, jak již bylo v předchozích odstavcích vyloženo ,nejlépe methodou Burriho. Často však methoda tato selhává, ana tuš bakterie poškozuje; tu pak vede opětované lití desek k cíli stejnému. Již při lití desek z jedné kultury jest pravděpodobnost velmi značná, že isolované kolonie poslední desky pocházejí z jediné buňky, čili že jedna taková kolonie představuje již „čistou" linii. A i v tom případě, když by buňky kolonie takovéto nepocházely od jediné buňky, nýbrž od několika individuí, jež byla s touto souvisela, zbývá přece velká pravděpodobnost, že ony buňky byly individui sesterskými spíše, než aby byly pokrevně zcela cizími. U těch druhů, jež vyznačují se pohyblivostí, je konečně pravděpodobnost, že dvě související spolu buňky povstaly štěpením individuí zcela cizích, minimální (*Wolf*[2]) pag. 94). A čím vícekráte takto desky lijeme, tím větší docházíme pravděpodobnosti, že získaná kultura vskutku představuje linii „čistou".

Ve velmi četných případech objevují se odchylné formy bakterií již při lití desek z takovýchto čistých linií. Lze nalézti kolonie (tak zv.

[1]) Bengt Lidforss-W. Johannsen: Resumé seiner Arbeiten über Rubus. (Zeitschrift für indukt. Abstammungslehre, 1914, Bd XII, pag. 1—13.)

[2]) Wolf Franz, Über Modifikationen und experimentell ausgelöste Mutationen von Bacillus prodigiosus und anderen Schizophyten. (Zeitschrift für induktive Abstammungslehre, 1909, Bd. II, pag. 90 seq.)

sekundární kolonie), které se naprosto od většiny kolonií odlišují, ač bezpečně náležejí k téže specii či varietě bakteriové. Povstalať právě každá z nich z individua, jež nabylo odchylných vlastností a přeočkováním lze tyto odchylné vlastnosti udržeti v kulturách. Velmi často objeví se jen část kolonie odchylně stavěna, jen výsek její, sektor buď barvou, množstvím slizu, strukturou povrchu a podobně se od ostatních partií liší. Velmi nápadně jeví se to dle Beijerincka v kulturách *Actinomyces annulatus*, kterážto specie v normálních okolnostech tvoří kolonie sestávající z koncentrických bílých kruhů, jak se v nich tvoří tak zv. konidie. „Mutuje-li" však kolonie, může se státi, že ztratí v určitých svých místech schopnost tvořiti distinktní takovéto kruhy, jež pak jeví se omezeny na zcela určitá místa, kdežto velké sektory jeví se stavěny skoro homogenně, téměř bez kruhů. Sektory takovéto objevují se někdy, jak bylo již řečeno, také lijí-li se desky z kultur *Chlorell* nebo v kulturách *Chlorellových* na agaru v rourkách. Tak zvané sekundární kolonie, jak se objevují u různých mikroorganismů (bakterií, kvasinek), jakožto jakési výpučky z normálních kolonií (knoflíkovité) ve tvaru jazykovitých výběžků atd. a jež mají puvod v tom že nové jako mutanti vystupující formy doznávají velmi rychlého dělení, nejsou asi podstatně odchylnými od tvoření vylíčených sektorů.

První zprávy o změnách pěstěných mikrorganismů, kteréžto změny na další generace se přenášejí, děkujeme *Hansenovi*. Ku podivu jsou publikace tohoto autora z tohoto směru dosud nejdůležitější. *Hansen* pracoval s kvasinkami a postupoval od jedné buňky; selekce tedy nehrála zde žádné role. Vystavil-li kmeny své, jež za normálních okolností na sádrových blocích tvořily spory, vlivu abnormně vyšší temperatury, ztratily i schopnost tvořiti spory. Vznikly tak asporogenní rassy, možno říci úplně konstantní, neboť ani po dvanáctiletém přeočkovávání, kdy sta generací byla vznikla, nevrátila se jednotlivým liniím schopnost původní. S jiným, neméně zvláštním zjevem fysiologickým setkal se Massini při svých pracích o *Bacteriu coli*. Zprávy jeho o tomto předmětu vyvolaly celou literaturu, vzbudily živou diskussi a byly úplně potvrzeny. Massini isoloval z lidského střeva *Bacterium coli*, které se ode všech známých kmenů tohoto *Schizomyccta* tím lišilo, že postrádalo schopnosti rozkládati mléčný cukr tak, že na substrátech, jež chovaly tuto substanci, nedocházelo ku tvoření mléčné kyseliny. Nicméně tvořil kmen tento, byl-li pěstěn na mediích s mléčným cukrem (na př. na tak zv. endoagaru), po čase sekundárné kolonie ve tvaru „knoflíků", jež na substrátech bez tohoto cukru nikdy se neobjevovaly a jichž descendenti vyznačovali se schopností vyráběti z laktosy mléčnou kyselinu. Schopnost pak tato objevila se býti dědičnou, i po přeočkování na obyčejný mléčného cukru prostý agar zůstávala zachována, jen v jediném z mnohých případů byla pozorována ztráta její. Massini mluví zde o mutaci ve smyslu *de Vriese* a nazývá své bakterium *Bact. coli mutabile*. *Benecke* (l. c. 1909, pag. 216) opakoval pokusy tyto vycházeje od jednoho individua dle methody Burriho a potvrdil tvoření sekundár-

uích kolonií s význačnými jich vlastnostmi. Odporučuje jen, aby bylo vycházeno při příštích takovýchto pokusech od mikrobů, které by pocházely co možná nejvíce se stanoviska přirozeného. Neníť nemožno, u bacteria Massiniho, že jedná se o formu, která kdysi vyznačovala se schopností zkvašovati laktosu, prošedši však střevem (tak ale snad všecky kmeny coliové prošly a přece kvasí! Pozn. referenta) degenerovala, pozbyla schopnosti kvasivé a po čase, právě v kulturách Massiniho této schopnosti zase nabyla. Takže by se nejednalo o vznik vlastnosti nové, nýbrž toliko o opětovné vyvolání karakterů, kterými linie před časem již se byla vyznačovala. Pracemi *R. Müllera*[1]) a jeho školy byly zjevy podobné rozšířeny na celou řadu bakterií, *Müller* sám konstatoval mimo jiné, že kterýkoli kmen bacilla tyfového může tvořiti sekundární kolonie a stanovil pro lékařství velmi důležité faktum, že z této bakterie mohou podobným způsobem povstávati bakterie paratyfové (pag. 314). *Bacterium coli mutabile* podržuje svoji novou vlastnost v kulturách kielského bakteriologa již po léta. Se stanoviska čistě botanického byla studována variabilita mikrobů *Wolfem*. U prodigiosa bylo stanoveno, že mohou vzniknouti i modifikace pomíjitelné, tedy nedědičné, vlivem některých abnormních činitelů, a sice dosti různé. Bílá barva kultur dostavovala se následkem zvýšení temperatury, přidání dvojchromanu draselnatého, síranu měďnatého, fenolu k mediu kulturnímu; modifikace do modrovioletového tonu po síranu měďnatém, octanu měďnatém, dusičnanu a síranu kobaltnatém. Absolutně konstantní „mutace" vznikaly po přidání chloridu rtuťnatého (bílá barva), tmavočervené mutace po přidání nadmangananu draselnatého, dusičnanu kademnatého, sublimátu a chromátu. Některé mutace byly zvratnými, trvale nebylo je tedy možno udržeti v kultuře na normálních půdách. Při pozorném výběru a častém přeočkovávání bylo lze nicméně libovolně dlouho udržovati kmeny při bílé barvě; přísadou původní byl zde chromát, octan měďnatý, dusičnan kademnatý a nikelnatý. Podobně choval se *Staphylococcus pyogenes aureus*; jakožto dědičná mutace vznikla jedna bílá rassa z příčin neznámých. U myxobakterií (*Myxococcus rubescens* a *virescens*) bylo docíleno konstantních změn zvýšením temperatury, různostmi ve složení živném kulturních medií a přidáváním jedu. Většina mutací vznikla tedy, přidalo-li se ku živnému substrátu nepatrné množství nějakých, ve větším množství otravných solí. Podobným způsobem podařilo se vyvolati *E. Schiemannové*[2]) „mutace" u *Aspergillus niger*. Dvě konstantní vznikly po přidání dvojchromanu draselnatého; vyznačovaly se hnědou barvou. Jiné vyvolány byly extremní temperaturou (45° C). Ve všech případech bylo na bíledni, že vybavovány byly silným podrážděním resultujícím z abnormních podmínek kulturních. Srovnáváním kultur normálních s abnormními

[1]) Müller R., Bakterienmutationen. (Zeitschrift für induktive Abstammungslehre, 1912, VIII, pag. 305 seq.)

[1]) Schiemann E., Mutationen bei Aspergillus niger von Tieghem. (Zeitschrift für induktive Abstammungslehre, VIII, 1912, pag 1—35.)

ukázalo se aspoň, že mezi 178 „nepodrážděnými" kulturami objevila se mutace toliko 1 (= 0·5%), mezi 397 „podrážděnými" však 8 (= 2%). Mezi mutacemi chovaly se některé velmi zvláštním způsobem. Tak ukázalo se u mutanta „altipes" (pag. 31), že podráždění, které působí na generaci první, může vyvolati změnu v generacích následujících, která je úplně odchylná od reakce původní: *Aspergillus niger* reaguje na extremní temperatury pomalým vzrůstem, tvořením hustého špinavě bílého mycelia a zakrsalými konidionoši; descendenti, kteří prošli dvakráte pasáží zvýšené temperatury, rostou rychle, tvoří mycelia volná, bílá, s dlouhými vzdušnými větvemi a velmi dlouhými konidionoši. Jiné mutace jeví velmi značnou variační šířku, některé projevují zvrat. *Watermann*[1]) doplňuje údaje *Schiemannové* daty biochemickými. U *Penicillium glaucum* podařilo se mu vyvolati dědičně stálé (při následném pěstění na sladinkovém agaru) mutace po přidání 0·2% borové kyseliny k tekutině živné s 2% saccharosou; podobně působila silná narkotika: kyselina paraoxybenzoová, salicylová, trichlorakrylová, tetrachlorpropionamid, pentachlorpropionamid, dále galaktosa, laktosa. U *Aspergillus niger* působily tímže způsobem jedy jako skalice zelená a kyselina borová, jmenovaná narkotika (vyjma pentachlorpropionamid), živné látky jako galaktosa, laktosa a raffinosa jako jediný pramen uhlíku, glutarová, levo i antivinná kyselina, rhamnosa. Konstantnost mutací zachovala se při pěstování, které po celý rok až léta trvalo. Morfologické rozdíly mutantů nemusí býti provázeny stejnosměrnými differenciacemi fysiologickými (pag. 12.). Tak vykazovala jedna forma daleko jinou výměnu látek než forma mateřská, ačkoli se této morfologicky velice podobala; plastický ekvivalent uhlíka v procentech činil u ní 24, a u formy mateřské 41. Naproti tomu plastické ekvivalenty bichromatových mutantů *Schiemannové* (35 resp. 39·5%) nelišily se mnoho od mateřských forem téže autorky (43·9%) ani od *Watermannových*. Jinak nalezl *Watermann* u mutantů ekvivalenty 19, 30 atd., tedy hodnoty zcela různé, faktum, které činí ovšem vývody jeho poněkud podivnými.

A. Blochwitz[2]) (1914) podává nejnověji radostnou zvěst o tom, že podařilo se mu vyvolati nový druh plísně pomocí silného podráždění světelného. Již před několika léty popsal Wehmer pode jménem *Aspergillus giganteus* formu, která se velice podobá druhu *A. clavatus*, liší se však od něho obrovskými rozměry a vysloveným heliotropismem. Tutéž pak formu obdržel *Bl.* z kultur *A. clavatus*, ozářil-li je asi jeden den silným světlem elektrickým, ponechal pak vegetovati za velmi slabého jednostranného osvětlení, selektoval velké nosiče konidiové slabě heliotropické a opakoval ozáření i selekci. Dimense i tropismy vyvolávány byly tedy dle autora ponenáhlým „přízpůsobením", v dalších však generacích objevily se dědičně

[1]) Watermann H. J., Mutation bei Penicillium glaucum und Aspergillus niger. (Zeitschrift für Gärungsphysiologie 1913, III, pag. 1 seq.)

[1]) Blochwitz A., Entstehung neuer Arten von Schimmelpilzen durch starke Lichtreize. (Berichte d. deutschen botan. Gesellschaft, 1914, XXXII, pag. 100 seq.)

fixovány. Bohužel pohřešuje referent ve zprávě Blochwitzově bližší údaje o tom, jak byly zakládány původní kultury, jmenovitě nebylo-li pracováno s populacemi. Neboť jinak bylo by velmi snadno možno, že postupem autorovým, při němž povlovnost a selekce hrála značnou roli, eliminovány byly všecky linie, jimž se nedaří při silném osvětlení a jež jsou zmáhající se robustnější formou přerůstány.

Velké prohloubení přinesly ve veškery tyto otázky práce Beijerinkkovy.

Beijerinck[1]) řadí různosti, jež se objevují mezi potomstvem téhož druhu, mezi modifikace, fluktuace, mutace a (u sexuelně differencovaných mikroorganismů, na př. u *octospora*, u něhož musíme předpokládati karyogamii spojenou s dělením redukčním) i kombinace. Modifikace nejsou dědičné anebo dědí se jen během několika málo buněčných generací než jsou ty, při kterých povstávají. Dědičnými a sice během neobmezeného počtu generací jsou ostatní formy differenciací. Na modifikacích spočívá differencování, jak se objevuje při obyčejné plynně před se jdoucí ontogenesi. Při tom změny jsou ovládány obyčejně vnitřními, zřídka vnějšími podmínkami a jakmile tyto podmínky samy se mění, děje se totéž s jejich produkty. Při fluktuacích stojí dědičné změny pod vlivem podmínek vnějších. Při tom doznává po většině největší počet individuí téhož kmene tutéž změnu. Naproti tomu hrají při mutacích vnější podmínky roli více podřízenou, hlavními faktory změny jsou vnitřní podmínky, které se uplatní obyčejně v několiko málo individuích kmene. Přes to bylo nalezeno u více mikrobů, že musí přijíti zároveň jakési podráždění, aby mutace byla vybavena. Nicméně lze se prý domnívati, že při realisování fluktuací převažují podmínky vnější, u mutací vnitřní. Obě kategorie liší se od sebe ještě co do stupně změn: u fluktuací jsou skoky menší než u mutací. Ve své práci mluví autor toliko o mutacích, které vystupují za normální výživy.

Počet mutativních možností u jednotlivých kmenů mikrobů zdá se býti neomezeným. V kulturách Beijerinckových toliko určité mutace vystupovaly a počet jich nemohl býti nijakým způsobem zvýšen. Tak obnáší počet mutací stanovených *Beijerinckem* pro *B. prodigiosus* 15, *Schizosaccharomyces octosporus* 9, *Bacillus herbicola* 3—5, fosforeskující bakterii *Bacillus ind.* 4. Mnohdy vystupuje u téhož druhu mikrobového týž mutant zcela pravidelně a opětovaně tak, že se zdá, jakoby „mutační" proces bral se určitým směrem a dle zákonů předurčených vnitřními příčinami. Nicméně neobjevují se všickni mutanti se stejnou lehkostí, a tak jsou někteří hojnější, jiní vzácnější. Mutant *Schizosaccharomyces octosporus seriatus* jest na př. zjevem vzácným, *S. oct. asporus* velmi obyčejným.

Také jiní mikrobiologové stanovili týž zjev. Velmi důležito je, že přečasto mutace činí dojem pouhého atavismu, v každém případě zvrat karakteru, kterýžto ovšem rovněž za proces mutativní musí býti považo-

[1]) Beijerinck, Mutation bei Mikroben. (Folia Microbiologica 1912.)

ván, neznačí nic jiného než „mutaci“. Zdali mutace přinášejí s sebou něco nového pro organismus, jakýsi fylogenetický pokrok, zdá se *Beijerinckovi* nepravděpodobným. Někdy objevuje se sice u mutantů mikrobových znak, který neexistoval u rassy kmenové, tak může povstati na př. u *Bacillus prodigiosus* mutant *viscosus*. Při tom zůstává však nerozhodnuto, zda tento nový znak: tvořiti sliz neexistoval již u vzdálenějších příbuzných *Bacilla* tak, že by jeho vystoupení neznačilo nic jiného než atavismus. „Vorläufig muss als wahrscheinlich betrachtet werden, dass die Mutanten keine neue Glieder des Hauptstammes der sich in phylogenetischem Sinne entwickelnden Organismenwelt sind, sondern nur das schon Dagewesene oder besser gesagt, das schon in der Anlage Vorhandene repräsentieren“. (pag. 8). Není tedy ani u mikrobů dokázáno, že by nové geny („Gewinnmutationen“, „Gewinnmutanten“) vznikaly.

Beijerinck udává, že většina mikrobů, jestliže jsou jen dostatečně dlouho pozorováni v kulturách, jest s to jeviti mutaci. Jen u *Cyanophyceí* nebyl tento zjev dosud pozorován, při čemž *Beijerinck* poznamenává, že příčinou toho může býti pohyblivost těchto mikroorganismů, kteráž znemožňuje pozorovati dotčenou změnu v koloniích také u většiny nižších *Chlorophyceí*. Tak kultivuje *Beijerinck* jeden kmen *Pleurococcus vulgaris* již od r. 1888, aniž byla pozorována na něm nějaká změna. Podobně stálým jeví se *Stichococcus bacillaris* a *Cystococcus humicola* (z *Parmelia parietina*). Naproti tomu u *Chlorella variegata* jest mutace „so zusagen eine normale Erscheinung (l. c. pag. 28). *Chlamydomonas* (řasa sexuelní!) mutuje tolikéž. Také u *Saccharomycctů* kvašení alkoholového jest mutace zjevem zcela obyčejným, ba u *Schizosaccharomyces octosporus* činí mutace na pozorovatele, který po prvé se s ní seznámil, dojem spíše nějakého zcela normálního pochodu, na př. variability. Z povrchu téměř každé kolonie *octospora* lze lehce tři různé mutanty v čisté kultuře sebrati, při čemž může sloužiti za indikátor pouhý jod, jenž barví violetově glykogen buněk i tmavomodře spory obsahující granulosu a stanoví kvantitativní rozdíly v obsahu těchto látek jak u mutantů tak vzhledem ku formě mateřské. Zajímavo je, že titíž mutanti mohou vycházeti z různých předchozích forem. Tak mohou vzniknouti z mateřské formy *Bacillus prodigiosus* mutanti: *roseus*, *albus*, *viscosus*, *auratus*, *hyalinus*. *Hyalinus* jakožto mutant druhého stupně (II.) z mutanta *albus* (I.), *viscosus* (II.) z *auratus* a *hyalinus* (I.), *albus* (II.) z *viscosus* (II.), *auratus* a *hyalinus* (II.). Mutant třetího stupně (III.) *albus* konečně z *auratus* (I.), *viscosus* (II.) a *hyalinus* (I.), *viscosus* (II.). Jestliže pak mutanti vrací se zpět ke své formě mateřské, což *B.* ve svých kulturách přečasto pozoroval, děje se to tak, že opětuje se nejprve skok, který byl nejposledněji učiněn. Tak vrací se na př. sekundární mutant *Bacillus prodigiosus viscosus albus* při atavování nejprve k primárnímu mutantu *Bacillus prodigiosus viscosus*, formě, která vyznačuje se hojným tvořením slizu a červenou barvou, a ne přímo k normální formě *Bacillus prodigiosus*. Někdy ovšem intermediérní stupeň probíhá velmi rychle, takže vzniká

dojem, jakoby se mutace vracela přímo ku kmeni původnímu. Také pozoruje se u některých mutantů, že zvrat děje se nadobyčej rychle, takže tekuté kultury, v nichž dějí se takovéto mutace, činí dojem spíše fluktujících variací, při nichž objevuje se dotčená forma mutační toliko během několika generací (l. c. pag. 51). To pozoroval *B.* na mutaci *parvus* od *Bacillus indicus*. Zvláštní je, že dochází velmi pravděpodobně dříve ještě, nežli mutace se projeví na venek, k jakýmsi processům promutačním (l. c. pag. 48). Pěstuje-li se mutant *Ascococcus* (význačný tvořením zvláštních zoogloëových chuchvalců) z *Bacillus herbicola* na mediích sladinkových při 20—30° C, lze obdržeti lehce materiál úplně konstantní. Činí-li se z něho výsev na mineralní agar se saccharosou a KNO_3, nezmění se forma za žádných okolností. Přeočkuje-li se však z tohoto posledního media opět na sladinku, v brzsku dostaví se atavismus a utvoří se stará forma *herbicola*. Je patrno, že zvrat tento musil býti připravován již na agaru s dusičnanem a saccharosou, že na tomto mediu děla se jakási „promutace". Zároveň je jasno, že jedná se zde o podmínky výživy, které vybavují určitý mutační zjev. Že při tom hraje vázaný dusík potravy hlavní úlohu, je velmi pravděpodobno.

Pro práce referentovy jsou ovšem nejdůležitější výsledky *Beijerinckovy* o mutacích *Chlorell*. Bohužel nejsou data delftského bakteriologa o tomto objektu příliš četná (l. c. pag. 56 seq.). Mutativní zjevy sledovány byly na *Chl. variegata B.* Mutace projevují se v této specii tím, že vznikají v roztěrech žlutě zbarvené sektory, v deskách žluté kolonie, které předávají tuto vlastnost, jež očividně spočívá na ztrátě určitých schopností, svému potomstvu. Povstává tak mutant zvaný „aurea". Mikroskopickým ohledáním lze zjistiti dle Beijerincka, že chloroplasty toliko na jednom anebo na několika málo místech svého těla podržují schopnost tvořiti barvivo, kdežto na ostatních místech této schopnosti pozbyly. Takže mutace nespočívá na ztrátě chloroplastů a shoduje se se zjevy albikace, jako je pozorujeme u vyšších rostlin. Rozdíl však zde jest ten, že u „aurea" *Chlorell* na určitých místech chloroplastů pozorujeme zachovánu zeleň normální intensity, kdežto u „aurea" chloroplastů vyšších rostlin pozoruje se stejnoměrné žluté zabarvení. Mutativní tuto formu nazývá *B. Chlorella variegata aurea*. Mimo tuto objevila se v kulturách *B*-ových ještě jiná mutace, sestávající z úplně bezbarvých individuí formy *prototheková*. Stalo se to však jen několikráte v kulturách na agaru s mineralními solemi, při čemž nalezeny byly jednotlivé kolonie, jež byly bezbarvé. V každém případě jest tvoření tohoto mutanta řídkým zjevem. Jest možno, že rod *Prototheca*, který se vyznačuje konstantně bezbarvými buňkami, vskutku vznikl mutací z nějaké zelené *Chlorelly*. Jest to tím spíše možné, že *B.* udává, že i „houba" *Prototheca* (z přírody isolovaná) chová ve svých buňkách bezbarvý chloroplast, v němž lokalisován jest glykogen („glykofor"; také u *Chl. variegata* objevuje se glykogen v jediném lasturovitém chloroplastu), takže *prototheková* mutace od *Chl. variegata* představovala by prý přímý

přechod řasy v houbu. „Aureový" mutant objevoval se v kulturách *B-ových* velmi hojně. *Chl. vulgaris*, isolovaná z vody, netvořila v kulturách *B.-ových* nikdy aureových mutantů.

Z jiných podobných zjevů budiž zde učiněna zmínka ještě o značné mutativnosti znaku tvoření tuku u t. zv. kvasinek hmyzových (l. c. pag. 75.). Tyto kvasinky — Lindnerův *Saccharomyces* (*Torula*) *pulcherrimus* žijí ve voleti a žaludku čmeláků a včel. Čerstvě isolovány na deskách želatinových rostou ve způsobě buněk kulatých, asi 7 μ měřících, z nichž každá jest vyplněna jedinou velkou kapkou olejnou. Přeočkují-li se však do tekuté sladinky, změní se jejich podoba, objeví se menší formy oválné (*S. pulcherrimus secundarius*), které jsou tuku prosty. Při zpětném výsevu na agar lze pak konečně na deskách opět shledati se s jednotlivými koloniemi tukovými. Kvasinka — glukosová forma — může slabě kvasiti, schopnost tato spojena jest se vznikem drobného mutanta sekundárního, jenž jest tuku prost. V útrobách hmyzu se kvašení očividně neděje, neboť odtud lze sice formu *pulcherrimus* obdržeti tolikéž, ačkoli jen v malém množství. Nicméně přiznává *B.*, že pojmy mutace a modifikace nejsou od sebe příliš ostře odděleny. Zjev sám u symbiotických organismů jest však asi rozšířenějším, tak na př. tak význačná pleomorfie symbiotických *Azotobakterů* mšic mohla by sem snad spadati.

Co se konečně týče onoho podráždění, jež mnohdy musí z venčí přijíti, aby mutace se dostavila, jsou jím asi u *Bacillus prodigiosus* nějaké alkalické produkty výměny látek. Neboť mutace se nedostavují v bouillonu, který je slabě okyselen, a je-li bakterium tak často přeočkováváno, aby vzniklé alkali neneutralisovalo kyseliny. Že však tato látka musí se nacházeti uvnitř těla bakteriového a nikoli mimo ně, pro to svědčí okolnost, že kultivuje-li se tento mikrob na deskách, k nimž se mimo obyčejné živné látky přidá něco kulturních materialií, jež již byly opotřebovány kulturami předchozími, nemá to vlivu na mutační pochody. (pag. 31.). U *Streptococcus hollandicus* zase jest nejpravděpodobnější příčina dráždivá vzniku slizového mutanta omezený přístup kyslíku ke kulturám (pag. 37). Při získání mutanta auratus od *Bacillus prodigiosus* hrají asi faktory výživné jistou úlohu, neboť z masového bouillonu lze jej snadno získati, nikdy však ze sladinky, kdežto mutanty sladinkové vznikají stejnou měrou v obou živných mediích. Také nezdá se býti bez vlivu přítomnost organických látek v mediích živných na vznik mutace „aureové" z normální *Chlorelly* dle *Beijerincka*. Aspoň nepodařilo se mu nikdy isolovati tuto formu z mineralních kultur a naopak roste v těchto mediích s uhličitou, jakožto pramenem uhlíka „aureový" mutant po přeočkování s počátku jen pomalu a podržuje žlutou barvu, načež objeví se atavismus k formě normální. (l. c. pag. 57.) Velkou váhu však přes to *B.* těmto vnějším vlivům nepřikládá, spíše jen mezi jakési podpůrné faktory, zdá se, že je počítá.

Veškery zprávy tyto mají velkou důležitost a z největší část. jsou také vykládány jako doklady pro tak zv. dědičnost získaných vlastností.

Problém tento souvisí do značné míry s ideami, jež pronášejí tak zv. lamarckisti, jmenovitě novějších směrů, o schopnostech organismů přizpůsobiti se k podmínkám, jež je obklopují a přímým takovýmto přizpůsobením získané zvláštnosti přenášeti beze změny na potomstvo.

Jako doklad těchto názorů uváděny jsou řady pozorování, která vskutku zdají se nasvědčovati tomu, že existují jakási přizpůsobení v přírodě (že ovšem exaktnímu přírodozpytci jedná se hlavně o dokázání cest, jimiž se udála, je na bíledni). Tak uvádí Jakowatz (cit. dle Wettstein[1]) pag. 21), že velkokvěté alpské hořce, které jsou uváděny pod souhrnným názvem *Gentiana acaulis*, náležejí vlastně celé řadě blízko sobě příbuzných, ale morfologicky dobře rozeznatelných druhů, které se zastupují v územích spolu hraničících. „Die Abhängigkeit der Artbildung von lokalen Einflüssen ist deutlich zu sehen."

Drahný čas jest tato *Gentiana* pěstěna v zahradách v tak zv. alpských jejich částech a přetvořila se zde v rostlinu, která morfologicky značně se odlišuje od druhů, jež rostou divoce. Umělý výběr sotva při tom spolupůsobil, poněvadž morfologická odchylka pěstitelům proto nebyla známa, že nepůsobí na dekorativní účinek rostliny. Také jest vyloučeno působení výběru přirozeného, poněvadž, jak známo, spontanní druhy alpské lze pěstovati. Nezbývá tedy prý než přijímati, že se rostlina během doby přetvořila vlivem změněných podmínek výživy i klimatu „přímým přizpůsobením" ve formu, v jaké se nám nyní v našich zahradách jeví. Jiný příklad uvádí *Bordage*[2]) (cit. dle Semona, 1912, pag. 64), dle něhož broskvoně z Evropy na Réunion importované dávají ze semene původ rostlinám, které ještě po plných 10 let shazují v zimě své listy zůstávajíce po té asi půldruhého měsíce, v pozdějších letech ještě kratší dobu, lysými. Po 10 letech dostoupily jednotlivé stromy toho stavu, že vůbec neobjeví se u nich úplné opadání listů, nicméně teprve po 20 letech lze prohlásiti je za stromy vždy zelené. Semena z těchto vždy zelených stromů dávají pak původ stromům, které přímo vždy zelenými se jeví. Tato vlastnost projeví se i tenkráte, když jsou jádra vyseta nikoli v horkých nížinách pobřeží, nýbrž ve výši 1000*m* nad mořem, kde ty broskvoně, jež pocházejí od rodičů, kteří nebyli klimatem pozměněni, trvale jeví podzimní opadávání listů. Důkaz o tom, že toto přizpůsobení je dědičným, t. j. že v těchto místech projevuje se i po řadu generací pocházejících z jednoho kmene, bohužel doposud proveden nebyl.

Nejpopulárnější jsou však zprávy, které podává o podobných zjevech v 50tých létech minulého století botanik *Schübeler* (cit. dle *Wille*[3]) pag. 562).

---

[1]) v. Wettstein Richard, Der Neo-Lamarckismus und seine Beziehungen zum Darwinismus. (Vortrag gehalten in der allgemeinen Sitzung der 74. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, 1902.) 1903, Jena, Fischer.

[2]) Semon Richard, Das Problem der Vererbung „erworbener" Eigenschaften. Leipzig, Engelmann, 1912.

[3]) Wille N., Über die Schübeler'schen Anschauungen in betreff der Ver-

V krátkosti dají se shrnouti takto: Přenáší-li se ve Skandinavii obilí ponenáhlu z nížiny do krajů horských, tu navykne změněným podmínkám do té míry, že může prodělati celý svuj vývoj v těch výškách, vyznačujících se nižší i střední temperaturou a to v kratší době. Přenese-li se pak, když bylo několik let ztrávilo v největších výškách nad mořem, v nichž obilí ještě může zráti, zase na své původní stanovisko, uzrává v prvních letech zde dříve než sorty domácí a z domova nevyšlé. Podobně stane se s obilím, jež přeneseno je z jižnějších šířek do severnějších. Zde trvá osvětlení, jemuž je v letních měsících denně vystavováno, déle, proto zkracuje se doba vegetační, obilí dospívá dříve zralosti. Přenesou-li se obilní sorty naopak ze severu na jih, dostaví se týž zjev, jen opáčného směru. Změny tyto ukazují se býti dědičně fixovanými. Tak podařilo se Schübelerovi během několika let zkrátiti vegetační dobu německé jaři o 4 týdny a pokusy se severským obilím v Poppelsdorfu, Hohenheimu a Vratislavi vyzněly týmž způsobem.

Z přečetných pokusů na zvířecím materiálu, jimiž jest dokazováno dědění „vnucených" změn, buďtež zde uvedeny poslední zprávy Kammererovy[1]) o změně barvy u mloků. Jestliže jsou mláďata mloků, jež jsou nepravidelně skvrnitá, pěstěna v terrariích se žlutým, vlhkým podkladem hliněným, tu rozmnožuje se značně žluté barvivo po těle zvířátek; naopak při kultivování na černé prsti zahradní přibude černé pigmentace. Tento vliv vnějších podmínek jeví se pak dle *K.* netoliko na exemplárech, na něž bylo přímo působeno, nýbrž i na jejich potomstvu týmže způsobem, dokonce i tenkráte, jsou-li přímo po zrození pěstěna na substrátě indifferentním nebo i kontrérním. Jestliže jest necháno působiti témuž vlivu na několik generací, lze pozorovati obdobné stupňování zabarvení. O selekci při těchto zjevech se nejedná, proti tomu mluví výsledky Kammererovy provedené s užitím tak zv. negativní selekce t. j. výběru vždy nejtmavějších individuí pro žluté kultury a naopak, jež vypadly vždy stejně. I soudí Kammerer, že jedná se zde o dědění změn tak zv. somatogenních.

Proti všem těmto výkladům byly však proneseny velmi důležité a podstatné námitky. Názory Schübelerovy v té formě, jak byly vylíčeny, jsou vyvráceny (srovn. Wille 1905 a 1913).[2]) Schübeler tvrdil také, že semena severských plodin jsou značnější, z nich pak povstalé rostliny statnější a vzdornější vůči různým vlivům. Značnou důležitostí těchto zpráv vedeni snažili se brzy po publikování jejich četní oekonomové využíti takovéto

---

änderungen der Pflanzen in nördlichen Breiten. (Biologisches Centralblatt, 1905, XXV, pag. 562 seq.)

[1]) Srovnej jmenovitě Kammerer Paul, Vererbung erzwungener Farbveränderungen. IV. Mitteilung: Das Farbkleid des Feuersalamanders in seiner Abhängigkeit von der Umwelt. (Archiv für Entwickelungsmechanik d. Organismen, 1913, 36, pag. 4 seq.)

[2]) Wille N., Über die Veränderungen der Pflanzen in nördlichen Breiten. (Sonderabdruck aus dem Biologischen Centralblatt 1913, XXXIII, pag. 246 seq.)

satby, naděje jejich se však nesplnily. Wille sám pěstoval ječmen pocházející z Thelemarken (2·300′ nad mořem) v Aasu u Christianie, sorta však nevykazovala značných rozdílů oproti domácím. Ostatně ani názory Schübelerovy o kratší době vegetační v severských výškách nejsou docela správny, jelikož dny jsou zde v létě, jak známo, nad obyčej dlouhé, množství světla tedy, jehož se rostlinkám dostává, asi dostatečně velké. Dokonce děje se při žních na severu dosti přísný výběr ranné setby, jelikož jen ty klasy, které jsou úplně zralé, jsou určovány pro setí. Nejtěžší ovšem námitka proti Schübelerovi je, že při jeho pokusech nejednalo se o nic jiného než o vymýcení resp. snížení těch rass, které svými dědičnými vlastnostmi nesouhlasily se změněnými novými podmínkami, v něž byly přeneseny, takže v těchto se udržely a nad oněmi rozmohly ony rassy (linie), jež dle svých gen mohly za těchto nových okolností vegetovati. Rozdíl mezi populacemi a čistými liniemi Schübelerovi nemohl býti znám, vskutku jedna čistá linie, přenesena ze severního Finska do Svalöfu a zde pěstěná (pod značkou 0660) od r. 1893 nezměnila podstatně svých vlastností. Od r. 1899 byly vedeny záznamy o počtu dní vegetačních této sorty u srovnání s domácím „bělákem“ (0301), o rannosti prostřední (*Nilsson-Ehle* 1911,[1]) pag. 20), změny však nepozorováno, jak dokazují následující data:

	Počet dní vegetačních		Rozdíl v periodě veget. vyjádřený ve dnech.
	0660	0301	
1899	99	104	6
1900	101	108	7
1901	91	105	14
1902	119	150	31
1903	106	121	15
1904	94	105	11
1905	96	103	7
1906	96	104	8
1907	114	135	21
1908	106	116	10
1909	109	127	18
1910	92	104	12.

Příklad tento demonstruje jasně, že kdyby klima vyvolávalo změny v karakterech hereditérních, bylo by musilo nivelovati, redukovati difference mezi těmito různými varietami, které byly pěstovány na témže místě a v téže době, za úplně stejných podmínek. Pokus Schübelerův opakuje se ostatně ještě jednou a sice tak, že několik čistých linií ovsů severských, různě ranných, pěstuje se na různých místech Evropy. Po několika vege-

[1]) Nilsson-Ehle, Mendélisme et acclimatation. (IV conférence internationale de génétique, 1911, Paris.)

tačních periodách budou semena od různých pěstitelů — pro Čechy převzal kultury referent — zaslána do Svalöfu, kdež bude pozorováno, zda dědičná jejich rannost se kulturou v cizích terrainech pozměnila.

Nilsson-Ehle sám (l. c. pag. 19) se domnívá, že by bylo pro přítomnost předčasným popírati kategoricky na základě dedukcí theoretických možnost změn hereditních, akklimatace dědičné vlivem přímých ústředí ve smyslu *Lamarckově*. Nynější stav nauky o dědičnosti, jmenovitě zjevy podivuhodné při křížení, přivádějí však jej k závěru, že i při tomto problému můžeme vystačiti poznatky mendelistickými.

Akklimatace, adaptace klimatická, neznačí dle něho nic jiného než přegrupování faktorů mendelistických v kombinace vždy výhodnější, odpovídající nejlépe danému ústředí. Že zde připadá selekci určitá role, nelze popírati. Snadno lze pozorovati, že v jisté varietě pšeničné, význačné určitou variací hereditérní resistence oproti mrazu, individua méně resistentní mizí nebo ubývá jich počtu, kdežto individua resistentnější přetrvají a dominují víc a více. Podobně, jestliže varieta ovsa o určité dědičné variaci rannosti jest přesazena severněji, kde kombinace pozdější zrají špatně anebo vůbec nedozrávají, rozmnoží se kombinace rannější. Následek toho jest, že objeví se změna v průměrném karakteru rannosti u této variety. Nicméně možnosti akklimatace nejsou tím vyčerpány, neboť hybridací mezi individui vyselektovanými, přegrupováním jednotek mohou se tvořiti kombinace ještě výhodnější a akklimatace pokračuje. Úkol, jejž hraje zde selekce, jest tedy ten, že zmenšujíc počet individuí pozdnějších poskytuje větší možnost hybridisace mezi individui ranními, čímž se zvětšují značně možnosti realisace možných kombinací ve směru větší rannosti. Křížení takovéto v pšeničných polích, jak zkušenosti ukazují, jest velmi snadno možno, formulované pak tyto výklady, založené na přečetných experimentech *Nilsson-Ehleho* o dědičnosti různých forem obilných a jich kříženců s ohledem ku resistentnosti proti mrazu, chorobám atd. ve mnohém souhlasí s učením *Darwinovým* doplňujíce a vysvětlujíce některé jeho these.

Vývody Kammererovy na pravou míru uvádí Jollos.[1]) Kammerer nalezl, že při křížení typické skvrnité formy a formy přirozené se 2ma žlutými pruhy, tedy *typica*×*taeniata*, v F_1 povstane *typica* (*typica* vždy dominuje nad *taeniata*), v F_2 pak že objeví se typické štěpení dle 3:1. Také dvakrát pruhovaná umělá forma × prostředně pruhovaná umělá, jakož *taeniata* × prostř. pruhov. umělá v F_1 daly *typica*. Naproti tomu *taeniata* × dvakráte pruh. umělá v F_1 dala vždy *taeniata*. Při křížení *typica* × prostř. pruh. umělá, jakož i *typica* × dvakr. pruh. umělá v F_1 objevily se formy intermedierní (v řadách skvrnité) a v F_2 místo štěpení od jednoho ke druhému mláděti pokračující porušování v symmetrii uspořádání skvrn až posléze se objevila čistá *typica*. Při transplantaci ovarií *typica* nebo *taeniata*

[1]) Jollos V., referát o Paul Kammerer, Vererbung erzwungener Farbenveränderungen IV., v Zeitschr. für induktive Abstammungslehre XII, Heft 1., 1914, 567.)

jako mateřská individua nikterak nepůsobila na transplantované cizí ovarium a při křížení objevily se výsledky shodné s dřívějšími. Uměle pruhovaná samička s vaječníkem *typica* dala však po skřížení se samečkem pruhované umělé rassy vznik toliko pruhovaným individuím (*typica* samotné dávaly intermediérní formy), pruhované umělé samičky s ovariemi *typica* po skřížení s *typica* porodily valnou většinu *typica*. I soudí *Jollos*: Jelikož po skřížení *typica* s umělými formami ponenáhlu nastává zvrat k formě kmenové, nejedná se zde o změnu dědičných vloh, genotypu, nýbrž toliko o modifikace, změny tedy fenotypické. S tím souhlasí, jestliže povstává v F_1 *typica* (následkem dominance nad ev. *taeniata*) po skřížení dvakrát × prostř. pruh. umělá rassa resp. *taeniata* × prostř. pruh. umělá rassa, jelikož obě umělé rassy genotypicky rovnají se *typice*. Zde přicházejí k platnosti pouze „dozvuky" experimentalních vlivů na další generace. Tyto „dozvuky" jmenovitě také při transplantaci cizích ovarií se jeví a zjevy, které nadcházejí, je-li „Tragamme" umělá nějaká forma, jen tímto způsobem dají se vysvětliti. Přiznává ovšem *Jollos*, že „dozvuky" tak dlouhého trvání a tak značné intensity, které i na cizí, transplantovaná ovaria mohou působiti, u vyšších organismů ještě pozorovány nebyly.

Jollos vykládá také většinu případů t. zv. mutací mikroorganismů, jak byly v předešlém vylíčeny, jinak než autoři, kteří tyto zjevy vyvolali. Přiznává sice (1914,[1]) pag. 29), že jest dokázáno několik málo případů pravých mutací t. j. náhlých změn, které naprosto stálými se jeví (sem náleží především případ *Hansenových* asporogenních rass u kvasinek, některé nálezy *Wolfovy* a *Schiemannové*). Z vlastní praxe uvádí (pag. 17) pravou mutaci vyvolanou u *Paramaecia*. V jedné čisté linii, která byla delší čas pěstěna při 31° C, objevila se individua, která se lišila velikostí od výchozí formy. Při dalším pěstění se ukázalo, že tvoří novou rassu, která vedle svých malých rozměrů vyznačovala se též vyšším temperaturním maximem. Tyto dvě vlastnosti podržovala konstantně i za nejrůznějších podmínek životních a přenášela je na potomstvo, jak při rozmnožování vegetativním tak při konjugaci. (Bylo by bývalo důležito stanoviti, jak se chovaly tyto nabyté vlastnosti při křížení s individui, jež jich neměla. Pozn. referentova.). Takže se v tomto případě jednalo vskutku o změnu v genách. A jelikož při jejím vzniku vyloučena byla kopulace, vznikla čistou mutací, vyvolanou ovšem vyšší temperaturou.

Naproti tomu u všech, mimo případy zmíněné, „stabilních mutací" pozorujeme dle *Jollose* zvrat k formě normální, třebaže nové znaky udržovaly se velmi dlouho, tak na př. u *Paramaecií*, jež byla učiněna na několik měsíců vzdornými oproti kyselině arsenové, u *Trypanosom* i několik roků. Neboť počínaje osmým měsícem počala vzdornost v prvém případě ponenáhlu mizeti, v případě druhém zmizela najednou, jestliže parasiti prošli

[1]) Jollos V., Variabilität und Vererbung bei Mikroorganismen. (Zeitschrift für induktive Abstammungslehre, 1914, pag. 14—36.)

zažívacím traktem přenášejícího je zvířete. I navrhuje *J.* nazývati takto se chovající nové formy názvem „trvalé modifikace", terminem, který je vskutku velmi případným a jehož jen z toho důvodu referent nebude užívati na označení obdobných zjevů, že název mutace, mutabilita je pohodlnějším.

Na druhé straně zapomíná však *Jollos*, že způsob, jakým byly vyvolány ony pravé mutace — neboť že nevznikly spontanně, o tom nemůže býti pochyby — principielně ničím se neliší od methody, jíž jsou získávány ony „trvalé modifikace". Dle mínění referentova jedná se zde jen o kvantitativně, nikoli kvalitativně rozdílné zjevy. A tím cennějšími zdají se mu ovšem tyto trvalé modifikace, neboť ukazují jen cesty, kterými jest se bráti, aby vskutku jednou dosaženo bylo nepopíratelné dědičnosti získaných vlastností.

* * *

Mají naše pokusy také nějaký význam pro důležité otázky tyto?

Bylo již několikráte poznamenáno, že také v kulturách referentových dostavovalo se u *Chlorell* tvoření aureových sektorů a sice na mediích kulturních, jež byla složení zcela normálního. Při přeočkování udržely se u *Chl. variegata Kr.* nové znaky tyto po delší čas, teprve po několika týdnech počaly se na nich objevovati sekundární kolonie. Možno tedy vystupování sektorů vším právem označiti za zjev mutativní dle názorů *Beijerinckových* nebo za trvalé modifikace dle *Jollosa*. Z *Chlorelly „lipské"* získaná tímto způsobem takováto žlutá modifikace zvláště byla stálá, teprve po několika měsících — přes to že byla během té doby pěstěna na různých substrátech — došlo k utvoření několika málo sekundárních čistě zelených kolonií nepatrné velikosti na normálním sladinkovém agaru. Zvláštní byl způsob, jakým objevovaly se aureové sektory u *variegaty Beijerinckovy, Krügerovy* i u *lipské Chlorelly*. V tom místě, kde se počal tvořiti sektor, vrstva kulturového povlaku zřejmě byla nižší oproti okolí temně zelenému. Někdy přecházela vrstva zelená schodovitě, ač ostrým přechodem, v sektorovou. Bylo patrno, že kultura se skládá z několika vrstev, z nichž jedna z prvních byla ona, jež po části sežloutla do „aureova", přes tuto pak že táhnou se vrstvy další, které po nějaké době sezelenají. Podobné zjevy byly často pozorovány i v jiných kulturách, v těchto však sektory nemusily nabývati barvy „aureové", nýbrž zůstávaly bílými, nazelenalými atd. Je vůbec pravděpodobno, že sezelenání i výživa svrchnějších vrstev dála se na útraty spodnějších. Poněvadž pak tyto svrchní vrstvy jinak podložené, po čase nabyly jiné barvy než nejspodnější, jež přímo na substrát se kladly, vyplývá z toho nepřímo, že „aureová" barva byla vybavována složením substrátu. Vskutku nalezeny i přímé doklady pro tento výklad a sice v tom, že určité uhlohydráty zvláště se ukázaly způsobilými vyvolati tvoření sektorů aureových. Někdy objevovaly se již

i na koncentrovanější sladince, i byla na snadě domněnka, že příčinou toho byla přítomnost několika uhlohydrátů v tomto mediu. I byla pěstována *„lipská zelená"* na minerálním roztoku *Artariho*, k němuž přidáno jak glukosy tak maltosy. Na posledním disaccharidu (srovnej protokoll) byla by rostla barvou smaragdově zelenou, na čisté glukose byla by nabyla tonu bělavého. Na směsi vskutku objevila se po čase kombinace bílá se žlutozelenou a posléze na celku šedobílém dostavilo se tvoření sekundárních kolonií barvy sarcinově žluté. Zvláště pak to byl škrob (rozpustný), jenž vybavoval panašování kultur této *Chlorelly*. Na sladince s přidáním 2% škrobu objevovaly se žlutočervené sektory, na *Artariho* mediu se škrobem části bílé ve smaragdově zelených povlacích. Pod světlem monochromatickým na sladince zřed. a saccharose objevovaly se nepravidelnosti v zabarvení kultur: po temně zeleném povlaku základním táhly se skvrny bílé (zvon bichromátový); ve světle modrém kraj kultur jest bíle zabarven, patrně táhla se slabá vrstvička bílé barvy přes celý zelený povlak základní propůjčujíc mu zde toliko bělavý nádech, kde pak přecházela tato svrchní vrstvička přímo na substrát agarový a usazovala se na něm přímo bez podkladu zeleného, tam přicházela její čistě bílá barva k platnosti. Jakési periklinální složení kultur obdobné periklinálním „chimérám" vyšších rostlin v tomto případě se tedy projevovalo; tvoření sektorů upomínalo zase na sektorialní „chiméry". Nedivno, že *Beijerinck* srovnával celé kultury takto sektorově utvářené se sektorialními chimérami panašování vyzdvihuje ovšem v popředí mutativnost obou zjevů vycházející z čistě vnitřních příčin. Pro naše stanovisko vyplývalo by z pozorování *Chlorell* pro etiologii panašování sektorialního ba i — jak případ s modrým zvonem dosvědčuje — periklinálního, že mutování v určitých pletivech rostlin vyšších má příčinu svou v jistých změnách výměny látek. Uvidíme, že fakta tato nejsou pouhými analogy, nýbrž že mají nemalou důležitost pro vysledování etiologie fanerogam panašovaných.

Zvláště krásně objevovalo se „aureové" zabarvení v kulturách trypsinových. Krásná oranžová žluť byla přímo význačna pro kultury trypsinem „otrávené" jmenovitě u *Chl. variegata B.* Působivým byl trypsin nesterilisovaný étherem, zvláště pak průba, která byla delší čas vystavena působnosti par étherových. Na tomto posledním mediu objevovala se dokonce časem v rourkách kol středního, jako gummigutově žlutého povlaku krásná, průsvitně bílá obruba, jež v předcházejících sděleních zvána „hyalina" Že působení trypsinu bylo immeidátní, o tom nemůže býti dle toho, co již bylo řečeno, sporu. Zároveň však je jasno, že vliv jeho je možno toliko jen se stanoviska fysiologie výživy vykládati. Neboť enzymy jsou κατ'ἐξοχὴν látky, které zasahují přímým způsobem do koloběhu výměny látek u organismů rostlinných i živočišných. Možno tedy zkrátka pointovati, že vystoupení této *aurey* v kulturách *Chlorelly* vyplývalo z určitého modifikování enzymatických pochodů u této řasy. Zda-li také ony „aurey", jež dostavovaly se po působení pouhých uhlohydrátů, byly toliko nepřímo

těmito látkami vybavovány, při čemž by enzymům připadaly určitější nějaké role, z pokusů ovšem nevyplývá.

Bylo již řečeno, že po přenesení řas trypsinem otrávených na substrát složení normálního nedostavilo se tvoření chlorofyllu bývalé, nýbrž řasy neměly schopnosti vyráběti assimilační zeleň. Čistý ton „aureový" se sice v těchto kulturách neudržel, ale na sladince koncentrovanější (2:1 H_2O) vystupovala distinktní gummigutová žluť aspoň s nádechem občas do „aureova", na sladince zředěnější ton žlutobílý. Ani nejintensivnějším prostředkem, jenž v pokusech referentových působil sezelenání, nebylo možno přiměti kultury takovéto k tomu, aby dávaly znatelnějšího sezelenání. Tvoření chlorofyllu bylo tedy u těchto *Chlorell*, jež byly prošly pasáží trypsinovou, z daleko největší části potlačeno. Defekt tento projevoval se pak plných 6 měsíců, po které referent mohl svoje kultury sledovati. Při tom dlužno uvážiti, že kultury nebyly častěji přeočkovávány, ač by to bylo podporovalo ještě více udržování se žluté barvy, nýbrž že jim byla ponechávána možnost nerušeného sezelenávání. Dále že doba, po kterou byly základní kultury vystaveny vlivu trypsinu, nebyla delší než jednoho měsíce. A přece tak dlouhý čas trvala ztráta schopnosti vytvořovati barvivo chlorofyllové, defekt týkající se jedné z nejzákladnějších složek fysiologie naší řasy. Ztráta pigmentace u *prodigiosa* vlivem jedů může býti zjevem bezvýznamným, také ztráta schopnosti vytvořovati na př. větší množství slizu u bakteria jiného. Při ztrátě chlorofyllu jedná se o to, že řase vnucena byla vlastnost, která by jí znemožnila vegetování na substrátu prostém uhlohydrátů, vlastnost tedy nevhodná, neúčelná. I tak eminentně důležité vlastnosti ztráta udržovala se po dlouhou dobu ať jako „dozvuk" působení enzymu, ať jako vlastnost nově získaná. Jistě je zvláštní, že ani po několika měsících nedostavil se zvrat, „atavismus".

Příliš mnoho dokladů pro dědičnost získaných vlastností dosud nemáme. Ale i ten material, který již byl nashromážděn, je velmi důležit a v žádném ohledu neopravňuje k naprostému bagatelisování ideí, jež jsou k němu připínány. Tvrzení, že „etwas principiell neues ist für die Vererbungslehre kaum hier zu erwarten" (Johannsen[1]) pag. 655) je jistě poněkud ukvapené a referent připojuje se ke kritice Fittingově (Die Naturwissenschaften 1914, pg. 190), dle níž pojmy „fenotypus" a „genotypus" nejsou od sebe tak ostře odděleny, jak Johannsen myslí — třebaže nebyl naprosto nadšen dosavadními výsledky tohoto směru mikrobiologie. Zdá se mu však, že z těchto elementů počíná se ponenáhlu skládati princip, o němž není vyloučeno, že zaujme jednou rovnocenné místo s principem mendelisticko-kombinačním v theoriích vykládajících vznik druhů organických a že jest potřebí rozšířiti pokusy podobné i na vyšší rostliny, methodami čistých kultur pěstěné.

---

[1]) Johannsen W., Elemente der exakten Erblichkeitslehre. II. Aufl. 1913.

i. značí v

Očkováno

	tlo).		
		17.2	15.3
1. Sl. zř.	vě ná.	Intensivně tmavozelená.	Intensivně tmavozelená.
2. Sl. zř. glukosa.	ně zele-	Silně promodrale zelená.	Prostředně silně modrozelená.
3. Sl. zř. gluk.	e ně.	Voskově bílá.	Voskově bílá.
4. Sl. zř. gluk.	ílá, tá do	Voskově bílá.	
5. Sl. zř. sach.	lená.	Intensivně tmavě trávově zelená.	Intensivně tmavě trávově zelená.
6. Sl. zř. maltosa	vě ná.	Tmavě zelená.	Intensivně tmavozelená.

11. Miner. rozt.. *Artariho* + 2% maltosy; očk. 14.5.		
12. Min. *Art.* + ½% gluk. + 2% maltosy; očk. 28.5.	5.6 2.—3. Žlutobílá, zelenavě nabě	5 ě šedobílá; sarcinově olonie.
13. Min. *Art.* + ½% škrob rozp. Očk. 14.5.		

LL II. V.

serie.

Tk sv.
6.3
Voskově lená
vov
Voskově l
ra
Intensivně ě z vově zelená široký žl pruh poner do zelena cházejíc
Intensivně vově zele
(Nejlepší v Trávově i s zelená
Intensivně vově zelená spodní kraj žlutý.
rů n
Ž5.lutoze
ě l
24
Světle žlutoz dechem d (Zelenější
Světle vosk s nádechem

1. značí vzrůst velmi dobrý, 2 a 3 další stupnice.

Očkováno 2. ledna 1910.

PROTOKOLL I.

Chlorella, 1. serie.

	Tk (= teplá komora) tma					Tk sv (světlo).				
	14.1 (Barva)	25.1	2.2	17.2	15.3	14.1	25.1	2.2	17.2	15.3
1. Sl. zř. (1 : 4)	1. Žlutozelená, dosti slabá.	Smutně trávově-zelená.	Trávově smutně zelená.	Sytě trávově žlutozelená.	Smutně trávově zelená.	1 Sytě trávo-zelená.	Sytě trávo-zelená.	Sytě tmavě trávozelená.	Intensivně tmavozelená.	Intensivně tmavozelená.
2. Sl. zř. + 1% glukosa.	2. Žlutá a bílá.	Žlutobílá, s velmi nepatrným, promodralým sezelenáním.	Promodrale slabě zelenavá.	Slabě šedomodravě prosvítá.	Slabě šedomodr. zelená.	1. Voskově žlutobílá.	Ve středu promodrale zelená, jinak voskově bílá.	Bílá, silně modravě prozelenalá.	Silně promodrale zelená.	Prostředně silně modrozelená.
3. Sl. zř. + 2% gluk.	2. Žlutá, s nádechem do zelena.	Voskově bílá.	Voskově bílá.		Voskově žlutobílá.	1. Voskově žlutobílá.	Voskově žlutobílá, žádné sezelenání.	Bílá, beze stopy zeleně.	Voskově bílá.	Voskově bílá.
4. Sl. zř. + 8% gluk.	2. Žlutá, s nádechem do zelena.	Voskově žlutobílá, nahoře nažloutlá.	Bílá voskově.	Voskově bílá, úplně bez zeleni.	Voskově žlutobílá.	3. Voskově žlutobílá, s nádechem do žlutozelena.	Voskově žlutobílá.	Voskově bílá, nahoře žlutá s nádechem do zelena.	Voskově bílá.	
5. Sl. zř. + 5% sach.	2. Se slabým a zřejmým nádechem do zelena.	Silně promodrale zelená.	Silně promodrale zelenavá.	Slabě, ale velmi zřetelně žlutomodravě zelená.	Bledě namodrale žlutozelená.	1.—2. Vosková s nádechem do zelena i slabě trávově zelená (s počátku bledá).	Trávově zelená.	Sytě trávozelená.	Intensivně tmavě trávově zelená.	Intensivně tmavě trávově zelená.
6. Sl. zř. + 2% maltosa.	1. Žlutá, do slaboučké zeleni přecházející.	Trávově smutně zelená.	Smutně trávově zelená.	Sytě trávově zelená.	Trávově zelená.	1. Slabounce žřejmě trávově zeleně žlutobílá (žluť převládá).		Sytě tmavě trávozelená.	Tmavě zelená.	Intensivně tmavozelená.
7. Sl. zř. + 5% maltosa.	1.—3. Zřejmě slaboučce žlutozel.	Trávově smutně zelená.		Sytě trávově zelená.		1. Slabounce zřejmě trávově žlutobílá (žluť převládá).	Světle trávově zelená.		Tmavě zelená.	Intensivně tmavozelená.
8. Sl. zř. + 2% glukosa + 3% $MgSO_4$.	3. Žlutobílá.	Voskově bílá, nahoře trochu nažloutlá.	Voskově bílá.	Voskově bílá, úplně bez zeleni.	Voskově žlutobílá až bílá.	1.—2. Žlutozelená.	Světle trávově zelená.	Většinou slabě, ale zřetelně prozelenalá.	Slabě zelená, promodrale i žlutavě.	Slabě modrozelená.
9. *Artari* + 2% glukosa.	3. Krásná, úplně bílá.	Bílá.	Úplně bílá.	Bílá, jakoby pletově.	Žlutě eticlovaná.	3. Slabounce nazelenalá ze žlutoběla (běl převládá).	4. Bílá, velmi slabounce sezelenalá.	Bledá, sotva zelená.	Žlutobílá, víc bílá, než nažloutlá.	Bledě žlutá, ani trochu nesezelenalá.
10. *Artari* + 4% gluk. + 0·2% peptonu.	4. Slabě žlutozelená.	Bílá, nahoře trochu nažloutle zelená.	Úplně bílá.	Bílá.	Žlutě etiolovaná.	3. Silněji nazelenalá ze žlutoběla.	4. Bílá, velmi slabounce sezelenalá (vzdor peptonu).	Bledá, sotva zelená.	Žlutobílá, víc bílá, než nažloutlá	Bledě žlutá, ani trochu nesezelenalá.
11. Sl. koncentrovaná.	5. Sytě zelená.	Temně zelená.				5. Sytě tmavě zelená.		Nahoře tmavozelená, dole velké massy žlutozelené.	Tmavě smaragdově zelená.	Tmavě zelená.
12. Sl. konc. + 2% gluk.			Tmavě i žlutě zelená.	Slabě žlutobílá.		4. Sytě tmavě zelená.		Nahoře tmavozelená, dole velké massy žlutozelené.	Slabě žlutozelená.	Šedě žlutozelená s nádechem do modra.
13. Sl. konc. + 1·5 % glycer.		Žlutobílá.	Voskově žlutá, velmi slabě nazelenalá.	Slabě žlutobílá.	Voskově žlutobílá až bílá.	1. Žlutobílá.	2. Žlutobílá, trochu nazelenalá.	Voskově sytě žlutá, bez zeleni.	Voskově intensivně žlutá.	Žlutá.
14. Sl. konc. + 4% gluk.		Žlutobílá.	Voskově žlutá.		Voskově žlutobílá až bílá.	6. Žlutobílá se zřejmým nádechem do žlutozelena.	4. Žlutobílá.	Voskově žlutá, bez zeleni.		
15. Sl. konc. + 8% gluk.										

PROTOKOLL II.

Chlorella, 2. serie.

Očk. 18. února.

	Tk tma.			Tk sv.			Pokoj sv.		
	27.2	6.3	15.3	27.2	6.3	15.3	27.2	6.3	15.3
1. Sl. zř. (1 : 4) + laevulosa 3%.	3.—4. Voskově žlutobílá.	Voskově bílá.	Voskově bílá.	2.—4. Voskově žlutobílá.	Voskově bílá.	Téměř voskově bílá.	3.—4. Ve středu bílá, při krajích nazelenale žlutá.	3.—4. Žlutá se slaboučkým nádechem do zelena. (Na dextrose: voskově žlutá.)	Voskově žlutá.
2. Sl. zř. + invertní cukr 2%.	3. Voskově žlutobílá.	Voskově bílá.	Voskově bílá.	3.—4. Voskově žlutá, bez nádechu do zelena.	Voskově bílá.	Téměř voskově bílá.	4. Žlutá, s nádechem do zelena.	3. Žlutá se slaboučkým nádechem do zelena. (Na dextrose: Voskově žlutá.)	Voskově žlutá, při kraji slabounce nazelenalá.
3. Sl. zř. + laktosa 4%	3. Voskově žlutobílá.	Velmi slabě žlutozelená.	Smutně trávově žlutozelená, s nádechem do modra.	2. Distinktně nazelenale žlutá.	Intensivně trávově zelená, dole široký žlutý pruh ponenáhlu do zelena přecházející.	Intensivně trávově sytě zelená.	3. Distinktně nazelenale žlutá.	3. Silně žlutozelená, kolkolem žlutý lem.	Sytě trávově zelená.
4. Sl. zř. + dextrin 4 %.	2. 3. Voskově žlutobílá.	Žluto i smutně zelená.	Smutně trávově žlutozelená, s nádechem do modra.	3. Voskově žlutá, s nádechem do zelena.	Intensivně trávově zelená.	Intensivně trávově sytě zelená.	3. Nazelenale žlutá.	3. Žlutozelená, v prostřed pruh zelený.	Sytě trávově zelená.
5. Sl. zř. + inulin 3%.	2. Slabě nazelenale žlutobílá.	Slabě žlutotrávově zelená.	Smutně trávově žlutozelená, s nádechem do modra.	1. Distinktně nazelenale . žlutá.	(Nejlepší vzrůst). Trávově i světleji zelená.	Intensivně trávově sytě zelená.	1.—2. Zřejmě žlutozelená, skoro již trávově.	1. Intensivně trávově zelená, dole žlutý lem. (Maltosa: trávově zelená).	Sytě trávově zelená.
6. Sl. zř. + mannit 5%.	Nazelenale žlutobílá.	Silněji žlutotrávově zelená.	Smutně trávově žlutozelená, s nádechem do modra.	6.	Intensivně trávově zelená, až na spodní kraj, jenž žlutý.	Intensivně trávově sytě zelená.			
7. Sl. zř. + KNO_3 3%.	3.—4. Distinktně žlutozelená.	3.—4. Krásně gummigutově žlutozelená.	Krásně trávově žlutozelená, krupičkovitý vzrůst.	5. Zřejmě žlutozelená.	Žlutozelená.	Trávově nažloutle zelená, krupičkovitá.	6. Trávově žlutozelená.	5. Žlutozelená.	Sytě trávově zelená.

	Tk tma.		Tk světlo.			
	24.5	5.6	25.6	24.5	5.6	
8. Sl. zř. + ½% škrob; očk. 14.5.		Smutně světle trávově zelená (zelenější než u 9), některé rourky se sektory žlutočervenými.	Světle špinavě trávově zelená.	Světle žlutozelená, s nádechem do zelena. (Zelenější než u 9).	Tmavě trávově zelená (tmavší než u 9).	
9. Sl. zř. + 10% saccharosy; očk. 14.5.		Velmi světle zelená.	Světle špinavě trávově zelená.	Světle voskově žlutá, s nádechem do zelena.	Sytě trávově zelená, ton žlutozelený.	
10. Sl. zř. + 0·5% glykogenu . . očk. 18.5.		Žlutá, se slabým nádechem do zelena.	Smutně trávově zelená, intensivněji než u 9.		(Dobrý vzrůst.) Sírově žlutá.	12.6 Trávově zelená.
11. Miner. rozt., *Artarico* + 2% maltosy; očk. 14.5.		3. Distinktně trávově zelená, až do smaragdova. (Min. + gluk. : žlutá).	2.—3. Trávozelená.		5. Tmavě i intensivně zelená, až do smaragdova.	15.6 4. Smaragdově zelená.
12. Min. *Art.* + ½% gluk. + 2% maltosy; očk. 28.5.	5.6 2.—3. Žlutobílá, slabě zelenavě nabělhlá.	15.6 Trávozelená.	12.8 Čokoládově šedá.		2.—3. Jasně slabě zelená.	15.6 3.—4. Střed kultur bílý, též místy bílé výběžky, ostatek žlutozelená.	28.5 Skoro kávově šedobílá; sekundární, sarcinově žluté kolonie.
13. Min. *Art.* + ½% škrob rozp. Očk. 14.5.		5.6 3. Světle, ale distinktně žlutozelená.	3. Světle trávozelená.		4. Intensivně tmavozelená, do smaragdova.	4. Smaragdově zelená, dvě rourky z části bílé (panaš.)

		Pokoj sv.		
	15.3	27.2	6.3	15.3
bílá.	Téměř voskově bílá.	3.—4. Ve středu bílá, při krajích nazelenale žlutá.	3.—4. Žlutá se slaboučkým nádechem do zelena. (Na dextrose: voskově žlutá.)	Voskově žlutá.
bílá.	Téměř voskově bílá.	4. Žlutá, s nádechem do zelena.	3. Žlutá se slaboučkým nádechem do zelena. (Na dextrose: Voskově žlutá.)	Voskově žlutá, při kraji slabounce nazelenalá.
trá-, dole utý áhlu pře-í.	Intensivně trávově sytě zelená.	3. Distinktně nazelenale žlutá.	3. Silně žlutozelená, kolkolem žlutý lem.	Sytě trávově zelená.
trá-ená.	Intensivně trávově sytě zelená.	3. Nazelenale žlutá.	3. Žlutozelená, v prostřed pruh zelený.	Sytě trávově zelená.
růst). větleji .	Intensivně trávově sytě zelená.	1.—2. Zřejmě žlutozelená, skoro již trávově.	1. Intensivně trávově zelená, dole žlutý lem. (Maltosa: trávově zelená).	Sytě trávově zelená.
trá-, až na , jenž	Intensivně trávově sytě zelená.			
lená.	Trávově nažloutle zelená, krupičkovitá.	6. Trávově žlutozelená.	5. Žlutozelená.	Sytě trávově zelená.

Tk světlo.

.5	5.6		
elená, s ná-zelena. než u 9).	Tmavě trávově zelená (tmavší než u 9).		
ově žlutá, do zelena.	Sytě trávově zelená, ton žlutozelený.		
	(Dobrý vzrůst.) Sírově žlutá.	12.6 Trávově zelená.	

*Vypra*e.

	3. *variegata* Kr.	4. *variegata* B.
	Žlutá jako etiolované listy, jen s nádechem do zelena, hoření jedna třetina slabě sezelenalá.	Do tří čtvrtin trávově zelená, dolení jedna čtvrtina žlutá, nazelenalá.
2. Mi	Světle voskově žlutá.	Žlutá voskově, žlutší trochu než 3)
	Bílá.	Bílá.
3. Mi		

s e v.

B.: světle žlutozelená. 3. *Variegata* Kr.: elená. 5. *Lipská* žlutá: žlutobílá.

a B.	Lipská zelená.	Lipská žlutá.

Očk

cus majus.

Světlo. 27.6
Nažloutle zelená
3. Tmavě trávov zelená.
1. Tmavě smara dově, až černě z lená.

Tma 15.6
Dosti pěkný vzrů Slabounce zelen žlutá.
Gummigutově žlutá, nazelenal

Očk. 14. května	Žlutý 5.
1. Sl. zř. 1 : 8	Krásný vzrůst. Tmav *Fontin*
2. Sl. zř. 1 : 8 + 2% glukosa	Krásný vzrůst. Svět
3. Min. Artari + 1% glukosy + 0·3% leucin.	Detto. Ještě světlej vločky *Mesocarpu*

vony (pokoj).

PROTOKOLL III.

Vypraný agar; očk. 25. května; temp. 27·4 C°.

Chlorella, 3. serie.

Tk. tma.

	5·6	22·6	12·8
1. Min. *Art.* + 2% glukosy puriss.	Bílá, našedle kávově; beze stopy po zeleni.	Slabě šedě čokoládově bílá, úplně bez zeleně.	Čokoládově šedá.
2. Min. *Art.* + 2·5% malt.	Našedle bílá, počátky sezelenání. (Vzrůst horší než u 1.)	Nazelenalá, až distinktně trávozelená.	Trávově zelená.
3. Min. *Art.* + 0·5% glykogen	Distinktní slabá žlutozeleň. (vzrůst jako u 1).	Distinktně žlutozelená.	Jasně žlutozelená.

Pokoj tma.

Očkov. 28. května	27·6	8·8
1 Min. *Art.* + 2% glu-glukosy	Čokoládově šedá.	Čokoládově šedá.
2. Min. *Art.* + 0·5% glykogen	Světle zelená, vzrůst pěkný.	Krásný vzrůst, světle zelená barva, místy až k periferii povlaku sáhající.

Chlorella, 4. serie.

Barevné zvony. (Pokoj.)

Očk. 18. dubna	Žlutý zvon. 5·6	Modrý zvon. 5·6
1. Slzř. 1 : 4	Krásný vzrůst, temně trávově zelený.	Krásný vzrůst temně trávově zelený.
2. Slzř. + 2% glukosy	Voskově bílá, vzrůst slabý.	Frappantní rozdíl: Voskově žlutá, uprostřed bílá, vzrůst penízovitý, pěkný, ač slabší než u 1.
3. Slzř. + 2% sacharosy (očk. 14. května).	8·8 Temně zelená, po ploše povlaku několik bílých skvrn nebo uprostřed bílý pruh.	8·8 Kraj kultury bílý, ostatek modravě-bělavě zelený; patrně po původní kultuře povlak bílý.

Očk. 1. dubna, protokoli 18. dubna.

Chlorella, 5. serie.

	1. *Chlorella z* Lipska.	2. *protothecoides* Kr.	3. *variegata* Kr.	4. *variegata* B.
1. Slad. štěp.	Hořejší dvě třetiny trávově zelené, dole nažloutlá.	Světle trávově zelená.	Žlutá jako etiolované listy, jen s nádechem do zelena, hoření jedna třetina slabě sezelenalá.	Do tří čtvrtin trávově zelená, dolení jedna čtvrtina žlutá, nazelenalá.
2. Slad. štěp. + 4% dextr.	18·4 Voskově žlutá, při, kraji drobet nazelenalá.	Voskově žlutá.	Světle voskově žlutá.	Žlutá voskově, žlutší trochu než 3)
	9·12 Bílá.	Bílá.	Bílá.	Bílá.

Chlorella, 6. serie. Výsev.

Od 17. do 23. prosince na Sl. štěp.

1. *Protothecoides*: vesele, jasně trávově zelená. 2. *Variegata* B.: světle žlutozelená. 3. *Variegata* Kr.: světle žlutozelená. 4. *Lipská* zelená: trávově smutně zelená. 5. *Lipská* žlutá: žlutobílá.

Desky; očk. 23. prosince, protokoll 2. ledna.

	Protothecoides	*Variegata* Kr.	*Variegata* B.	Lipská zelená.	Lipská žlutá.
1. Slad. štěp.	Kolonie světle trávově zelené.	Kolonie žlutobílé.	Smutně slabě trávově zelené.	Žlutobílé, s nazelenalým okrajem.	Žlutobílé.
2. Slad. štěp. + 4% dextr.	Kolonie žlutobílé.		Žlutobílé.		Žlutobílé.

Chlorella, 7. serie; jedna kolonie rozrostlá na šikmém agaru.

Očk. 2. ledna, protok. 28. ledna.

	Protothecoides.	*Variegata* Kr.	*Variegata* B.	*Lipská* zelená.
1. Slad. štěp.	Trávově dosti tmavě zelená. (15. února : Tmavě trávově zelená).	*Sektor smaragdově zelený*: Světle trávově zelená, počátky sektorů.	Žlutozelená. (15. února : silně sezelenalá.)	Žlutá, s nádechem do voskova.
		Sektor žlutý: žlutá, bez nádechu do zelena. (15. února aureově žlutá, v jedné rource zelené sek. kolonie).		
2. Sl. štěp. + 8% dextr.	Žlutá, se slabě kalně zeleným povlakem. (15. února: žlutobílá).		Žlutá, s nádechem do voskova (15. února : žlutobílá).	

3. Slad. štěp. Očk. 9. srpna, prot. 9. prosince. Lipská zelená
α) zelené kolonie: Zelená barva, pomalý vzrůst.
β) žluté kolonie: Žlutá barva, intensivní vzrůst.

PROTOKOLL IV.

Stichococcus majus.

	Pokoj						Tk		
Očk. 28. května	5.6	Tma 27.6	12.8	5.6	Světlo. 27.6	12.8	Očk. 18 února	Tma. 15.3	Světlo 25.3
1. Sl. zř. (1 : 4) + 2% glukosy.	2. Sytě zelená, ale světlejší než na světle.	Celkem světle žlutozelená.	Velmi slabě zelená, téměř žlutá.	Zelená.	Nažloutle zelená.	Žlutozelená.	1. Sl. zř.	Tmavě zelená, se žlutou obrubou po obvodu.	3. Intensivně tmavozelená.
2. Sl. zř. (1 : 4) + 4 (resp.) 8% glukosy.	Sytě zelená.	2. Tmavě trávově zelená.	Velmi slabě zelená, téměř žlutá.	Tmavěji zelená.	3. Tmavě trávově zelená.	Žlutozelená.	2. Sl. zř. + 2% maltosy.	2.—3. Tmavě zelená se žlutou obrubou po obvodu.	3. Intensivně tmavozelená.
3. Sl. zř. 2 : 3	Tmavě zelaná.	4. Temně zelená.	Temně zelená.	Tmavě zelená.	1. Tmavě smaragdově, až černě zelená.	Temně, skoro černě zelená.	3. Sl. zř. + 2% dextrosy.	2.—3. Žlutozelená.	Intensivně trávově zelená.
4. Sl. zř. 2 : 3 + 5% glukosy.		4. Temně zelená,	Žlutozelená, temná zeleň prosvítá.						

	Pokoj (21·5° C)			Tk				
Očk. 14 května	Tma 5.6	15.6	Očk. 14. května; 5.6	Tma 15.6	12.8	5.6	Světlo 15.6	12.8
5. Min. *Artari* + 1% glukosa + 0·5% KNO_3	Krásný vzrůst. Smutně intensivně trávově zelená.	Krásně rozrostlé kultury. Smutně temně trávově zelená.	2.—3. Žlutá, jen slabě žlutozeleně naběhlá.	Dosti pěkný vzrůst. Slabounce zelená, žlutá.	Téměř bílá.	4. Skoro úplně bílá, jen slabounký nádech do šedozelena.	Úplně bílá.	Úplně bílá.
6. Min. *Artari* + 0·3% lencin.			3.—4. Jasně žlutozelená.	Gummigutově žlutá, nazelenalá.	Špinavě zelená.	4. Distinktní žlutozeleň.	Bochánkovité massy cibulově žluté.	Úplně bílá.

Barevné zvony (pokoj).

Očk. 14. května	Žlutý zvon 5.6	8.8	Modrý zvon 5.6	8.8	
1. Slzř. 1 : 8	Krásný vzrůst. Tmavě zelená, do barvy *Fontinalis*.	Kultury téměř bílé.	Krásný vzrůst. Tmavě smaragdově zelená.	Kultury špinavě žlutobílé.	
2. Sl. zř. 1 : 8 + 2% glukosa	Krásný vzrůst. Světle trávově zelená.		Světleji zelená, ale tmavěji než u žlutého zvonu.		
3. Min. Artari + 1% glukosy + 0·3% lencin.	Detto. Ještě světleji zelená, jako jarní vločky *Mesocarpu* nebo *Zygnemy*.		Světle zelená, ale daleko tmavější než u žlutého zvonu.		

		Tk		
	12.8	Očk. 18. února	Tma. 15.3	Světlo 25.3
.	Žlutozelená.	1. Sl. zř.	Tmavě zelená, se žlutou obrubou po obvodu.	3. Intensivně tmavozelená.
ě	Žlutozelená.	2. Sl. zř. + 2% maltosy.	2.—3. Tmavě zelená se žlutou obrubou po obvodu.	3. Intensivně tmavozelená.
e-	Temně, skoro černě zelená.	3. Sl. zř. + 2% dextrosy.	2.—3. Žlutozelená.	Intensivně trávově zelená.

	Tk			
	12.8	5.6	Světlo 15.6	12.8
st. á,	Téměř bílá.	4. Skoro úplně bílá, jen slabounký nádech do šedozelena.	Úplně bílá.	Úplně bílá.
i.	Špinavě zelená.	4. Distinktní žlutozeleň.	Bochánkovité massy cibulově žluté.	Úplně bílá.

	Sírově žlutá.	Trávově zelená.	

I. seri

Chlor. zelená z Lipska.	
Očk. 6. zř.	Sl. zř. + tryps.
Protok žlutozelená.	S nádechem do aurea, velmi slabounce trávově kalně zelená. Slabý rozdíl.
Protok zelená.	Temně žlutá, se slaboučkým nádechem zeleným. Nápadný rozdíl.

II. ser

		lipská *žlutá.*		
Očk. 31. led	*C*	*A*	*B*	*C*
Protok. 6 2	utotrávově zená. (Slaběji než u *protothec.*)	Žlutobílá.		

21.8	Intensivně trávově zelená.	
1.6	Intensivně smutně trávově zelená, o něco slaběji než lipská.	

PROTOKOLL V.

Pokusy s trypsinem.

I. serie.

	Chlorella protothecoides		*variegata* B.		*Chlor.* zelená z Lipska.	
Očk. 6. ledna	Sl. zř. (4 : 1)	Sl. zř. + tryps.	Sl. zř. (4 : 1)	Sl. zř. + tryps.	Sl. zř.	Sl. zř. + tryps.
Protok. 18.1	Intensivně trávově tmavěji zelená, bez nádechu do žluta.	Žlutá, s docela slabounkým nádechem žlutozeleným. Nápadný rozdíl.	Kalně trávově slabě. zelená	Žlutá s nádechem do aurea; jen slabounký nádech do kávově kalné barvy.	Trávově žlutozelená.	S nádechem do aurea, velmi slabounce trávově kalné zelená. Slabý rozdíl.
Protok. 15.2	Tmavě trávově zelená.	Temně žlutá, s nádechem do zelena.	Trávově zelená, sektory aureové.	Temně žlutá, se slaboučkým nádechem do zelena.	Trávově zelená.	Temně žlutá, se slaboučkým nádechem zeleným. Nápadný rozdíl.

II. serie (výchozím materiálem kultur byla 1 kolonie ze sladinky odočkovaná; srovnej text).
A) Slzř. 1 : 1, *B*) Slzř. 1 : 1 + 4% dextrosy, *C*) Slzř. 1 : 1 + trypsin etherem sterilisovaný.

Očk. 31. ledna	*protothecoides*			*variegata* B.			lipská *zelená*			lipská *žlutá*.		
	A	*B*	*C* (tryps.)	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
Protok. 6.2	Slabě trávově zelená.	Žlutobílá.	Krásně trávově žlutozelená (nápadný rozdíl).	Slabě žlutozelená.	Žlutobílá.	Slabě žlutozelená.	Slabounce smutně trávově zelená.	Žlutobílá.	Žlutotrávově zelená. (Slaběji než u *protothec.*)	Žlutobílá.		
Protok. 15.2	Smutně zelená, dosti sytě.	Voskově bílá.	Krásně trávově zelená, ale začíná pronikati aureová žluť.	Slabě, kalně žlutavě nazelenalá.	Voskově bílá.	Krásně světle gummigutově, aureově žlutá. Jedna rourka s bílou obrubou.	Smutně zelená, dosti sytě.	Voskově bílá.	Aureově žlutá, jen slabý povlak zelený na povrchu.	Šedožlutá.	Žlutobílá.	Šedožlutá.

III. serie.
A) Slzř. 1 : 1 + trypsin neetherisovaný, *B*) Slzř. 1 : 1 + trypsin neetherisovaný + pepton, *C*) Slzř. 1 : 1 + pepton.

Očk. 7. února	*protothecoides*			*variegata*			lipská *zelená*.		
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
Protok. 15.2	Žlutozelená, s nádechem do aurea.	Dosti pěkně vesele trávově zelená.	Slabě smutně nazelenalá.	Žlutá, s nádechem do aureové žluti.		Nažloutlá, spíše žlutá než bílá, bez zeleni.	Intensivně žlutá, se slabým nádechem do zelena.		Žlutavá, slabě smutně zelená.
Protok. 23.2	Skoro úplně žlutá, nebo trávově zelená s prosvítající žlutí.	Trávově zelená s prosvítající a ton udávající žlutí.	Světle temně zelená.	Krásně oranžově žlutá.		Velmi slabě nazelenale žlutá.	Téměř žloutkově žlutá, jen se slabým nádechem do zelena.		Intensivně smutně trávově zelená.
Protok. 1.3	Silně žlutá, se slabým povlakem zeleným.	Špinavá žluť proniká slabou zelení.		Krásná aurea.		Velmi slabě nazelenalá.	Intensivně žlutá, jen slaboučký nádech do zelena.		Temně trávově zelená.

IV. serie.
A) Slad. zřed. 1 : 1, *B*) Slad. zřed. 1 : 1 + trypsin sterilisovaný varem.

Očk. 15. února	*protothecoides*		*variegata* B.		lipská *zelená*	
	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
Protok. 23.2	Velmi slabě zelená, ač intensivněji než *variegata*.	Pěkně trávově zelená.	Bledožlutá, slabě smutně zelenavá.	Jasně, žlutavě, vesele zelená.	Bledožlutá, velmi slabě smutně zelená.	Intensivně trávově zelená, až smaragdově.
Protok. 1.3	Smutně zelená.	Jasně intensivně zelená.	Smutně světle zelená.	Jasně trávově zelená.	Smutně světle zelená.	Intensivně trávově smaragdově zelená.

PROTOKOLL VI.

Pokusy s trypsinem.

V. serie.

Chlorella variegata B. Jedna kolonie ze sladinky odočkovaná držána po jeden měsíc na Sl. zř. 1 : 1 + trypsin neetherisovaný. Odtud přeočkována 1. března 1913 na Sl. zř. 1 : 1 atd.

	A Sl. zř. 1 : 1 „aurea"	„hyalina"	Slzř. 2 : $1H_2O$ *a*	*h*	Sl. zř. 1 : 1, přeočkovaná přímo ze Sl. zř. 1 : 1.
Protok. 29.3	Šedobílá.	Šedobílá.	Gummigutově žlutá, úplně bez nádechu do zelena.	Gummigutově žlutá.	Intensivně smutně zelená.

VI. serie. (1 kolonie ze sladinky).

Variegata B. 1. = původně na Sl. zř. 1 : 1, odkudž opět na Sl. zř. 1 : 1.

Variegata B. 2. = původně jeden měsíc na Sl. zř. 1 : 1 + trypsin, odkudž 1. března přeočkována na Sl. zř. 1 : 1. Ze Sl. zř. 1 : 1 pak 17. března opět na Sl. zř. 1 : 1 a pak na další půdy.
α = „*aurea*", *β* = „*hyalina*".

	1.		2. Sl. zř. 1 : 1		2. Sl. zř. 2 : $1H_2O$		2. Sl. zř. 1 : 1 + trypsin sterilis.	
	Sl. zř. 1 : 1	Slzř. 1 : 1 + trypsin sterilis.	*α*	*β*	*α*	*β*	*α*	*β*
29.3	Světle kalně, distinktně zelená.	Širokým pruhem intensivně trávově zelená.	Žlutobílá, buďto úplně bez nádechu do zelena nebo s tak slaboučkým nádechem, že téměř neviditelný.	Bílá, až žlutobílá, bez nádechu do zelena.	Gummigutově žlutá, bez nádechu do zelena. (*Variegata* 1: gummigut. žlutá se slabým nádechem do zelena).		Světle zelenavě žlutá.	Poněkud zelenější.
5.4	Distinktně kalně zelená.	Uprostřed intensivně trávově zelená.	Žlutavá, téměř nezřetelně nazelenalá	Aureově nažloutlá resp. žlutavá, velmi slabounce nazelenalá.	Gummigutově aureová. (*Variegata* 1: Kalně žlutavě zelenavě naběhlá).		Žlutavě slabě zelená.	Šedožlutá.
13.4	Intensivně kalně zelená.	Intensivně trávově zelená.	Šedě žlutavá, velmi slabounce kalně-zeleně naběhlá. Téměř žádná zeleň.	Žlutavá.	Gummigutová, naprosto žádná zeleň. (*Variegata* 1: tmavě i světleji zelená).		Slabě žlutavě zelená. Téměř žádná zeleň.	Šedožlutá.
15.5	Intensivně kalně trávově zelená, obruba nazelenalá.	Uprostřed intensivně trávově zelená, široká obruba nažloutlá.	Žlutavá, velmi slabě nazelenalá.	Gummigutově špinavě kalně žlutavá.	Světleji žlutavá, velmi slabounce nazelenalá. (*Variegata* 1: Tmavě smaragdově zelená.)		Světle slabě trávově zelená.	Šedožlutavá, téměř bez nádechu do zeleně.
1.6	Intensivně smutně trávově zelená, o něco slaběji než lipská.		Bledožlutá, malinko nazelenalá; podobná povlakům žlutozeleným *Zygnemy*, ale valně slaběji zelená.					
21.8	Intensivně trávově zelená.		Špinavě žlutá, se slabým nádechem do zelena.	Špinavě žlutá se slabounkým nádechem do zelena.				

rpsin neetherisovaný. Odtud přeočkována 1. března 1913 na Sl. zř. 1 : 1 atd.

	h	Sl. zř. 1 : 1, přeočkovaná přímo ze Sl. zř. 1 : 1.
z ná-	Gummigutově žlutá.	Intensivně smutně zelená.
ě		

Sl. zř. 1 : 1. Ze Sl. zř. 1 : 1 pak 17. března opět na Sl. zř. 1 : 1 a pak na další půdy.

2. Sl. zř. 2 : $1H_2O$		2. Sl. zř. 1 : 1 + trypsin sterilis.	
α	β	α	β
nmigutově žlutá, bez nádechu do zelena. *ariegata* 1: gummigut. žlutá se slabým nádechem do zelena).		Světle zelenavě žlutá.	Poněkud zelenější.
Gummigutově aureová. (*Variegata* 1: Kalně žlutavě zelenavě naběhlá).		Žlutavě slabě zelená.	Šedožlutá.
Gummigutová, naprosto žádná zeleň. (*Variegata* 1: tmavě i světleji zelená).		Slabě žlutavě zelená.	Šedožlutá.
		Téměř žádná zeleň.	
tleji žlutavá, velmi slabounce nazelenalá. *ariegata* 1: Tmavě smaragdově zelená.)		Světle slabě trávově zelená.	Šedožlutavá, téměř bez nádechu do zeleně.
Sírově žlutá.		Trávově zelená.	

Prostorová obdoba Steinerovy paraboly.

Napsal

J. Sobotka.

(S 6 obrazci v textu.)

Předloženo dne 19. prosince 1914.

1. Předmětem těchto řádků jest poukázati na konstruktivní význam jistých hyperbolických paraboloidů a parabol, které jsou s plochou 2. stupně v jednoduché souvislosti.

Jacob Steiner vyslovil větu:

Tečna a normála kuželosečky v libovolném jejím bodě P a obě osy kuželosečky stanoví jako tečny parabolu, která se dotýká normály ve středu křivosti kuželosečky pro bod P a tečny v pólu normály ke kuželosečce.

Tato věta jest obsažena v obecné větě, jejíž konstruktivní význam vytkl a mnohonásobně uplatnil K. Pelz a kterou možno vysloviti:

Otáčí-li se v rovině kuželosečky přímka p kolem pevného bodu P, obalují přímky normálně sdružené k jejím jednotlivým polohám parabolu, která se dotýká os kuželosečky, jakož i obou paprsků bodem P jdoucích a ke kuželosečce normálně sdružených.

Pelz nazývá tuto parabolu *Steinerovou parabolou.*[1])

2. Zobecnění této věty pro prostor obdržíme, uvažujeme-li paprsky normálně sdružené k rovinám daného svazku vzhledem ku ploše 2. stupně R. Budiž p osa svazku, q její polára ku ploše. Dále budiž P rovina jdoucí p; její pól Q leží na q, a budiž n kolmice s něho na P spuštěná. Popisuje-li P svazek (P) kolem p, vytvoří Q řadu (Q) na q k němu projektivní; nekonečně vzdálený bod N_∞ přímky n popíše rovněž řadu (N_∞) projektivní ku (P), která jest tudíž také projektivní ku (Q). Projektivní tyto řady (Q), (N_∞) vytvoří hyperbolický paraboloid U, který nazývejme vzhledem

[1]) Srovnej na př. příslušnou úvahu v knize: Chr. Wiener, Lehrbuch d. Darstell. Geom. I. Bd. str. 304.

k obdobě k Steinerově parabole *Steinerovým paraboloidem*. Řídící rovina N paraboloidu pro přímky jeho $n, \ldots$ jest kolma ku p.

Předpokládejme nyní, že plocha R jest centrická o středu O. Pól roviny $(p\,O)$ leží nekonečně daleko na q a bod N_∞ jest dán směrem ku $(p\,O)$ kolmým, takže zde přímka spojující body Q, N_∞ padá do nekonečna. Z toho plyne, že zaměření druhé řídící roviny Q paraboloidu U jest dáno rovinou, která promítá q orthogonálně do roviny $(p\,O)$.

Buďte x, y, z hlavní osy plochy R. Ježto paprsky n normálně sdružené k rovinám prostoru, jdoucí tedy jejich póly Q, náleží osovému komplexu plochy, tvoří úsečky $Q\,\mathfrak{Z}$, $Q\,\mathfrak{X}$, $Q\,\mathfrak{Y}$ na n, vycházející z bodu Q a vyťaté rovinami $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$, konstantní poměr $Q\,\mathfrak{Z} : Q\,\mathfrak{X} : Q\,\mathfrak{Y}$. Z toho plyne, že roviny $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$ dotýkají se každého Steinerova paraboloidu U, neboť stopy přímek n plochy U na rovinách těch leží na přímkách, které náleží téže řadě na U jako přímka q.

To seznáme též přímo, vyhledáme-li tečný kužel K plochy U o vrcholu O a k němu stanovíme soustředný normálný kužel K*. Kteroukoli tečnou rovinu T kužele K najdeme, jestliže pro libovolný bod Q na q spojíme paprsek $O\,Q$ s příslušnou přímkou n. Veďme bodem O normálnou rovinu Q_ω ku $O\,Q$ a normálnou rovinu P_ω ku n. Obě roviny protnou se v normále t ku T jdoucí bodem O. Rovina P_ω jest rovnoběžna ku příslušné rovině P svazku (P); tudíž jest $O\,Q$ průměr ku P_ω sdružený, z čehož soudíme, že t jest průměr normálně sdružený k průměru $O\,Q$ plochy R. Kužel K* jest tedy geometrickým místem průměrů normálně sdružených k paprskům svazku o středu O v rovině $(O\,q)$. Víme, že takový kužel obsahuje osy x, y, z plochy R. Z toho soudíme, že hlavní roviny $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$ dotýkají se kužele K, tedy také plochy U.

Odtud plyne též přímo, že tyto roviny vytínají z každého paprsku osového komplexu úsečky stálého poměru. Neboť je-li n paprsek takový, odpovídající bodu Q, jsou-li dále $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ jeho průsečíky s uvažovanými rovinami hlavními, označme analogické body na jiném paprsku n' resp. Q', $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; nyní spojme Q, Q' přímkou q a spustme s bodů ležících na q kolmice k jejich rovinám polárním. Tyto kolmice tvoří Steinerův paraboloid U, dotýkající se rovin hlavních, obsahující tudíž přímky $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{X}\,\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Y}'$; jest tedy $(\mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}'\,\mathfrak{Z}') = (\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z})$.

3. Místo bodů, jimiž možno vésti trojice navzájem kolmých tečných rovin k paraboloidu, jest t. zv. Mongeova rovina M paraboloidu.

Přímkou p jdou dvě k sobě kolmé roviny P_1, P_2 sdružené navzájem k ploše U; nechť protínají q v bodech Q_2, Q_1, takže Q_1 jest pólem roviny P_1, Q_2 pólem roviny P_2. Přímky n_1, n_2 body Q_1, Q_2 vedené, které protínají přímku p kolmo v bodech G_1 resp. G_2, náleží také paraboloidu U; neboť n_2 jest ku P_2 a n_1 ku P_1 normálně sdružena. Roviny P_1, P_2 jsou dvě navzájem kolmé tečné roviny plochy U, neboť prvá obsahuje n_1, druhá n_2. Můžeme tedy bodem G_1 položiti tři navzájem kolmé roviny tečné k U,

totiž P_1, P_2 a rovinu k této kolmou a přímkou n_1 jdoucí. Leží tedy bod G_1, a obdobně též G_2, v rovině M.

Z toho soudíme, že $(O\,p)$ jest Mongeovou rovinou paraboloidu U. Osa tohoto jest tedy kolma k rovině $(O\,p)$, což též plyne odtud, že obě řídící roviny paraboloidu jsou kolmy k rovině $(O\,p)$.

Že hlavní roviny $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$ dotýkají se U, vidíme též z toho, že polární rovina průsečíku přímky q s některou z nich jest k ní kolma, tedy kolmice s tohoto průsečíku na polární jeho rovinu leží v uvažované hlavní rovině.

Přímky n plochy U v hlavních rovinách $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$ ležící obdržíme též jako průsečnice těchto rovin s rovinami kolmými ku p a vedenými průsečíky přímky q s rovinami hlavními.

Je-li p paprskem osového komplexu, platí totéž o přímce q, ku p kolmé; paraboloid U přejde zde v parabolu u, totiž komplexovou parabolu v rovině vedené přímkou q kolmo ku p. Můžeme tudíž komplexové paraboly zváti též Steinerovými parabolami.

Je-li specielně přímka p tečnou plochy R, dotýkající se jí v bodě T, jest q tečnou ku p sdruženou a dotýkající se rovněž v bodě T. Roviny P_1, P_2 přejdou v tečnou rovinu $(p\,q)$ a v normálnou rovinu V přímkou p jdoucí. Vidíme, že $(p\,q)$ dotýká se paraboloidu U v pólu V roviny V vzhledem ku R. Tento pól V leží na q a druhá jím jdoucí přímka plochy U jest kolma ku p ležíc v rovině $(p\,q)$.

Jsou-li specielně p, q osy indikatrie bodu T plochy R a je-li n normálou příslušnou, jest $(q\,n)$ rovinou křivky u. Rovina $(q\,n)$ vytíná tudíž z hlavních rovin tečný trojúhelník paraboly u a q, n jsou dvě další tečny její; pól roviny $(p\,n)$ ku ploše R jest zde tečným bodem pro tečnu q křivky u.

Průsečnice rovin $(O\,p)$, $(q\,n)$ jest řídící přmkou paraboly u. To plyne již z přechodu plochy U v parabolu tu; můžeme též však podati přímý důkaz. Především jest u Steinerovou parabolou bodu T k průsečné křivce r roviny $(q\,n)$ s plochou R, ježto póly rovin jdoucích přímkou p vzhledem ku ploše R jsou zároveň póly jejich průsečnic s rovinou $(q\,n)$ vzhledem ku křivce r. Proto jest osa paraboly u kolma ku $(O\,p)$.

Každá rovina E přímkou q má pól E na p; ona protíná plochu R v kuželosečce, jejíž střed E_0 jest průsečíkem přímky $O\,E$ s E. Mají tedy všecky takové kuželosečky v rovinách jdoucích přímkou q středy v rovině $(O\,p)$; tedy také kuželosečka r. Leží tedy střed R_0 této křivky na průsečnici roviny $(O\,p)$ s rovinou $(q\,n)$; tudíž jest tato průsečnice $T\,R_0$ řídící přímkou Steinerovy paraboly u bodu T ku r, neboť u dotýká se nejen p a n, ale též os křivky r.

Rovněž tak plyne, že je-li p paprskem osového komplexu, a tedy degeneruje-li plocha U v parabolu u, že tato jest též Steinerovou parabolou ke kuželosečce, v níž protíná plochu normálná rovina Q přímkou q ku p, a to pro průsečík této roviny s přímkou p; osa paraboly u jest zde rovněž kolma ku $(O\,p)$. Stopní trojúhelník roviny Q na hlavních rovinách

1*

plochy R jest tečným pro u, neboť každá strana jeho jest normálně sdružena k rovině, jež orthogonálně promítá přímku p do příslušné roviny hlavní. Proto jest také pata kolmice s bodu O na Q, jako průsečík výšek uvedeného trojúhelníka, bodem řídící přímky paraboly u.

4. Plochy U resp. paraboly u užijme nyní k několika konstrukcím; nejprve řešme úlohu:

Stanoviti jest osy průsečné křivky s plochy 2. stupně R *s rovinou* S, *jsou-li dány*:

1. tři sdružené průměry O (x', y', z'),

2. osy O (x, y, z) *plochy* R.

1. Buďte X', Y', Z' koncové body průměrů x', y', z' a X_σ', Y_σ', Z_σ' průsečíky roviny S s těmito průměry. Polární roviny těchto průsečíků protínají se v pólu S roviny S; kolmice s onoho k této jest paprskem p osového komplexu. Abychom sestrojili komplexovou parabolu u v rovině S položme přímkou p rovinu Q_1 rovnoběžnou ku $X_\sigma' Y_\sigma'$, která nechť protíná z' v bodě Q_ζ, jehož na z' ležící sdružený bod ku R označme Q_ζ'. Veďme dále bodem Q_ζ' rovnoběžku ku průměru, jenž jest sdružen ke směru přímky $X_\sigma' Y_\sigma'$ vzhledem ke kuželosečce plochy R ležící v rovině $x' y'$. Tato rovnoběžka protíná rovinu S v pólu Q_1 roviny Q_1. Kolmice vedená v rovině S bodem Q_1 ku $X_\sigma' Y_\sigma'$ jest tečnou t_1 křivky u. Obdobně najdeme pól Q_2 resp. Q_3 roviny vedené přímkou p rovnoběžně ku $Y_\sigma' Z_\sigma'$ resp. $Z_\sigma' X_\sigma'$ a v kolmici t_2 resp. t_3 s tohoto pólu na příslušnou stopu roviny S další tečnu křivky u, při čemž Q_1, Q_2, Q_3 leží rovněž na tečně této paraboly, totiž na poláře q přímky p. Budiž P_σ průsečík p . S a O^σ pata kolmice s O ku S. Především jest u Steinerovou parabolou bodu P_σ ku s. Bod P_σ leží tedy na řídící přímce l paraboly u, která obsahuje také patu O_σ^1 a tím jest stanovena. Parabola u sama jest přímkou l rovněž dána, známe-li ještě dvě tečny její; a osy křivky s jsou tečnami k u středem S_0 křivky s jdoucími, při čemž bod S_0 plyne jako průsečík s přímkou $O S$.

Je-li a tečna paraboly u o dotyčném bodě T, jsou-li b, c dvě další, navzájem kolmé tečny paraboly, které nechť protínají se v bodě A a tečnu a v bodech B, C, a je-li dále l řídící přímka, bodem A jdoucí, paraboly, při čemž nechť kolmice v bodě A ku l protíná tečnu a v bodě A_1, jest $BT = A_1 C$, což plyne odtud, že úsečky vyťaté přímkami a, b na tečnách paraboly mají stejné ortáhogonlní průměty na l.

Známe-li tedy pro parabolu u tečnu a s dotyčným bodem T a přímku řídící l a máme-li vésti bodem A na l tečny k parabole, vztyčme v A kolmici ku l a protněme ji s a v bodě A_1, stanovme půlící bod úsečky $A_1 T$, kolem něhož jako středu opíšeme kružnici bodem A jdoucí, jejíž průsečíky B, C s přímkou l určují hledané tečny $A B$, $A C$.

Snadno sestrojíme též tečny ξ, η k parabole u bodem S_0 na její přímce řídící, je-li pro parabolu dána přímka tato a dvě tečny t_1, t_2, takto. Stanovíme tečny t_1^*, t_2^* jdoucí body $t_1 . l$, $t_2 . l$ a ku t_1 resp. t_2 kolmé

a vyhledáme ve čtyřstranu přímek t_1, t_2, t_1^*, t_2^* diagonální bod protilehlý ku l, t. j. ohnisko F paraboly u. Kružnice opsaná kolem S_0 a jdoucí bodem F protne l v bodech L_1, L_2, načež tečny ξ, η jsou rovnoběžny ku $L_1 F$, $L_2 F$.

Odtud plyne na př. tato konstrukce pro s. Zobrazme uvedeným způsobem, na př. tečny t_1, t_2 a tím také q, dále řídící přímku l paraboly u, sestrojme užitím Brianchonova šestistranu dotyčný bod jedné z těchto tečen a pak tečny ξ, η k u bodem S_0, způsobem prve uvedeným, čímž máme osy pro s co do polohy. Kolmice bodem P_σ ku ξ a η a přímka q vytínají na ξ resp. η vždy dva body sdružené ku s, užitím jichž najdeme též koncové body obou os. Možno též stanoviti ohniska, opíšeme-li trojúhelníku, jenž jest dán tečnou k u, kolmicí k ní bodem P_σ a jednou z os ξ, η, kružnici a protneme ji druhou osou. Místo P_σ možno užiti některého z bodů Q_1, Q_2, Q_3, jen nutno pak přímku q nahraditi t_1 resp. t_2 nebo t_3.

2. Jsou-li dány osy O (x, y, z) plochy R, jsou průsečnice roviny S s hlavními rovinami plochy tečnami paraboly u, jejíž řídící přímku l s body S_0, P_σ, O_σ a odtud přímky ξ, η určíme jako v předchozím. Dále můžeme následující podotknouti. Protneme-li přímku $X_\sigma Y_\sigma$ se sdruženým k ní průměrem hlavního řezu v $x\,y$ a spojíme průsečík s bodem Z_σ, pak spojnice tato protíná kolmici t_1 vedenou v rovině S bodem $X_\sigma Y_\sigma . l$ ku $X_\sigma Y_\sigma$ v pólu Q_1 dříve zmíněném. Analogicky stanovíme Q_2, tedy též snadno poláru q přímky p.

Koncové body os kuželosečky s, jakož i její ohniska, obdržíme na př. užitím bodu Q_1 a přímky t_1 jako prve.

5. Jako další úlohu uvažujme *konstrukci kružnice křivosti* pro rovinný řez plochy v libovolném bodě P, jsou-li dány tři sdružené průměry plochy co do polohy i délky.

Užijme označení zavedeného v předchozí úloze. Budiž tedy S rovina řezu; stanovíme průsečnice g_1, g_2 polárních rovin dvou z bodů X_σ', Y_σ', Z_σ' ku R, na př. bodů X_σ', Y_σ', s rovinou S. Při tom jest $g_1 \parallel Z_\sigma' Y_\sigma'$, $g_2 \parallel Z_\sigma' X_\sigma'$. Je-li t tečna a n normála křivky s v bodě P, sestrojíme střed K kružnice křivosti bodu P jednoduchým způsobem, známe-li ještě některý polární trojúhelník [1]) křivky s; zde na př. trojúhelník, jehož strany jsou $X_\sigma' Y_\sigma'$, g_1 a spojnice bodu X_σ' s průsečíkem $g_1 . g_2$. Známe-li K, můžeme též sestrojiti osy křivky s. Vztyčíme v bodě S_0 kolmici ku $P S_0$, která nechť protíná n v bodě Q. Kružnice opsaná kolem půlícího bodu úsečky $K Q$ jakožto středu a jdoucí bodem S_0 protíná n ve dvou bodech, které náleží osám ξ, η. Ježto přímky t, n jsou normálně sdruženy, stanovíme též ohniska křivky s jako v předchozím; paty kolmic vedených jimi ku t náleží hlavní kružnici vrcholové, čímž jest kuželosečka s úplně dána.

6. Naše úvahy dávají též další *konstrukci kružnice křivosti v bodě P plochy* R *pro rovinný řez s plochy bodem P*.

Uvažujme nejprve řez normální.

---

[1]) Věstník kr. České Spol. náuk 1902 č. VI.

Budiž t_1 tečna křivky té v bodě P, t_2 budiž její polára ku R a n normála ku R v bodě P. Polární rovina P bodu Q na t_1 zvoleného protíná rovinu $(t_1 n)$ v přímce m jdoucí bodem P; orthogonální průmět přímky normálně sdružené ku P do roviny $(t_1 n)$ jest kolmice h vedená bodem Q ku m. Ježto m jest též polárou bodu Q ku s, seznáváme odtud, že paraboloid U, tvořený paprsky normálně sdruženými k rovinám svazku kolem t_2, promítá se orthogonálně do roviny $(t_1 n)$ do Steinerovy paraboly bodu P ke kuželosečce s. Jest tedy střed křivosti K křivky s v bodě P zároveň dotyčným bodem přímky n se zmíněným průmětem plochy U. Obdržíme tedy bod K jako dotyčný bod plochy U s rovinou E vedenou normálou n kolmo k t_1.

Jsou-li na př. opět dány tři sdružené průměry $O\,(x', y', z')$ plochy R co do polohy i délky, sestrojme nejprve poláru t_2 přímky t_1. Tečná rovina T v bodě P ku R nechť protíná průměry ty v bodech T_ξ, T_η, T_ζ. Spojíme-li P s bodem T_ξ a vedeme bodem P rovnoběžku k $T_\eta T_\zeta$, obdržíme jednu dvojici involuce polár plochy R v rovině T. Obdobně dává $T_\eta P$ resp. $T_\zeta P$ a rovnoběžka bodem P ku $T_\xi T_\zeta$ resp. $T_\xi T_\eta$ druhou resp. třetí dvojici této involuce. Můžeme tedy paprsek t_2 odpovídající v této involuci paprsku t_1 sestrojiti známým způsobem.

Kolmice e_1 průsečíkem přímky t_1 s přímkou $T_\eta T_\zeta$ k rovině jdoucí přímkou t_2 rovnoběžně ku x' jest normálně sdružena k této rovině a náleží tedy ploše U. Obdobně sestrojíme paprsky normálně sdružené e_2, e_3 k rovinám procházejícím t_2 rovnoběžně ku y' resp. z'. Jsou-li $O\,(x', y', z')$ hlavní osy plochy R, leží e_1, e_2, e_3 v jejích hlavních rovinách.

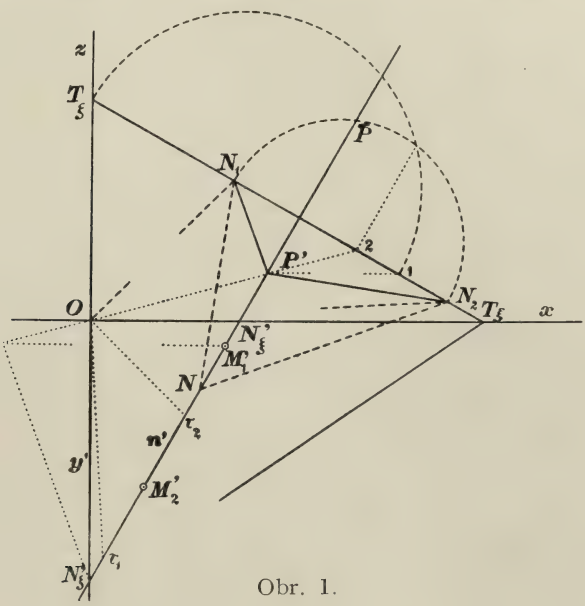
Konstrukci bodu K možno nyní provésti různým způsobem; na př. veďme průsečíkem e_1 . E rovnoběžnou rovinu F k oné rovině, která promítá t_1 orthogonálně do roviny $O\,t_2$; pak protíná F přímku n v bodě K. Nebo protneme e_1 a e_2 s rovinou E, načež spojnice obou průsečíků protíná rovněž n v bodě K. Správnost konstrukce seznáme z toho, že rovina E obsahujíc přímku n plochy U seče tuto ještě v přímce řady druhé.

Je-li S libovolná rovina jdoucí přímkou t_1, pro jejíž řez s_1 s plochou R máme stanoviti střed křivosti K_1 bodu P, promítejme orthogonálně na S; plocha U zůstává táž a seznáme stejně jako v předchozím, že také zde orthogonální průmět plochy U do roviny S jest Steinerovou parabolou bodu P ke kuželosečce s_1. Dotyčný bod této paraboly na normále n_1 v bodu P ku s_1 jest tedy bod K_1. Tento bod jest nyní orthogonálním průmětem do roviny S dotyčného bodu K roviny E s plochou U. Protíná tedy kolmice ze středu křivosti K normálního řezu $t_1 n$ na rovinu S tuto v žádaném bodě K_1. Tím nabyli jsme jednoduchého důkazu *věty Meusnierovy*.

7. Pro *konstrukci hlavních středů křivosti* M_1, M_2 *plochy 2. stupně v bodě jejím* P plyne ještě další zjednodušení, ježto zde příslušné paraboloidy U degenerují v paraboly.

Proveďme tuto úlohu specielně pro případ, že osy $O\,(x, y, z)$ plochy R jsou dány co do polohy. Promítejme (obr. 1.) orthogonálně na př. do

roviny $x\,z$ a označme symboly pro průměty útvarů čárkou. Sklopme tečnou rovinu T do roviny $x\,z$, čímž P padne do $\bar{P}$. Involuce polár plochy R v rovině T proťata jest přímkou $T_\xi T_\zeta$ v bodové involuci. Rovnoběžku bodem P' ku x nechť protíná tato přímka v bodě *1* a přímku $O\,P'$ v bodě *2*; tím nabýváme v $T_\zeta\,1$ jedné dvojice zmíněné bodové involuce, při čemž *2* jest centrálným jejím bodem. Sestrojme tedy nad úsečkou $T_\zeta\,1$ jako průměrem kružnici, kterou protněme kolmicí v bodě *2* ku $T_\xi T_\zeta$, načež kružnice vedená průsečíky této kolmice s řečenou kružnicí a bodem $\bar{P}$ protíná stopu $T_\xi T_\zeta$ v bodech N_1, N_2 tak, že $P\,N_1$, $P\,N_2$ jsou tečny k hlavním normálním řezům plochy v bodě P. Normála v P ku R promítá se do kolmice s P' na $T_\xi T_\zeta$ a její stopa N na naší průmětně jest průsečík výšek trojúhelníka $N_1\,N_2\,P'$. Steinerova parabola u_1 bodu P k normálnímu řezu v $N_1\,P\,N$ má za tečny kromě přímek $N_1\,P$, $N\,P$, $N_1\,N$ ještě přímky, v nichž rovina $N_1\,P\,N$ protíná hlavní roviny $x\,y$, $y\,z$. Průmět u_1' této paraboly dotýká se tedy přímek $N_1\,P'$, $N\,P'$, x, z, $N\,N_1$. Průsečík výšek tečnového



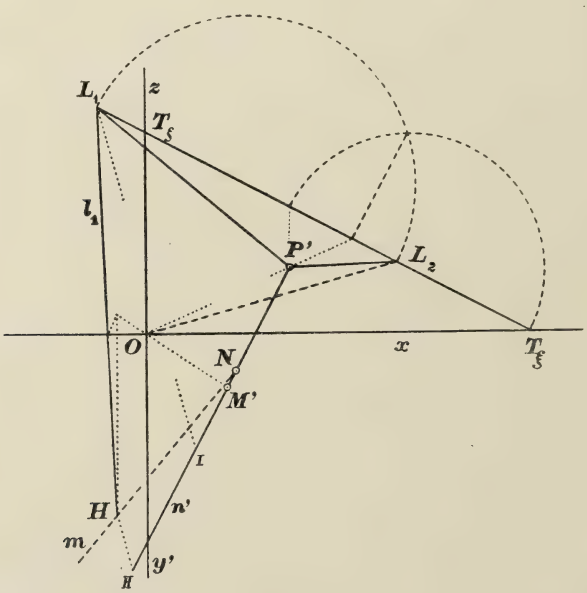
Obr. 1.

trojúhelníka $N_1\,N\,P'$ paraboly u_1' jest N_2; tudíž jest $O\,N_2$ řídící přímkou paraboly u_1', což plyne též odtud, že osa křivky u_1 jest kolma k rovině $O\,P\,N_2$, její průmět jest tedy kolmý ke stopě $O\,N_2$ této roviny; tento průmet dává směr osy křivky u_1'. Protíná-li tedy $P'\,N$ přímky x, z v bodech N_ξ', N_ζ' a kolmici vztyčenou v bodě O ku $O\,N_2$ v bodě τ_1 a učiníme-li, též co do smyslu, $N_\xi'\,M_1' = \tau_1\,N_\zeta'$, jest M_1' jako dotyčný bod přímky $P'\,N$ s u_1' orthogonálním průmětem hlavního středu křivosti M_1. Obdobně vztyčme v bodě O kolmici ku $O\,N_1$, která protne $P'\,N_2$ v bodě τ_2, a učiňme $N_\xi'\,M_2' = \tau_2\,N_\zeta'$, čímž nabudeme průmětu M_2' druhého hlavního středu křivosti.

Velmi jednoduše obdržíme M_1' a M_2' užitím Brianchonových šestistranů. Tak jsou na př. pro u_1' tečnami přímka $P'N_1$, nekonečně vzdálená přímka průmětny $x\,z$, osy x, z a přímka $P'N$; označme je po řadě *1*, *2*, *3*, *4*, *5* a budiž *6* tečna soumezná ku *5*. Ze šestistranu *123456* plyne, že třeba vésti průsečíkem $n'.y'$ rovnoběžku ku $P'N_1$ a jejím průsečíkem s $P'O$ rovnoběžku k x, abychom v průsečíku poslední přímky s n' obdrželi bod M_1'. Obdobně obdržíme M_2', vedeme-li bodem $y'.n'$ rovnoběžku k $P'N_2$ až k průsečíku s $P'O$ a odtud rovnoběžku k x, načež tato přímka protne n' v bodě M_2'.

8. Dříve vyvozená *konstrukce středu křivosti M libovolného normálného řezu* plochy 2. stupně v bodě P dá se rovněž velmi jednoduše provésti, předpokládáme-li orthogonální projekci do jedné z hlavních rovin. Promítejme (obr. 2.) na př. opět do roviny $x\,z$. Rovina normálného řezu s protínej stopu $T_\xi T_\zeta$ v bodě L_1, jemuž nechť ve zmíněné involuci odpovídá bod L_2, takže $P\,L_2$ jest polárou přímky $P\,L_1$.

Paprsky normálně sdružené k polárním rovinám bodů na $P\,L_1$ tvoří hyperbolický paraboloid U_1, jemuž náleží normála n a pro nějž dotyčný



Obr. 2.

bod roviny M jdoucí přímkou n kolmo ku $P\,L_1$ jest hledaným bodem M. Tato rovina M obsahuje kromě n ještě přímku p plochy U_1, která protíná n v žádaném bodě M. Sestrojíme tedy M' jako průsečík $p'.n'$. Průměty všech přímek plochy U_1 do roviny $x\,z$ obalují parabolu U_1', která se dotýká přímek x a y', ježto $x\,z$ a $y\,z$ jsou tečnými rovinami pro U_1. Dále dotýká se U_1' přímek $P'L_1$ a n', neboť $P\,L_1$, n leží na U_1.

Polární rovina bodu L_1 k dané ploše 2. stupně jest orthogonálně promítací do roviny $x\,z$, tudíž jest kolmice l_1 s bodu L_1 na $P'\,L_2$ rovněž přímkou plochy U_1, tudíž také tečnou ku parabole U_1'. Stopa m roviny M v rovině $x\,z$ prochází stopou N přímky n a jest kolma ku $P'\,L_1$, ježto $M \perp P\,L_1$. Při tom jest N průsečíkem výšek trojúhelníka $N_1\,N_2\,P'$. Průsečík H přímek l_1, m náleží přímce p, neboť tato jest částečným průsekem plochy U_1 a roviny M; jest tedy H stopou přímky p, náleží tudíž také přímce p'. Proto jest p' tečnou k U_1' jdoucí bodem H a různou od l_1, takže možno ji lineárně sestrojiti. Pro U_1' známe tečny x, z, n', $P'\,L_1$, l_1 a nekonečně vzdálenou přímku g roviny $x\,z$, můžeme tedy obdržeti přímku p' různým způsobem; užijme na př. šestistranu $p'\,l_1\,x\,z\,g\,n'$, tedy protněme rovnoběžku k z bodem H rovnoběžkou k n' průsečíkem l_1. x vedenou, načež spojnice tohoto průsečíka s bodem O protne n' v bodě M'. Bod L_2 jest průsečíkem výšek trojúhelníka tvořeného tečnovým třístranem $(n',\ l_1,\ P'\,L_1)$ paraboly U_1'. Leží tedy L_2 na řídící přímce paraboly U_1', což plyne též odtud, že kolmice k rovině $P\,L_2\,O$, která má $O\,L_2$ za stopu, promítají se do přímek rovnoběžných s osou křivky U_1'. Průměty úseček vyťatých přímkami n', l_1 na tečnách křivky U_1' na přímku $O\,L_2$ jsou tudíž navzájem rovny. Protínají-li tedy na př. kolmice s L_1 a H na $O\,L_2$ přímku n' v bodech I, II, jest i co do smyslu $II\,M' = I\,P'$.

Můžeme zde též dospěti k výsledkům, které vyvodil svou dobou A. Mannheim [1]) a jejichž odůvodnění spočívá u něho na několika známých vlastnostech osového komplexu; konstrukce zde vyvozené jsou však ještě jednodušší.

9. Užijme dále plochy U ke *konstrukci os centrické plochy 2. stupně.*

Předpokládejme, že přímky p, q jsou polárami ku ploše R a buďte též známy involuce sdružených rovin ku ploše ve svazcích o osách p, q, jakož i střed O plochy.

Přímky normálně sdružené k rovinám jdoucím přímkou p tvoří hyperbolický paraboloid U, jenž spočívá na přímce q, kdežto normálně sdružené přímky rovin svazku kolem q tvoří druhý hyperbolický paraboloid U*, spočívající na p. Bodem O prochází příčka o přímek p, q, protínající je v bodech P, Q. Polára o^* přímky o jest nekonečně vzdálená přímka diametrální roviny O sdružené k o. Jest tedy Q pólem roviny přímkou p rovnoběžně k O vedené; tudíž náleží kolmice bodem Q ku O paraboloidu U a kolmice bodem P ku O paraboloidu U*. Oba paraboloidy dotýkají se tedy roviny E, která promítá o orthogonálně do roviny O. Hlavní roviny plochy R dotýkají se každé plochy U. Jsou tedy společnými, od roviny E různými, tečnými rovinami kuželů K, K*, které jsou opsány z bodu O plochám U, U*.

---

[1]) Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrix et des rayons de courbure principaux. — Journal de mathématiques pures et appliquées. T. VIII. 1882.

Jedna z řídících rovin plochy U jest kolma ku p, druhou jest rovina, která promítá orthogonálně q do roviny $(O\,p)$; známe tedy pro kužel K tři tečné roviny, totiž roviny jdoucí bodem O rovnoběžně k oběma řídícím rovinám a rovinu E, potřebujeme tedy ještě dvě další tečné jeho roviny. Rovněž tak stanovíme K*.

Na místo, abychom hledali společné tečné roviny těchto kuželů, sestrojme k nim soustředné kužele normálné N, N*, jež pak protínají se kromě hrany kolmé k E ještě ve třech hranách, které jsou osami plochy R.

Z předchozího (čl. 2.) seznáváme, že N jest onen kužel, jenž jest tvořen průměry plochy R normálně sdruženými k paprskům svazku kolem O v rovině $(O\,q)$. Tím dospíváme ke známé konstrukci, která dává osy jako průsečné hrany takových dvou kuželů N, N*, kdežto čtvrtá průsečná hrana jest průměrem ku o normálně sdruženým. Zdá se však, že použití plochy U resp. U* pro konstrukci tu jest přehlednější.

Nejprve uveďme konstrukci os, je-li plocha R dána třemi kuželosečkami k_1, k_2, k_3 na ní ležícími. Průsečnice rovin kuželoseček k_1, k_2 resp. k_2, k_3 resp. k_3, k_1 buďte s_{12}, s_{23}, s_{31}, jejich poláry n_{12}, n_{23}, n_{31}. Tyto obdržíme na př. jako průsečnice tečných rovin plochy v příslušných průsečících kuželoseček, nebo odtud, že n_{ik} spojuje póly přímky s_{ik} vzhledem ke k_i a k_k.

Přímky n_{12}, n_{23}, n_{31} tvoří trojúhelník ležící v polární rovině průsečíka přímek s_{12}, s_{23}, s_{31}. Vrcholy $V_1 = n_{12} \cdot n_{31}$, $V_2 = n_{12} \cdot n_{23}$, $V_3 = n_{23} \cdot n_{31}$ jsou póly rovin křivek k_1, k_2, k_3. Buďte n_1, n_2, n_3 normály z bodů těch k těmto rovinám a budiž O střed plochy R, který obdržíme v průsečíku přímek spojujících body V_i se středy křivek k_i. Přímce s_{12} odpovídající paraboloid U_{12} přímek normálně sdružených jest úplně dán, ježto známe jeho přímky n_1, n_2, tudíž také rovinu k s_{12} kolmou jako řídící rovinu, dále přímku n_{12} a příslušnou druhou řídící rovinu jakožto rovinu jdoucí přímkou n_{12} kolmo k $(O\,s_{12})$. Vedeme-li tedy bodem O normály l_1, l_2, l_3 k rovinám $(O\,n_1)$, $(O\,n_2)$, $(O\,n_{12})$, dále rovnoběžku l_4 k s_{12} a protneme konečně rovinu $(O\,s_{12})$ rovinou bodem O kolmo ku n_{12} jdoucí v přímce l_5, určují přímky $l_1 \ldots l_5$ kužel 2. stupně L_{12}, na němž leží hledané osy plochy R. Právě tak dospěli bychom vycházejíce od s_{23} resp. s_{31} k plochám U_{23}, U_{31} a ke kuželům L_{23}, L_{31}. Při tom mají kužele L_{im}, L_{in} společnou přímku jdoucí bodem O kolmo k rovině $(O\,n_i)$ a osy plochy R jsou dalšími jejich společnými hranami.

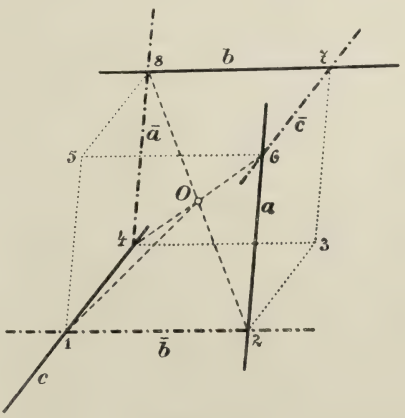
10. Můžeme též snadno dokázati větu:

Promítneme-li normály centrické plochy 2. stupně vztyčené v bodech diametrální kuželosečky k ze středu plochy, jest promítající kužel druhého stupně a dotýká se hlavních rovin plochy.

Neboť tyto normály tvoří, jak známo, přímkovou plochu 4. stupně a všecky její tečné roviny jdoucí bodem O jsou dvojnásobnými tečnými rovinami. Normály plochy 2. stupně v průsečících křivky k s hlavní rovinou

plochy leží v této hlavní rovině, která náleží tudíž uvažovanému tečnému kuželi.

Máme-li specielně *hyperboloid* H, jenž jest dán třemi přímkami a, b, c téže řady a zvolíme-li za řez diametrální řez s asymptotickou rovinou protínající plochu ve dvou rovnoběžkách a, $\bar{a}$, rozpadá se zmíněná plocha 4. stupně ve dva hyperbolické paraboloidy, jež jsou navzájem souměrny dle středu O. Sestrojme površky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ plochy H rovnoběžné ku a, b, c, takže prvá protíná b a c, druhá c a a, třetí a a b. Těchto šest přímek stanoví (obr. 3.) jako hrany rovnoběžnostěn, jehož střed splývá s O a jehož vrcholy označíme po řadě *1*, *2*, ... *8* a to v uspořádání, které jest z obrazce patrno. Uvažujme nejprve normálový paraboloid podél a a stanovme normálový kužel L o vrcholu O k soustřednému tečnému kuželi tohoto paraboloidu U. Ježto jedna řídící rovina plochy U jest kolma k a, jest rovnoběžka l_1 bodem O ku a jednou hranou L; ježto dále centrální rovina přímky a ku H jest druhou řídící rovinou plochy U, máme v kolmici l_2 s O na a v rovině $(a\bar{a})$ druhou přímku, kdežto kolmice l_3 v bodě O k rovině $(a\,\bar{a})$ jest třetí přímkou plochy L. Vztyčíme-li normálu n_6 v bodě 6 ku H, náleží kolmice l_4 v bodě O k rovině On_6 spuštěná rovněž kuželi L. Konečně, je-li n_2 normála v bodě *2* ku H, náleží kuželi L též kolmice l_5 v bodě O k rovině $O\,n_2$. Tím jest kužel dán.



Obr 3.

Užijeme-li místo a přímky b, obdržíme obdobný kužel L*, jehož jedna hrana jest rovnoběžna k b, druhá protíná b orthogonálně, třetí jest kolma k rovině $O\,b$, čtvrtá l_4* jest kolma k rovině $O\,n_7$, je-li n_7 normála ku H v bodě 7, a konečně pátá jest kolma k rovině $O\,n_2$, jsouc tedy společnou kuželům L, L*, takže hledané osy jsou dalšími třemi jejich společnými hranami. Vztyčíme-li normálné roviny k přímkám *02*, *06*, *07*, jsou jejich průsečnicemi s rovinami resp. *126*, *267*, *678* tři přímky, k nimž jsou hrany l_5, l_4, l_4* rovnoběžny. Můžeme ovšem přímku b nahraditi přímkou $\bar{b}$ nebo c nebo konečně přímkou $\bar{c} = (6, 7)$. Zde splývají patrně vždy přímky p a q a tedy i příslušné Steinerovy paraboloidy U a U*.

11. Proveďme ještě některé úvahy o obrazci, jenž nám skytá řešení osového problemu pro *trojosý ellipsoid*, jsou-li dány tři jeho sdružené poloměry $O\,A$, $O\,B$, $O\,C$. Buďte A_I, B_I, C_I stopy průměrů těch na průmětně. Vztyčme nejprve kolmici v bodě O k rovině $O\,A_I\,B_I$; její stopa budiž $\bar{C}_I$. Kolmice bodem $\bar{C}_I$ k $O'\,A_I$ [1]) jest stopou roviny jdoucí bodem O

[1]) Promítáme opět orthogonálně na rovinu $A_I\,B_I\,C_I$ a značíme Σ' průmět útvaru Σ.

kolmo ku $O A_1$, kolmice bodem O' k $A_1 C_1$ protíná tuto stopu ve stopě $\bar{B}_1$ normály $O \bar{B}_1$ k rovině $O A_1 C_1$. Rovněž tak jest kolmice k $O' B_1$ bodem $\bar{C}_1$ stopou roviny bodem O jdoucí a kolmé k $O B_1$ a proťata jest kolmicí k $B_1 C_1$ bodem O' vedenou ve stopě $\bar{A}_1$ normály $O \bar{A}_1$ k rovině $O B_1 C_1$. Pak jest $\bar{A}_1 \bar{B}_1$ stopou roviny $O \bar{A}_1 \bar{B}_1$ kolmé ku $O C_1$, takže jest $\bar{A}_1 \bar{B}_1 \perp O' C_1$. Trojúhelník $\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$ jest polárním obrazcem trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ k imaginární kružnici o středu O' a o poloměru, jehož absolutní délka jest rovna distanci bodu O od průmětny, takže distanční kružnice bodu O jest reálným representantem této imaginární kružnice. Z toho plyne, že trojúhelníky ty jsou perspektivní, takže bod $A_0 = B_1 C_1 . \bar{B}_1 \bar{C}_1$, a obdobné body B_0, C_0 leží na přímce Δ a spojnice $A_1 \bar{A}_1$, ... procházejí jedním bodem δ, při čemž rovina $O \Delta$ jest kolma ku přímce $O \delta$. Budiž dále σ těžiště torjúhelníka $A B C$ a S stopa přímky $O \sigma$, kdežto N budiž stopa normály s bodu O na rovinu $A B C$.

Abychom nyní sestrojili osy $O X$, $O Y$, $O Z$ ellipsoidu, učiňme poláru $\bar{c}$ přímky $A B$ osou svazku rovin, k nimž uvažujme paprsky normálně sdružené, tvořící Steinerův paraboloid U, jenž promítá se z bodu O kuželem K, ke kterému stanovíme soustředný normálný kužel L. Rovina jdoucí přímkou $A B$ kolmo k rovině $O \bar{c}$ jest řídící rovinou pro U; rovina $O \bar{c}$ splývá s rovinou $O C \sigma$ a její stopa jest tedy $C_1 S$. Kolmá rovina ku $A B$ bodem O protíná tuto rovinu v kolmici l vedené bodem O k řečené rovině řídící. Tato kolmá rovina prochází přímkami $O \bar{C}_1$, $O N$, její stopa $\bar{C}_1 N$ jest kolma k $A' B'$ procházejíc bodem N. Tudíž jest stopa L přímky l průsečíkem přímek $S C_1$ a $N \bar{C}_1$. Druhou přímkou m plochy L jest $O C_1$, ježto k této přímce jest druhá řídící rovina plochy U kolma. Třetí přímka na L jest $O \bar{C}_1$, neboť rovina $O A_1 B_1$ dotýká se plochy U.

K rovině $\bar{c}$ A jest kolmice s A na $O B_1 C_1$ normálně sdružena. Rovina, která promítá tuto kolmici z bodu O, prochází přímkou $O A_1$ kolmo ku $O B_1 C_1$; jest tedy průsečnice roviny $O \bar{B}_1 \bar{C}_1$ ku $O A_1$ kolmé s rovinou $O B_1 C_1$ další přímkou na L; jest to tedy přímka $O A_0$. Nahradíme-li rovinu $\bar{c}$ A rovinou $\bar{c}$ B, seznáme, že též přímka $O B_0$ leží na L. Proto jest stopou kužele L kuželosečka (l) jdoucí body L, C_1, $\bar{C}_1$, A_0, B_0.

Protneme-li $B_1 S$ a $\bar{B}_1 N$ v bodě L_1, jest kuželosečka (l_1) body L_1, B_1, $\bar{B}_1$, C_0, A_0 stopou druhého kužele L_1. Konečně protneme-li $A_1 S$ a $\bar{A}_1 N$ v bodě L_2, jest kuželosečka (l_2) body L_2, A_1, $\bar{A}_1$, B_0, C_0 stopou kužele L_2, jenž rovněž obsahuje hledané osy $O X$, $O Y$, $O Z$. Plynou tedy body X, Y, Z jako průsečíky, různé od A_0 resp. B_0 resp. C_0 kuželoseček (l), (l_1) resp. (l), (l_2) resp. (l_1), (l_2). Abychom pak stanovili jednu z kuželoseček (l), (l_1), (l_2), zvolme na Δ dva z bodů A_0, B_0, C_0; jimi procházejí dvě strany trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ resp. $\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$ protínající se ve vrcholu I resp. $\bar{I}$; zvolené dva body na Δ, vrcholy I, $\bar{I}$ a průsečík spojnic $S I$, $N \bar{I}$ náležejí takové kuželosečce. Spojíme-li zvolené body na Δ, jakož i I, $\bar{I}$ s bodem O, obdržíme čtyři přímky, z nichž každá jest průsekem výšek trojhranu, který jest tvořen ostatními třemi paprsky. To souvisí s okol-

ností, že kužele L, L_1, L_2 jsou rovnostranné; tudíž leží výšková hrana libovolného trojhranu, jehož hrany na takovém kuželi leží, též na tomto kuželi, čehož možno v konstrukci rovněž užíti, zvláště tehdy, prochází-li průmětna právě body A, B, C.

Z dřívějšího víme, že hrany kužele L jsou normálně sdruženy k paprskům jdoucím bodem O v rovině $O\,A_I\,B_I$. Vedeme-li tedy v této rovině dva sdružené průměry průsečné kuželosečky s plochou R, značíce jejich stopy A_I^*, B_I^*, protínají se přímka $C_I\,B_I^*$ a kolmice s bodu $\bar{C}_I$ na $O'\,A_I^*$ v bodě křivky (l), rovněž tak jako přímka $C_I\,A_I^*$ s kolmicí s $\bar{C}_I$ na $O'\,B_I^*$.

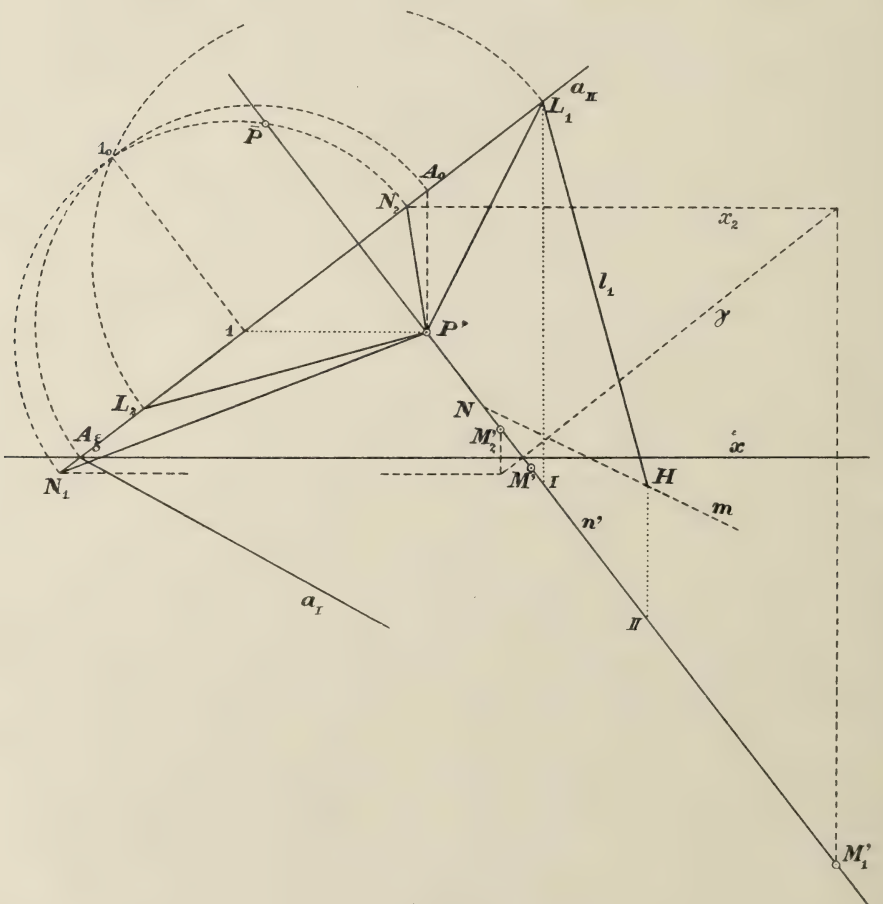
Učiníme-li $A\,A^* = -B\,A_1$, značíce A_1 průsečík přímky $O\,A_I^*$ a B^* průsečík přímky $O\,B_I^*$ s přímkou $A\,B$, jsou A^*, B^* harmonické ku A, B; splývá tedy normálně sdružený paprsek n roviny $\bar{c}\,A^*$ s kolmicí s B^* na rovinu $A_I^*\,C_I\,O$. Kolmice v O k rovině $n\,O$ jest tedy průsečnicí roviny jdoucí bodem O kolmo k $O\,B_I^*$ s rovinou $O\,A_I^*\,C_I$. Tato přímka náleží kuželi L; její stopa jest tedy průsečíkem kolmice s $\bar{C}_I$ ku $O'\,B_I^*$ s přímkou $C_I\,A_I^*$, což jest ve shodě s konstrukcí dříve zmíněnou.

12. Je-li R *paraboloid*, dotýká se každý Steinerův paraboloid U jeho hlavních rovin $x\,y$, $x\,z$. Rovnoběžka k ose x vedená bodem P nechť protne plochu R v konečnu v bodě R. Rovina rovnoběžná k $x\,y$ přímkou $P\,R$ protíná R v parabole p_1 o tečně t_1 v bodě R. Úsečka obsažená mezi P a osou křivky p_1 na kolmici vztyčené v bodě P ku t_1 promítá se na osu tu orthogonálně do úsečky $P_1\,R_1$ rovné parametru paraboly p_1. Promítáme-li orthogonálně do roviny $x\,y$, promítá se normála n vedená bodem P na tečnou rovinu plochy R v bodě R do přímky rovnoběžné ku $P_1\,R_1$. Z toho plyne, že úsečka na n mezi P a $x\,z$ promítá se na x orthogonálně do úsečky rovné parametru hlavního řezu plochy R v rovině $x\,y$. Promítá se tudíž, ježto přímka n jest normálně sdružena k polární rovině bodu P, úsečka obsažená na každém paprsku osového komplexu paraboloidu mezi rovinami $x\,y$, $x\,z$ orthogonálně na osu x do úsečky, jež se rovná dvojnásobné vzdálenosti ohnisek obou hlavních řezů paraboloidu R.[1])

Budiž F_1 resp. F_2 ohnisko hlavního řezu v rovině $x\,y$ resp. $x\,z$. Z právě zmíněné vlastnosti našeho specielního komplexu osového plyne, že, je-li a_I resp. a_{II} stopa nějaké roviny A v $x\,y$ resp. $x\,z$, promítá se komplexová parabola u roviny A do $x\,z$ orthogonálně do paraboly u', která má x za tečnu vrcholovou a jejíž úseky tečen mezi a_{II} a x promítají se na x do úseček, jež mají vesměs délku $2\,.\,F_1\,F_2$. Je-li tedy A_ξ průsečík A . x a učiníme-li $A_\xi\,\nu = 2\,F_1\,F_2$, jest ν vrchol paraboly u'. Analogicky jest orthogonální průmět křivky u do roviny $x\,y$ parabolou u'', jež má rovněž x za tečnu vrcholovou a jejíž tečnové úseky mezi a_I, x promítají se orthogonálně na x do úseček délky $2\,.\,F_2\,F_1$; učiníme-li $A_\xi\,\mu = 2\,.\,F_2\,F_1$, jest μ vrchol křivky u''.

[1]) Viz: Reye, Die Geometrie der Lage, II. Abt. 4. Aufl. str. 221.

Konstrukce, které jsme provedli pro plochu centrickou, se tím poněkud zjednoduší. Stanovme zde (obr. 4.) na př. hlavní středy křivosti M_1, M_2 pro bod P, jakož i střed křivosti libovolného normálného řezu bodem P. Nechť protíná stopa a_{II} roviny tečné A v P rovinu bodem P kolmou ku x v A_0 a rovnoběžku bodem P' ku x v bodě *1* a budiž $\overline{P}$ poloha bodu P, které nabude sklopením roviny A do $x\,z$. Kolmice v bodě *1* protínej kružnici nad průměrem $A_\xi A_0$ v bodě 1_0, pak protíná kružnice mající střed na a_{II} a jdoucí body 1_0, $\overline{P}$ přímku a_{II} v bodech označovaných dříve N_1, N_2; Bod M_1' jest dotyčným bodem přímky n' s parabolou, která dotýká se



Obr. 4.

kromě n' ještě přímek N_1P', N_1N, má x za tečnu vrcholovou a rovnoběžku x_2 bodem N_2 ku x vedenou za přímku řídící. Můžeme tedy průmět M_1' hlavního středu křivosti obdržeti tím, že v bodě n' . x vztyčíme kolmici γ ku n' a jejím průsečíkem s x_2 vedeme rovnoběžku ku z, která protne n' v bodě M_1'. Obdobně protneme γ rovnoběžkou vedenou bodem N_1 ku x a sestrojme průsečíkem rovnoběžku k z, jež protne n' v bodě M_2'.

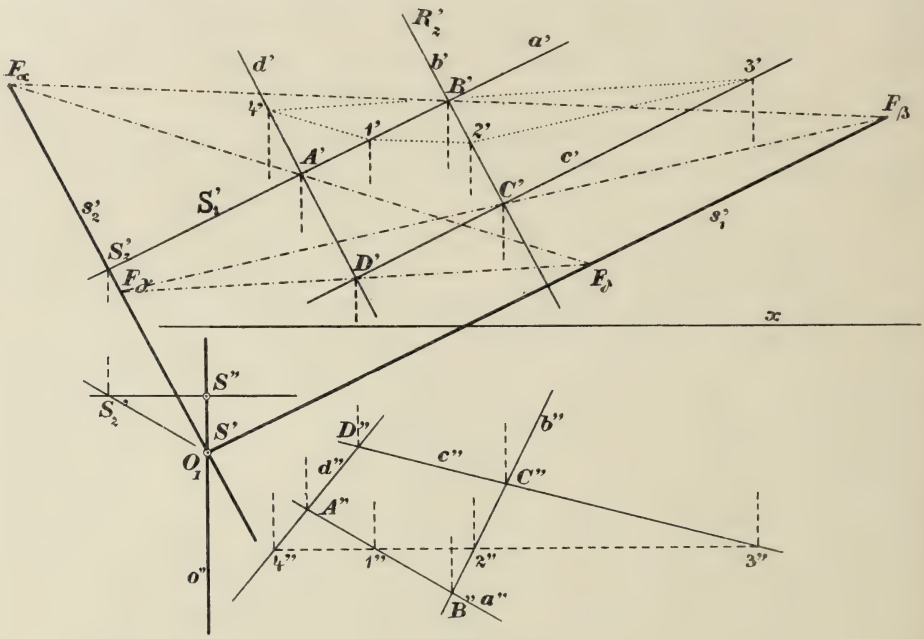
Abychom stanovili střed křivosti M v bodě P k normálnému řezu, jehož rovina jde tečnou $P L_1$ plochy, určeme jako dříve bod H, veďme body L_1, H rovnoběžky k z, které protnou n' v bodech I, resp. II a abychom získali M', učiňme $II\,M' = I\,P'$, nebo stanovme jiným způsobem M' jako průsečík přímky n' s různou od l_1 tečnou bodem H vedenou k parabole, která se dotýká přímek l_1, $L_1 P'$, n', má mimo to x za tečnu vrcholovou a rovnoběžku ku x bodem L_2 za přímku řídící.

13. Konečně uveďme applikaci našich úvah na *konstrukci vrcholu S hyperbolického paraboloidu* H, jenž jest dán prostorovým čtyřúhelníkem $A\,B\,C\,D$. Jsou zde $a = A\,B$, $c = C\,D$ dvě přímky jedné a $b = B\,C$, $d = D\,A$ dvě přímky druhé řady na H. Řídící roviny plochy buďte R_1 R_2 tak, že prvá jest rovnoběžna k a, c, druhá k b, d. Průsečnice o obou řídících rovin dává směr pro osu o plochy. Promítejme nejprve (obr. 5.) plochu do dvou navzájem kolmých rovin, z nichž prvá M jest kolma ku o, a řešme naši úlohu nejprve pro tuto specielní polohu. Za tím účelem sestrojme normálové paraboloidy P_1, P_2 plochy H, jež opírají se o přímky a resp. b. Každá normálová plocha plochy H dotýká se hlavních rovin H_1, H_2 plochy této; neboť každá hlavní rovina obsahuje onu normálu, která odpovídá průsečíku jejímu s opěrnou přímkou plochy normálové. Promítáme-li nyní P_1 z nekonečně vzdáleného bodu přímky o, obdržíme parabolický tečný válec Z_1, který se dotýká H_1, H_2; ten jest zde kolmý k první průmětně a promítá se do paraboly p_1, totiž obrysové paraboly prvého průmětu plochy P_1. Asymptotická rovina $S_1 \parallel R_1$ plochy H pro přímku a jest promítací do M; jest centrální rovinou přímky a na P_1 a proto jest, jak plyne též z předchozího, osa pro P_1 kolma ku S_1, tedy rovnoběžna ku M, pročež udává též směr osy křivky p_1. Z toho plyne, že a' jest tečnou vrcholovou pro p_1. Průměty n_α', n_β' normál v bodech A, B ku H jsou dvě další tečny ku p_1, čímž jsou tato parabola a válec Z_1 dány. Obdobně najdeme pro promítací válec Z_2 plochy P_2 do M, že b' jest tečnou vrcholovou a n_β' a průmět n_γ' normály v C ku H jsou dvěma dalšími tečnami ku stopní parabole p_2 válce Z_2, při čemž jest p_2 zároveň obrysem prvého průmětu plochy P_2.

Paraboly p_1, p_2 mají tečnu n_β' společnou, kdežto jejich dvě další společné tečny jsou stopami $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$ hledaných rovin H_1, H_2. Ježto $H_1 \perp\!\!\!\perp H_2$, jest též $h_1^{(1)} \perp\!\!\!\perp h_1^{(2)}$ a průsečík O_1 těchto přímek jest tudíž průsečíkem řídících přímek parabol p_1, p_2, jsa zároveň stopou osy plochy H. Tyto řídící přímky s_1', s_2' jsouce rovnoběžny k a' resp. b' zobrazují dvě přímky s_1, s_2 plochy H, které protínají se v bodě S osy o, t. j. ve vrcholu plochy H; jsou to tedy vrcholové površky plochy H.

Kolmice v A' resp. B' ku n_α' resp. n_β' protínají se v ohnisku F_α křivky p_1. Tyto kolmice jsou průměty hlavních přímek vzhledem k rovině M pro tečné roviny $a\,d$, $a\,b$ plochy P_1. Vedeme-li v tečných rovinách plochy H v bodech přímky a hlavní přímky těmito body, obdržíme hyperbolický paraboloid, který má roviny M, S_1 řídícími, pročež jest jedna

jeho přímka kolma ku M. Proto protínají se první průměty uvažovaných hlavních přímek v bodě F_α. Vrcholová površka s_2 protíná a; tečná rovina $a\ s_2$ má přímku s_2 samu za přímku hlavní; tudíž prochází s_2' též bodem F_α.



Obr. 5.

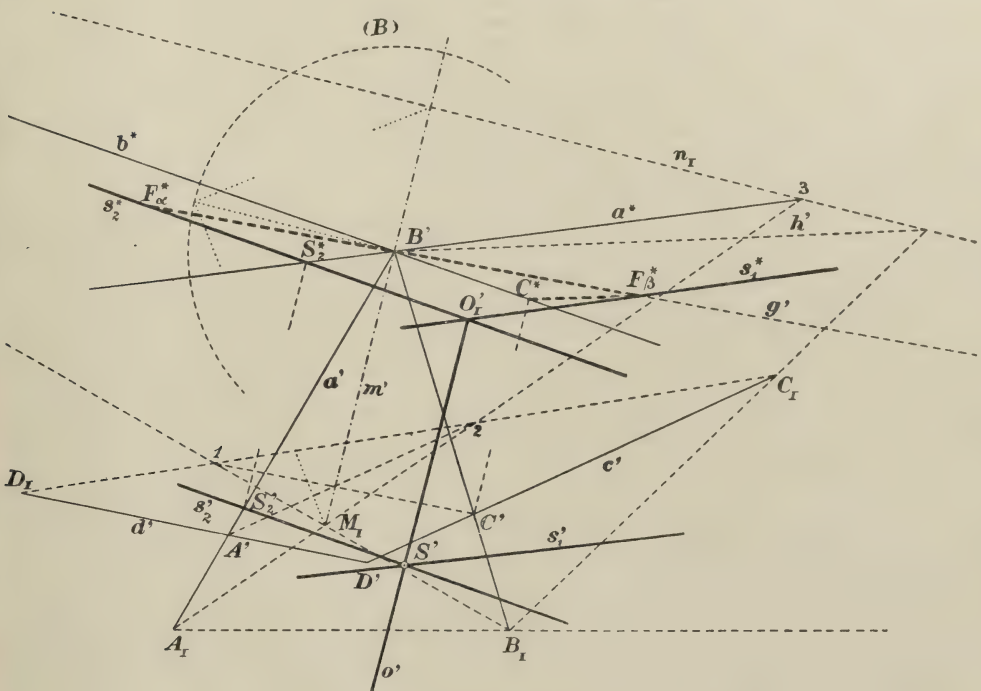
Obdobně soudíme, že parabola p_2 má přímku b' tečnou vrcholovou a průsečík F_β přímek $B'\ F_\alpha$, s_1' ohniskem. Výsledek tento možno následovně vysloviti.

Orthogonální průmět normálového paraboloidu P *plochy* H *do vrcholové roviny jest parabola, jež má průmět opěrné přímky plochy* P *tečnou vrcholovou, vrcholovou površku náležející s touto téže řadě přímkou řídící a jejíž ohnisko leží na druhé vrcholové površce.*

Protneme-li strany a, b, c, d čtyřúhelníka $A\ B\ C\ D$ s rovinou ku M rovnoběžnou v bodech *1*, *2*, *3*, *4* a vedeme body B', C', D', A' rovnoběžky resp. ku *1′ 2′*, *2′ 3′*, *3′ 4′*, *4′ 1′*, obdržíme jednoduchý čtyřúhelník $F_\beta F_\gamma F_\delta F_\alpha$, jehož strany jsou půleny body C', D', A', B' a jehož úhlopříčny $s_1' = F_\beta F_\delta$, $s_2' = F_\gamma F_\alpha$ jsou průměty vrcholových površek protínajících se ve vrcholu S plochy H. Že roviny H_1, H_2 jsou symmetrálnými rovinami rovin $o\ s_1$, $o\ s_2$, potvrzuje též konstrukce tečen z O_I ku p_1 nebo p_2.

14. Na konec řešme poslední úlohu, leží-li čtyřúhelník v obecné poloze k dané průmětně, do níž orthogonálně promítáme (obr. 6.). Budiž na př. bod B kromě svého průmětu B' dán svým distančním kruhem (B), dále buďte dány průměty A', C', D' bodů A, C, D a stopy A_I, B_I, C_I, D_I přímek $a = A\ B$, $b = B\ C$, $c = C\ D$, $d = D\ A$. Veďme rovnoběžku k d bodem C,

jež protne $C_I D_I$ v bodě *1* a rovnoběžku k c bodem A, jež protne $C_I D_I$ v bodě *2*; tyto rovnoběžky protnou se v bodě, jehož spojnice m s bodem B udává směr průměrů plochy H; přímky B_I *1*, A_I *2* protnou se ve stopě M_I přímky m a roviny $(a\ m)$, $(b\ m)$ jsou řídící roviny plochy H. Nyní sestrojme známým způsobem stopu n_I roviny N bodem B kolmo ku přímce $M_I B$ položené, do kteréž promítejme orthogonálně, značíce Σ^* průmět do dané průmětny orthogonálního průmětu útvaru Σ do roviny N. Jest tedy a^* spojnice průsečíka *3* přímek A_I *2*, n_I s bodem B' a b^* jest spojnice průsečíku přímek B_I *1*, n_I s bodem B', kdežto průsečnici g resp. h roviny $a\ b$ resp. $c\ b$ s rovinou N obdržíme jako spojnici bodu $A_I B_I . n_I$ resp. $B_I C_I . n_I$ s bodem B. Rovnoběžka bodem C' ku m' protíná b^* v bodě C^* a přímka g' protíná rovnoběžku bodem C^* ku h' v bodě F_β^*, který odpovídá ohnisku F_β paraboly p_2 předchozí konstrukce; bod F_α^* odpovídající F_α jest souměrný k F_β^* dle B'. Bodem F_α^* prochází pak s_2^* rovnoběžně ku b^* a bodem F_β^* jde s_1^* rovnoběžně ku a^*. Průmět o' osy o



Obr. 6.

plochy H jde tudíž průsečíkem přímek s_2^*, s_1^* rovnoběžně k m'. Vrcholová površka s_2 protíná a v bodě S_2, pro nějž $S_2^* = a^* . s_2^*$; rovnoběžka ku m' bodem S_2^* protíná a' v bodě S_2', jímž prochází s_2' rovnoběžně ku s_2^*. Přímka s_2' protíná o' v průmětu S' vrcholu plochy H a bodem S' jde též s_1' rovnoběžně ku s_1^*.

Nehledě k našim úvahám mohli jsme po stanovení přímek a^*, b^* usuzovati též takto. Obrys pro prvý průmět plochy H jest parabola stanovená tečnami a', b', c', d'. Užitím Brianchonových šestistranů můžeme k této parabole vésti tečnu $s_1' \parallel a^*$ a tečnu $s_2' \parallel b^*$, kteréžto tečny protínají se v bodě S'. Konstrukce zde vyvozená není méně jednoduchá; při tom šlo však hlavně o vytčení různých souvislostí zde se vyskytujících.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 058879690